TD11 – Présentations de catégories monoïdales

Samuel Mimram

17 décembre 2009

1 Une présentation de la catégorie simpliciale

Une présentation (G, R) d'un monoïde $(M, \cdot, 1)$ est la donnée d'un ensemble G de *générateurs* et d'un ensemble $R \subseteq G^* \times G^*$ de *relations* tels que le monoïde M soit isomorphe au monoïde libre G^* engendré par G quotienté par la plus petite congruence contenant les relations.

1. Proposez une présentation pour les monoïdes additifs suivants : $\mathbb{N}$, $\mathbb{N}/2\mathbb{N}$, $\mathbb{N} \times \mathbb{N}$, $\mathbb{Z}$.
2. Afin de prouver que ces présentations sont correctes (qu'on a bien l'isomorphisme requis) orientez les relations de chacune de ces présentations afin d'obtenir un système normalisant (terminant et confluent) puis montrez que les éléments du monoïde sont en bijection avec les formes normales.

L'objectif de cette partie est de construire une présentation de la *catégorie simpliciale* Δ (en généralisant la notion précédente de présentation d'un monoïde). Les objets de cette catégorie sont les ensembles finis $[n] = \{0, \ldots, n-1\}$ à n éléments et les morphismes sont les fonctions croissantes.

3. Équipez cette catégorie d'une structure de catégorie monoïdale.
4. Montrez que l'objet $[1]$ est terminal dans cette catégorie. On note $\mu : [2] \to [1]$ et $\eta : [0] \to [1]$ les morphismes terminaux de $[2]$ et $[0]$ respectivement. Donnez-en une représentation par diagrammes de corde. Montrez que ces morphismes munissent l'objet $[1]$ d'une structure de monoïde.
5. On note M la catégorie monoïdale libre contenant un objet monoïde (expliquez ce que cela veut dire). Définissez un foncteur monoïdal surjectif $F : M \to \Delta$.
6. Orientez les lois de monoïde en un système de réécriture localement confluent (on pourra calculer les paires critiques sous forme de diagrammes de corde).
7. On note $\mathbb{N}_* = \mathbb{N} \setminus \{0\}$. Interprétez tout morphisme $f : m \to n$ de M comme une fonction $[\![f]\!] : \mathbb{N}_*^m \to \mathbb{N}_*^n$ et déduisez-en que le système de réécriture est terminant, en utilisant l'ordre bien fondé $<$ sur les fonctions $\mathbb{N}_*^m \to \mathbb{N}_*^n$ défini par $f < g$ ssi pour tout $x \in \mathbb{N}_*^m$, $f(x) < g(x)$, avec $\mathbb{N}_*^n$ ordonné par l'ordre produit.
8. Déduisez-en une "présentation" de la catégorie Δ en tant que catégorie monoïdale libre quotientée par une congruence générée par des relations.
9. On définit les morphismes $\mu_i^n : [n+2] \to [n+1]$ et $\eta_i^n : [n] \to [n+1]$ par $\mu_i^n = i \otimes \mu \otimes (n-i)$ et $\eta_i^n = i \otimes \eta \otimes (n-i)$. Déterminez les lois de commutation satisfaites par ces morphismes, i.e. trouvez les membres droits des équations suivantes :
$$\mu_j^n \circ \mu_i^{n+1} = ? \qquad \eta_j^{n+2} \circ \eta_i^{n+1} = ? \qquad \mu_j^{n+1} \circ \eta_i^{n+1} = ?$$
10. Le *n-simplexe standard* Δ_n est le sous-espace de l'espace euclidien $\mathbb{R}^n$ dont les points sont
$$\Delta_n \quad = \quad \{ (x_1, \ldots, x_n) \quad | \quad x_i \geq 0 \quad \text{et} \quad \sum_i x_i = 1 \}$$
Définissez un foncteur $S : \Delta \to \mathbf{Top}$ tel que $S([n]) = \Delta_n$ en voyant les $S(\eta_i)$ comme des opérateurs de faces et les $S(\mu_i)$ comme des opérateurs de dégénérescence. Quelle est l'interprétation géométrique des équations de monoïde ?
11. Donnez une intuition géométrique des foncteurs $\phi : \Delta^{\mathrm{op}} \to \mathbf{Ens}$, appelés *ensembles simpliciaux*.
12. Proposez des ensembles simpliciaux représentant un carré vide, un carré plein, un cube vide, un cube plein, un tore, un ruban de Möbius, etc.

2 Présentations d'autres catégories

1. En utilisant la même méthodologie, proposez une présentation de la catégorie des entiers naturels et bijections. Combien le système de réécriture associé a-t-il de paires critiques ?
2. Proposez une présentation de la catégorie des entiers naturels et fonctions (non nécessairement croissantes).