

Fiches de physique

Samuel MIMRAM

2000-2001

Table des matières

0.1 Valeurs numériques

$$\begin{aligned} \pi &\approx 3.1416 & e &\approx 2.718 \\ \ln 2 &\approx 0.693 & \ln 3 &\approx 1.1 & \ln 10 &\approx 2.3 \\ \sqrt{2} &\approx 1.414 & \sqrt{3} &\approx 1.732 \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} m_e &\approx 9.1 \cdot 10^{-31} \text{ kg} & e &\approx 1.302 \cdot 10^{-19} \text{ C} & m_n &\approx m_p \approx 1.67 \cdot 10^{-27} \text{ kg} & N_a &\approx 6.02 \cdot 10^{23} \\ G &\approx 6.67 \cdot 10^{-11} \text{ SI} \\ M_{\text{Terre}} &\approx 6 \cdot 10^{24} \text{ kg} & M_{\text{Soleil}} &\approx 2 \cdot 10^{30} \text{ kg} & T_S &\approx 86164 \text{ s} & R_S &\approx 42220 \text{ km} & v_S &\approx 3079 \text{ m/s} \\ r_{\text{T-S}} &= 1 \text{ ua} \approx 150 \cdot 10^9 \text{ m} & T_T &= 1 \text{ an} \approx 365.25 \times 86400 \text{ s} \\ 1 \text{ cal} &= 4.18 \text{ J} : \text{ permet d'élever d'1 K 1 kg d'eau} \end{aligned}$$

0.2 Analyse vectorielle

$$\begin{aligned} \vec{dl} &= (h_1(q_1, q_2, q_3) dq_1, h_2(q_1, q_2, q_3) dq_2, h_3(q_1, q_2, q_3) dq_3) \\ \text{cyl} : h_1 &= 1 & h_2 &= r & h_3 &= 1 & \text{sph} : h_1 &= 1 & h_2 &= r & h_3 &= r \sin \theta \end{aligned}$$

$$\text{Nabla} : \vec{\nabla} = \left(\frac{\partial}{\partial x}, \frac{\partial}{\partial y}, \frac{\partial}{\partial z} \right)$$

$$\begin{aligned} df &= \vec{\text{grad}} f \cdot \vec{dl} \\ \vec{\text{grad}} f &= \vec{\nabla} f = \left(\frac{1}{h_1} \left(\frac{\partial f}{\partial q_1} \right), \frac{1}{h_2} \left(\frac{\partial f}{\partial q_2} \right), \frac{1}{h_3} \left(\frac{\partial f}{\partial q_3} \right) \right) \\ \vec{\text{grad}} f &= \left(\frac{\partial f}{\partial x}, \frac{\partial f}{\partial y}, \frac{\partial f}{\partial z} \right)_{\text{cart}} = \left(\frac{\partial f}{\partial r}, \frac{1}{r} \frac{\partial f}{\partial \theta}, \frac{\partial f}{\partial z} \right)_{\text{cyl}} = \left(\frac{\partial f}{\partial r}, \frac{1}{r} \frac{\partial f}{\partial \theta}, \frac{1}{r \sin \theta} \frac{\partial f}{\partial \phi} \right)_{\text{sph}} \end{aligned}$$

$$\text{div} \vec{A} = \lim_{V \rightarrow 0} \frac{1}{V} \oint_{\Sigma} \vec{A} \cdot \vec{dS} = \vec{\nabla} \cdot \vec{A} = \frac{1}{h_1 h_2 h_3} \left[\frac{\partial}{\partial q_1} (h_2 h_3 A_1) + \frac{\partial}{\partial q_2} (h_1 h_3 A_2) + \frac{\partial}{\partial q_3} (h_1 h_2 A_3) \right]$$

$$\text{div} \vec{A} = \frac{\partial A_x}{\partial x} + \frac{\partial A_y}{\partial y} + \frac{\partial A_z}{\partial z} = \frac{1}{r} \frac{\partial(r A_r)}{\partial r} + \frac{1}{r} \frac{\partial A_\theta}{\partial \theta} + \frac{\partial A_z}{\partial z}$$

$$\vec{\text{rot}} \vec{A} = \lim_{\Sigma \rightarrow 0} \frac{1}{\Sigma} \oint_C \vec{A} \cdot \vec{dl} \vec{n} = \vec{\nabla} \wedge \vec{A}$$

$$\vec{\text{rot}} \vec{A} = \frac{1}{h_1 h_2 h_3} \begin{vmatrix} h_1 \vec{u}_1 & h_2 \vec{u}_2 & h_3 \vec{u}_3 \\ \frac{\partial}{\partial q_1} & \frac{\partial}{\partial q_2} & \frac{\partial}{\partial q_3} \\ h_1 A_1 & h_2 A_2 & h_3 A_3 \end{vmatrix}$$

$$\vec{\text{rot}} \vec{A} = \left(\frac{\partial A_z}{\partial y} - \frac{\partial A_y}{\partial z}, \frac{\partial A_x}{\partial z} - \frac{\partial A_z}{\partial x}, \frac{\partial A_y}{\partial x} - \frac{\partial A_x}{\partial y} \right)$$

$$\Delta f = \vec{\nabla}^2 f = \text{div}(\vec{\text{grad}} f)$$

$$\Delta f = \left(\frac{\partial^2 f}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 f}{\partial y^2} + \frac{\partial^2 f}{\partial z^2} \right)_{\text{cart}} = \left(\frac{1}{r} \frac{\partial}{\partial r} \left(r \frac{\partial f}{\partial r} \right) + \frac{1}{r^2} \frac{\partial^2 f}{\partial \theta^2} + \frac{\partial^2 f}{\partial z^2} \right)_{\text{cyl}} = \left(\frac{1}{r^2} \frac{\partial}{\partial r} \left(r^2 \frac{\partial f}{\partial r} \right) + \dots \right)_{\text{sph}}$$

$$\text{Flux} : \phi(\vec{A}, \Sigma) = \iint_{\Sigma} \vec{A} \cdot \vec{dS} \quad (\text{surf fermée} : \vec{dS} \text{ vers l'ext})$$

$$\text{Th de Green-Ostrogradsky} : \iint_{\Sigma} \vec{A} \cdot \vec{dS} = \iiint_V \text{div} \vec{A} d\tau$$

$$\text{Circulation} : C_{PQ, \vec{A}} = \int_P^Q \vec{A} \cdot \vec{dl}$$

$$\text{Th de Stokes} : \oint_C \vec{A} \cdot \vec{dl} = \iint_{\Sigma} \vec{\text{rot}} \vec{A} \cdot \vec{dS}$$

$$\text{Formule du gradient} : \iint_{\Sigma} f \vec{dS} = \iiint_V \vec{\text{grad}} f d\tau$$

$$\text{Formule de Kelvin} : \iiint \vec{\text{rot}} \vec{A} d\tau = - \iint_{\Sigma} \vec{A} \wedge \vec{B} \quad \text{démonstration : avec } \text{div}(\vec{A} \wedge \vec{B})$$

$$\vec{\text{grad}}(fg) = f \vec{\text{grad}} g + g \vec{\text{grad}} f$$

$$\text{div}(f\vec{A}) = \vec{A} \cdot \vec{\text{grad}} f + f \text{div} \vec{A}$$

$$\begin{aligned} \overrightarrow{\text{rot}}(f\vec{A}) &= \overrightarrow{\text{grad}} f \wedge \vec{A} + f \overrightarrow{\text{rot}} \vec{A} \\ \text{div}(\vec{A} \wedge \vec{B}) &= \vec{B} \cdot \overrightarrow{\text{rot}} \vec{A} - \vec{A} \cdot \overrightarrow{\text{rot}} \vec{B} \\ \overrightarrow{\text{rot}}(\vec{A} \wedge \vec{B}) &= (\vec{B} \cdot \overrightarrow{\text{grad}}) \vec{A} - (\vec{A} \cdot \overrightarrow{\text{grad}}) \vec{B} + (\text{div} \vec{B}) \cdot \vec{A} - (\text{div} \vec{A}) \cdot \vec{B} \\ \overrightarrow{\text{rot}}(\overrightarrow{\text{rot}} \vec{A}) &= \overrightarrow{\text{grad}} \text{div} \vec{A} - \Delta \vec{A} \\ \overrightarrow{\text{grad}}(\vec{A} \cdot \vec{B}) &= (\vec{B} \cdot \overrightarrow{\text{grad}}) \vec{A} + (\vec{A} \cdot \overrightarrow{\text{grad}}) \vec{B} + \vec{B} \wedge \overrightarrow{\text{rot}} \vec{A} + \vec{A} \wedge \overrightarrow{\text{rot}} \vec{B} \end{aligned}$$

$$\text{div} \overrightarrow{\text{rot}} \vec{A} = 0 \quad \overrightarrow{\text{rot}} \overrightarrow{\text{grad}} f = \vec{0}$$

$$\overrightarrow{\text{grad}}\left(\frac{1}{r}\right) = \frac{-\vec{r}}{r^3} = \frac{-\vec{u}_r}{r^2}$$

$$\text{Vecteur surface} : \vec{S} = \frac{1}{2} \oint \overrightarrow{OM} \wedge d\overrightarrow{OM}$$

$$\text{Angle solide (en stéradians)} : d\Omega = \frac{\vec{u} \cdot d\vec{S}}{r^2} = \frac{dS \cos \theta}{r^2} = \sin \theta d\theta d\varphi \quad \text{sphère} : 4\pi \text{ st}$$

$$\text{Au sommet de mesure } \alpha \text{ d'un cône} : \Omega = 2\pi(1 - \cos \alpha)$$

$$\langle \cos^2 t \rangle_t = \langle \sin^2 t \rangle_t = \frac{1}{2} \quad \langle \cos t \sin t \rangle_t = 0$$

Approximation des grandes distances M "loin" de A et B : $r_B - r_A = -a \cos \theta$ avec $a = AB$ et $\theta = \widehat{BOM}$

$$\text{démo} : r_B^2 - r_A^2 \approx -2ar \cos \theta \text{ et } r_A + r_B \approx 2a$$

Conservation de l'énergie, homogénéité de l'espace, isotropie de l'espace

Conservation locale : $\delta\chi = \delta\chi_e + \delta\chi_c$ (échange création)

$$\delta\chi_e = -\left(\oint \vec{J}_\chi \cdot d\vec{S}\right) dt \text{ avec } \vec{J}_\chi = \rho_\chi \vec{v} \quad \delta\chi_c = \iiint_V \sigma_\chi d\tau dt$$

$$\text{conservation} : \frac{\partial \rho_\chi}{\partial t} + \text{div} \vec{J}_\chi = \sigma_\chi$$

1 Mécanique

Coordonnées cylindriques : $\vec{v} = (\dot{r}, r\dot{\theta}, \dot{z})$ et $\vec{a} = (\ddot{r} - r\dot{\theta}^2, r\ddot{\theta} + 2\dot{r}\dot{\theta}, \ddot{z})$ on a : $r\ddot{\theta} + 2\dot{r}\dot{\theta} = \frac{1}{r} \frac{\partial(r^2\dot{\theta})}{\partial t}$

$$(\vec{u}_r)' = \dot{\theta} \vec{u}_\theta \text{ et } (\vec{u}_\theta)' = -\dot{\theta} \vec{u}_r$$

Coordonnées curvilignes : $\vec{v} = \dot{s} \vec{T}$ et $\vec{a} = \ddot{s} \vec{T} + \frac{\dot{s}^2}{\rho} \vec{N}$ (on a : $\dot{s} = \|\vec{v}\|$ et $\vec{T} = \frac{\vec{v}}{\|\vec{v}\|}$)

$$\vec{a}_T = \left(\frac{\dot{s}^2}{\rho}\right) \vec{v} \quad (\text{d'où } \rho = \frac{v^2}{\|\vec{a}_N\|} \text{ avec } \vec{a}_N = \vec{a} - \vec{a}_T)$$

$$\left(\frac{d\vec{A}}{dt}\right)_{\mathcal{R}} = \left(\frac{d\vec{A}}{dt}\right)_{\mathcal{R}'} + \vec{\Omega}_{\mathcal{R}'/\mathcal{R}} \wedge \vec{A}$$

$$\vec{v} = \vec{v}_r + \vec{v}_e \quad (\text{vitesse d'entraînement / relative}) \quad \text{avec } \vec{v}_e = \vec{v}(O') + \vec{\Omega} \wedge \overrightarrow{O'M}$$

$$\vec{a} = \vec{a}_r + \vec{a}_e + \vec{a}_c \quad (\text{accélération relative / d'entraînement / complémentaire (de Coriolis)})$$

$$\vec{a}_e = \left(\frac{d\vec{\Omega}}{dt}\right)_{\mathcal{R}} \wedge \overrightarrow{O'M} + \vec{\Omega} \wedge (\vec{\Omega} \wedge \overrightarrow{O'M})$$

$$\vec{a}_c = 2\vec{\Omega} \wedge \vec{v}_r$$

$$\text{Pour un mouvement de rotation} : \vec{F}_{i_e} = -m\vec{a}_e = m\omega^2 \overrightarrow{HM}$$

$$\vec{F}_{i_c} = -2m\vec{\Omega} \wedge \vec{v}_r$$

Force dérivant d'un potentiel \Leftrightarrow conservative

$$\vec{F} = -\overrightarrow{\text{grad}} \mathcal{E}_p$$

$$dW = \vec{F} \cdot d\vec{l} = -d\mathcal{E}_p \quad P = \vec{F} \cdot \vec{v} = -\frac{d\mathcal{E}_p}{dt}$$

$$\text{Moment cinétique} : \vec{L} = \overrightarrow{OM} \wedge \vec{P} = m\overrightarrow{OM} \wedge \vec{v}$$

$$\text{Moment d'une force} : \vec{M}_O(\vec{F}) = \frac{d\vec{L}}{dt} = \overrightarrow{OM} \wedge \vec{F} \quad (= \vec{0} \text{ si le mouvement est plan})$$

$$\text{Théorème de l'énergie cinétique} : \Delta\mathcal{E}_c = W_{AB}(\vec{F})$$

$$\text{Position d'équilibre} : \sum \vec{F} = \vec{0} \text{ ou } \frac{d\mathcal{E}_p}{dx} = 0 \quad \text{stable} : \frac{d^2\mathcal{E}_p}{dx^2} > 0 / \text{sinon} : \text{instable (repos : } \vec{v} = \vec{0})$$

$$\text{stabilité} : \text{poser } x = x_{\text{éq}} + \varepsilon \quad \rightarrow \text{DL du TRC}$$

Frottement solide : $R_T = kR_N$ ou $R_T \leq kR_N$ si $\dot{x} = 0$

Frottement fluide : $\vec{F} = -k\vec{v}$

$$\text{Ressort} : \vec{F} = -k(\vec{l} - \vec{l}_0) \quad \mathcal{E}_p = \frac{1}{2}k(l - l_0)^2$$

$$\text{Centre de masse } G : M \overrightarrow{OG} = \sum_i (m_i \overrightarrow{OA}_i) \quad \vec{P} = M \vec{V}_G$$

Référentiel barycentrique : centré sur G

$$\vec{P}^s = \vec{0} \quad \vec{L}^s \text{ est le même en tout point}$$

Théorème de Kœnig : $\vec{L}_{/O} = \vec{L}^* + \vec{OG} \wedge \vec{P}$ et $\mathcal{E}_{c/O} = \mathcal{E}_c^* + \frac{1}{2}MV_G^2$
 Deux points : masse réduite du système : $M = \mu = \frac{m_1 m_2}{m_1 + m_2}$

1.1 Forces centrales

$$K = GmM$$

Constante des aires : $C = r^2 \dot{\theta} = \|\vec{r}_0 \wedge \vec{v}_0\| = \frac{\|\vec{L}\|}{m}$ démo : $a_\theta = 0 = \frac{1}{r} \frac{d(r^2 \dot{\theta})}{dt}$ ou bien $\frac{d\vec{L}}{dt} = \vec{M}_O(O) = \vec{0}$

Loi des aires (surface balayée) : $dS = \frac{1}{2}C dt$ ($\Leftarrow dS = \frac{1}{2}r^2 d\theta$) \rightarrow période

Etablir la loi du mouvement : poser $u = \frac{1}{r}$ - éliminer $\dot{\theta}$ avec $\dot{\theta} = \frac{C}{r^2}$ - calculer \dot{r} et \ddot{r} avec $\frac{du}{dt} = \dot{\theta} \frac{du}{d\theta}$

Formules de Binet :

$$v^2 = \dot{r}^2 + (r\dot{\theta})^2 = C^2 \left[\left(\frac{du}{d\theta} \right)^2 + u^2 \right] (\Rightarrow \mathcal{E}_c)$$

$$a_r = \ddot{r} - r\dot{\theta}^2 = -\frac{C^2}{r^2} \left[\frac{d^2 u}{d\theta^2} + u \right]$$

$\mathcal{E}_m^* < 0$: $e < 1$: ellipse

$\mathcal{E}_m^* = 0$: $e = 1$: parabole

$\mathcal{E}_m^* > 0$: $e > 1$: hyperbole

$$\text{car } a = \mu a_r = -\frac{K}{r^2}$$

$$\mathcal{E}_p = -\frac{K}{r}$$

$\mathcal{E}_m = \frac{1}{2}\mu v_0^2 - \frac{K}{r_0} = -\frac{K}{2a}$ démo : $\mathcal{E}_m = \frac{1}{2}(\dot{r}^2 + r^2 \dot{\theta}^2) - \frac{K}{r}$ éliminer $\dot{\theta}$ avec C calculer \mathcal{E}_m en $r = a + c$ et en $r = a - c$ (où $\dot{r} = 0$)

$$p = \frac{\mu C^2}{K} = \pm a(1 - e^2) \quad (\Rightarrow a \text{ avec } \mathcal{E}_m)$$

$$p = \frac{b^2}{a} \quad e = \frac{c}{a} \quad a^2 = b^2 + c^2$$

$\vec{U} = \vec{P} \wedge \vec{L} - \mu K \vec{e}_r = \text{cst}$ direction : grand axe, sens foyer \rightarrow périastre ; $\varphi = \arg(U_r + iU_\theta)$

3^e loi de Kepler : période : $\frac{T^2}{a^3} = 4\pi^2 \frac{\mu}{GM} \approx \frac{4\pi^2}{GM}$ démo : $\int dS = \frac{1}{2}CT = \pi ab \rightarrow$ au carré puis $C^2 = \frac{b^2 K}{\mu a}$ car $p = \frac{\mu C^2}{K} = \frac{b^2}{a}$

Vitesses de libération : $v_1 = \sqrt{\frac{GM_T}{r_0}}$ et $v_2 = \sqrt{2}v_1$ (car $m \frac{v^2}{r_0} = \text{cst}$)

Vecteur excentricité : $\vec{A} = \vec{e}_\theta - \frac{C}{GM} \vec{v} = \vec{\text{cst}}$ $\|\vec{A}\| = -e$

Éllipse :

$$\text{équation pol : } r = \frac{p}{1 + e \cos(\theta - \theta_0)} \quad \text{cart : } \frac{x^2}{a^2} + \frac{y^2}{b^2} = 1$$

$$OF = c \quad FP = a - c \quad OC = b \quad FM + F'M = 2a \quad FA = a + c$$

la bissectrice de $\widehat{F'MF'}$ est normale à l'ellipse

Conservation : du moment cinétique et de \mathcal{E}_m^*

1.2 Oscillateurs

$$F = -kX$$

$\mathcal{E}_{p(X)} \approx \mathcal{E}_{p(x_0)} + \frac{kX^2}{2}$ avec $X = x - x_0$ avec x_0 : puits de potentiel

Harmonique :

Isochronisme : ω_0 indépendant de X_0 $T = \frac{2\pi}{\omega_0} = 2\pi \sqrt{\frac{m}{K}}$

$$\mathcal{E}_m = \frac{1}{2}KX_0^2 + \mathcal{E}_{p(x_0)}$$

Énergie moyenne : $\overline{\mathcal{E}_c} = \overline{\mathcal{E}_p} = \frac{\mathcal{E}_m}{2}$

$$\text{Amorti : } \omega_0^2 = \frac{K}{m} \quad \frac{\omega_0}{Q} = \frac{h}{m} \quad (F_{\text{frott}} = -h \dot{x})$$

$$\ddot{x} + \frac{\omega_0}{Q} \dot{x} + \omega_0^2 x = 0$$

$Q < \frac{1}{2}$: régime aperiodique, $Q = \frac{1}{2}$: critique, $Q > \frac{1}{2}$: pseudo-périodique, $Q \rightarrow \infty$: périodique

Décroissement logarithmique (rapport entre deux max successifs) constant

Plan de phase : \dot{x} en fonction de x

$$\frac{d\mathcal{E}_p}{dr} = (-h\dot{x})\dot{x} = P_{\text{frott}} < 0$$

Frottement solide : $\vec{F} = -h \times \text{sgn } \dot{x}$ s'il y a mouvement, $\vec{F} = \vec{0}$ sinon

oscillations centrés sur $\pm \frac{h}{K}$

Oscillateur harmonique forcé : poser $X_B = x_B - x_{B\text{eq}}$

Résoudre en posant $\underline{X}_0 = X_0 e^{j\varphi}$ et $q = \frac{\omega}{\omega_0} = \frac{f}{f_0}$

Oscillations autour de la pos d'équilibre : intégrer $\mathcal{E}_m = \text{cst}$ avec un DL de l' \mathcal{E}_p

$$\frac{1}{2}m \left(\frac{dr}{dt} \right)^2 + \frac{1}{2} \left(\frac{d^2 U}{dr^2} \right) (r - r_{\text{eq}}) = 0 \quad \rightarrow \quad \text{multiplier par } \left(\frac{dr}{dt} \right) \dots$$

Période des oscillations : $\mathcal{E}_m = \frac{1}{2}m\dot{x}^2 + \mathcal{E}_p(x) \rightarrow dx = \sqrt{\frac{2(\mathcal{E}_m - \mathcal{E}_p(x))}{m}} dt \rightarrow \frac{T}{4} = \int_0^{T/4} dt = \dots$
 $\int_{-\theta_0}^{\theta_0} \frac{d\theta}{\sqrt{\theta_0^2 - \theta^2}} = \pi$

1.3 Chocs

Quantités de mouvement : $P_1 + P_2 = \text{cst}$

Élastique : $\mathcal{E}_c = \text{cst}$ ($F_{\text{frott}} \approx 0$) mou : $\mathcal{E}_c \neq \text{cst}$

Coefficient de restitution : $\vec{v}'_1 - \vec{v}'_2 = -e(\vec{v}_1 - \vec{v}_2)$

$0 < e < 1$ $e = 1$: élastique $e = 0$: parfaitement mou

Sur une surface dure : $\vec{F}_{\text{frott}} = \vec{0} \Rightarrow \vec{v}'_T = \vec{v}_T$; si élastique : $\vec{v}'_T = \vec{v}_T$ et $\vec{v}'_N = -\vec{v}_N$

Choc élastique : $\Delta\vec{p} = 2\vec{p}_\perp$

Il y a conservation : de la quantité de mvt ; si le choc est élastique : de l' \mathcal{E}_c du syst

1.4 Mécanique du solide

Formule de Gibbs : $(\vec{u} \wedge \vec{v}) \wedge \vec{w} = (\vec{u} \cdot \vec{w})\vec{v} - (\vec{v} \cdot \vec{w})\vec{u}$

Champ équiprojectif \Leftrightarrow antisymétrique $(\vec{u} \cdot \mathcal{L}(\vec{v}) = -\vec{v} \cdot \mathcal{L}(\vec{u})) \Rightarrow :$

Torseur : $\vec{M}_P = \vec{M}_O + \vec{R} \wedge \vec{OP}$

Vecteur lié : $(A, \vec{u}) \Rightarrow$ glisseur : $\vec{G}_P = \vec{u} \wedge \vec{AP}$ couple : torseur uniforme

Comoment (ici noté \otimes) (indép de M) : $\vec{M} \otimes \vec{M}' = \vec{M}_M \cdot \vec{R}' + \vec{M}'_M \cdot \vec{R}$

Centre d'inertie G : $\int \vec{GM} dm = \vec{0}$ et $m\vec{OG} = \int \vec{OM} dm$

Théorèmes de Guldin :

- $\mathcal{A}_{\text{surf}}$ engendrée par la courbe = $\mathcal{L}_{\text{courbe}} \times \mathcal{L}_{\text{cercle}}$ engendré par G

- $\mathcal{V}_{\text{engendrée}}$ par la surf = $\mathcal{A}_{\text{surf}} \times \mathcal{L}_{\text{cercle}}$ engendré par G

Torseur cinématique (des vitesses) : $\vec{v}_B = \vec{v}_A + \vec{\Omega} \wedge \vec{AB}$

Torseur cinétique : $\vec{\sigma}_A = \int \vec{AM} \wedge \vec{v}_M dm$ $\vec{R}_c = \vec{p} = m\vec{v}_G$ $\vec{\sigma}_A = \vec{\sigma}_A^*$

Torseur dynamique : $\vec{\delta}_A = \int \vec{AM} \wedge \vec{a}_M dm$ $\vec{R}_d = m\vec{a}_G$

$$\vec{\Omega}(\mathcal{R}_1/\mathcal{R}) = \left[\left(\frac{d\vec{j}_1}{dt} \right)_{\mathcal{R}} \vec{k}_1 \right] \vec{i}_1 + \left[\left(\frac{d\vec{k}_1}{dt} \right)_{\mathcal{R}} \vec{i}_1 \right] \vec{j}_1 + \left[\left(\frac{d\vec{i}_1}{dt} \right)_{\mathcal{R}} \vec{j}_1 \right] \vec{k}_1 \Rightarrow \vec{\Omega} \wedge \vec{i}_1 = \frac{d\vec{i}_1}{dt} \dots$$

Opérateur d'inertie : $\vec{\sigma}_O = \mathcal{J}_{(O)}\vec{\omega} = \int \vec{OM} \wedge (\vec{\omega} \wedge \vec{OM}) dm$

coef diag : $I_{xx} = \int (y^2 + z^2) dm = \int d_\Delta^2 dm$ $I_{xy} = -\int_S xy dm$

Moment d'inertie : $\mathcal{J}_\Delta = \vec{u} \cdot \mathcal{J}_{(O)}\vec{u}$ rotation autour d'un axe : $\sigma_\Delta = \mathcal{J}_\Delta \omega$

Th d'Huygens : $\mathcal{J}_\Delta = \mathcal{J}_{\Delta_G} + m d^2$ (Δ/Δ_G)

Moments d'inertie :

- sphère : $J_{\Delta_G} = \frac{2}{3}mR^2$

- boule : $J_{\Delta_G} = \frac{2}{5}mR^2$

- disque : $J_{\Delta_G} = \frac{1}{2}mR^2$

- cylindre [creux] : $J_{\Delta_G} = [\frac{1}{2}]mR^2$

- barre : $J_{\Delta_G} = \frac{1}{12}ml^2$

Calcul de J pour une sphère : $\iiint d_\Delta^2 dm = \frac{2}{3} \iiint r^2 dm$

Th de Kœnig : $\vec{\sigma}_A = \vec{\sigma}_A^* + \vec{AG} \wedge m\vec{v}_G$ $\vec{\delta}_A = \vec{\delta}_A^* + \vec{AG} \wedge m\vec{a}_G = \frac{d\vec{\sigma}_A^*}{dt} + \vec{AG} \wedge m\vec{a}_G$

si A fixe (ds \mathcal{R} galil) ou $A = G$ ou \vec{v}_A/\vec{v}_G : $\vec{\delta}_A = \frac{d\vec{\sigma}_A^*}{dt}$

svt : $\delta_A = \frac{d\sigma_A}{dt} = \mathcal{J}\dot{\omega} = \mathcal{J}\ddot{\theta}$

Th de Kœnig (att : l' \mathcal{E}_c dépend du réfl) : $\mathcal{E}_c = \frac{1}{2}(\vec{v}_G \cdot \vec{R}_c + \vec{\omega} \cdot \vec{\sigma}_G) = \frac{1}{2}(\vec{v} \otimes \vec{\sigma}) = \frac{1}{2}mv_G^2 + \frac{1}{2}\mathcal{J}_\Delta \omega^2 = \frac{1}{2}mv_G^2 + \mathcal{E}_{C_K}$

Th de Kœnig : $\mathcal{J}_{(O)}\vec{\omega} = \mathcal{J}_{(G)}\vec{\omega} + m\vec{OG} \wedge (\vec{\omega} \wedge \vec{OG})$

Th de la résultante cinétique (TRC) : $\frac{d\vec{p}}{dt} = \sum \vec{f}_{\text{ext}}$

Th du moment cinétique (TMC) : $\vec{\delta} = \vec{M}_A^{\text{ext}}$

Th de l'énergie mécanique (TEM) : $\frac{d\mathcal{E}_c}{dt} = P = P_{\text{int}} + P_{\text{ext}}$ (ds un réftl galil ou barycentrq)

Écrire le tmc au point d'application des forces de frottement ($\rightarrow \vec{M}(\vec{R}) = \vec{0}$)

Ds un réftl galil : $\Delta\mathcal{E}_m = W_{\text{NC}}$ syst conservatif : $\mathcal{E}_m = \mathcal{E}_c + \mathcal{E}_p = \text{cst}$

$$dV = \vec{\text{grad}} V \cdot d\vec{l} \quad dW = -dV \quad \Delta W = -\Delta V$$

La puiss des actions int est indép du réftl choisi

$$\text{Moment d'une force : } \vec{M}_A(\vec{F}) = \int \vec{AM} \wedge d\vec{F} = \vec{M}_O + (\int d\vec{F}) \wedge \vec{OA}$$

$$\text{Puissance (dépend du réftl) : } P_{\vec{F}} = \vec{F} \cdot \vec{v}_M + \vec{M}_M(\vec{F}) \cdot \vec{\omega} = \vec{v} \otimes \vec{M}(\vec{F})$$

$$\text{Champ de pesanteur : } \vec{M}_O = m\vec{g} \wedge \vec{GO}$$

$$\text{Force pressante : } d\vec{f} = -\vec{\text{grad}} P d\tau \quad \text{svt : } \vec{\text{grad}} P = \rho\vec{g} = \frac{M}{V}\vec{g} = \frac{MP}{RT}\vec{g}$$

$$\text{Condition de roulement sans glissement : } \vec{v}_I = \vec{0} \rightarrow \dot{x} + \dot{\theta} = 0$$

Lois de Coulomb ($\|\vec{R}_t\| \leq f\|\vec{R}_n\|$) :

- si glissement : \vec{R}_t opposé à \vec{v} $\|\vec{R}_t\| = f_d\|\vec{R}_n\|$
- sinon : $\|\vec{R}_t\| = f_s\|\vec{R}_n\|$

Liaison parfaite : puiss des actions de contact = 0

2 Électrocinétique

Densité particulaire de porteurs de charge : $n_m = \frac{dN}{d\tau}$

Densité de charge mobile : $\rho_m = qn_m$

Densité de courant en un point : $\vec{J} = \rho_m\vec{v}$

$$\text{Charge : } dQ = (\vec{J} \cdot d\vec{S})dt$$

$$\text{Intensité : } dI = \frac{dQ}{dt} = \vec{J} \cdot d\vec{S}$$

Conservation de la charge : $\text{div } \vec{J} + \frac{d\rho_m}{dt} = 0$

Loi d'Ohm locale : $\vec{J} = \gamma\vec{E}$ γ : conductivité

$$I = J\Sigma = \gamma\Sigma E$$

$$U = El = RI \text{ avec } R = \frac{l}{\gamma S} = \frac{\rho l}{S} \quad \rho = \frac{1}{\gamma} : \text{résistivité}$$

$$\text{dém} : U = \int dV = -\int \vec{\text{grad}} V \cdot d\vec{l} = \int \vec{E} \cdot d\vec{l} = \frac{1}{\gamma} \int \vec{J} \cdot d\vec{l} = \frac{1}{\gamma S} I l$$

$$\text{Conductance : } G = \frac{1}{R} = \frac{\gamma S}{l}$$

$$\Delta V = RI$$

Résistances : série ($R = R_1 + R_2$) / parallèle ($G = G_1 + G_2$)

2.1 Réseaux linéaires

Lois de Kirchhoff :

- loi des nœuds : $\sum_i \varepsilon_i I_i = 0$

- loi des mailles : $\sum_i \varepsilon_i R_i I_i = \sum_k \varepsilon_k e_k$

Théorème de superposition : la solution du système global est égale à la somme des solutions à un générateur (+ générateurs dépendants)

$$\text{Théorème de Millman : } V_N = \frac{\sum_i V_{A_i}/R_i}{\sum_i 1/R_i} \quad (V_N = \frac{\sum V_i/R_i + I_j}{\sum 1/R_i})$$

Équivalence triangle-étoile : $R'_A = \frac{R_B R_C}{R_A + R_B + R_C}$ démo : considérer les cas où $i = 0$ ds une branche de l'étoile

Symétrie : un point et son symétrique sont au même potentiel \rightarrow il ne passe pas de courant entre eux

Antisymétrie : deux points sur l'axe sont au même potentiel...

Théorème de Thévenin :

- e_{th} : U en sortie ouverte

- R_{th} : $R_{\text{éq}}$, générateurs éteints (sauf commandés)

$$\text{Pont diviseur de tension : } U_{AB} = e \frac{r}{R+r}$$

Matrice de transfert : $(u_s, i_s) = M(u_e, i_e)$ matrice impédance : $(u_s, u_e) = M(i_s, i_e)$

2.2 Réseaux linéaires en régime variable

Condensateurs : $q = Cu$ $i = \frac{dq}{dt} = C \frac{du}{dt}$ $W_E = \frac{1}{2}CU^2$

Bobines : $U = L \frac{di}{dt}$ $W_B = \frac{1}{2}LI^2$

En régime continu C \Leftrightarrow -/- et L \Leftrightarrow — $\neq \omega \rightarrow \infty$

Continuité de la tension aux bornes de C et du courant qui traverse L

Régime variable : $\frac{d^2i}{dt^2} + \frac{\omega_0}{Q} \frac{di}{dt} + \omega_0^2 = 0$

$Q < \frac{1}{2}$: apériodique, $Q = \frac{1}{2}$: critique, $Q > \frac{1}{2}$: pseudo-périodique, $Q \rightarrow \infty$: périodique

Décrément logarithmique constant

2.3 Régime sinusoïdal forcé

Impédances : R C : $\frac{1}{jC\omega}$ L : $jL\omega$

$$\frac{dU}{dt} = j\omega U$$

Forme canonique : $\underline{I} = \frac{1}{1+jQ(x-\frac{1}{x})}$ et $\underline{U} = \frac{E}{1+jQ(x-\frac{1}{x})}$ avec $x = \frac{\omega}{\omega_0} = \frac{F}{F_0}$

$$\text{svt : } \omega_0 = \frac{1}{\sqrt{LC}} \quad Q = \frac{L}{R}\omega_0 = \frac{1}{R} \sqrt{\frac{L}{C}}$$

Q : facteur de qualité

Fonction de transfert (gain en tension à $i_s = 0$) : $\underline{H} = \frac{U_s}{U_e}$

Gain : $G_{dB} = 20 \log \|\underline{H}\|$ phase : $\varphi = \arg(\underline{H})$

Bande passante : $G_{(-3 \text{ dB})} = \frac{G_{\max}}{\sqrt{2}}$ ($20 \log(\frac{1}{\sqrt{2}}) \approx -3$) $\frac{\Delta\omega}{\omega_0} = \frac{1}{Q} = \frac{\Delta F}{F_0}$

Séries de Fourier : $f(t) = \frac{a_0}{2} + \sum_{k=1}^{\infty} [a_k \cos(k\omega t) + b_k \sin(k\omega t)]$

$$a_n = \frac{2}{T} \int_0^T f(t) \cos(n\omega t) dt \quad b_n = \frac{2}{T} \int_0^T f(t) \sin(n\omega t) dt \quad (\text{parité !}) \quad \omega = \frac{2\pi}{T}$$

$$\text{cplx : } f(x) = \sum_{-\infty}^{\infty} c_n e^{in\omega x} \quad c_n = \frac{1}{2}(a_n - ib_n) \text{ et } c_{-n} = \frac{1}{2}(a_n + ib_n) \quad c_k = \frac{1}{T} \int_0^T f(t) e^{-ik\omega t} dt$$

$$\underline{I} = I_{\text{eff}} \sqrt{2} \cos(\omega t + \varphi) \quad \underline{U} = U_{\text{eff}} \sqrt{2} \cos(\omega t + \varphi)$$

Puissance moyenne : $\overline{P} = \frac{1}{T} \int_0^T ui dt = I_{\text{eff}} U_{\text{eff}} \cos \varphi$

Puissance complexe : $\underline{P} = \frac{1}{2} \underline{U} \cdot \underline{I}^*$ (puissance active : $\overline{P} = \Re(P)$, puissance réactive : $\Im(P)$)

Amplificateur opérationnel :

$$i_e^+ \approx i_e^- \approx 0 \quad v_s = \mu(v_e^+ - v_e^-) = \mu \varepsilon \quad \mu : \text{gain} \quad v_s \leq v_{s\max} \Rightarrow v_e^+ - v_e^- \approx 0$$

fonctionnement linéaire : $\tau \frac{dv_s}{dt} + v_s = \mu \varepsilon$

appliquer le th de Millman aux bornes d'entrée

rétroaction : tjrs sur la borne \ominus pour être stable

$$\mu \approx 10^5 \quad \tau \approx 10^{-2} \text{ s} \quad R_e \approx 10^{11} \Omega \quad R_s \approx 1 \Omega \quad V_{\text{sat}} \approx 15 \text{ V} \quad i_{\text{max}} \approx 10 \text{ mA}$$

MONTAGES CLASSIQUES AVEC AO...

3 Ondes électromagnétiques

3.1 Équations de Maxwell

$$\text{div } \vec{E} = \frac{\rho}{\varepsilon_0} \quad \text{div } \vec{B} = 0 \quad \text{rot } \vec{E} = -\frac{\partial \vec{B}}{\partial t} \quad \text{rot } \vec{B} = \mu_0(\vec{J} + \varepsilon_0 \frac{\partial \vec{E}}{\partial t})$$

$$\mu_0 \varepsilon_0 c^2 = 1 \quad \mu_0 = 4\pi \cdot 10^{-7} \text{ SI}$$

Vecteur densité de courant : $\vec{J} = \rho \vec{v} = \sum n_i q_i \vec{v}$ (ρ : densité volumique de charge)

Conservation locale de la charge : $\text{div } \vec{J} + \frac{\partial \rho}{\partial t} = 0 \quad \Leftrightarrow \frac{\partial Q}{\partial t} = - \oint_{\partial V} \vec{J} \cdot d\vec{S} = \frac{\partial}{\partial t} (\iiint_V \rho d\tau)$ ou $\text{div } \text{rot } \vec{B} = 0$

Potentiel vecteur associé à \vec{B} : $\vec{B} = \text{rot } \vec{A}$ car $\text{div } \text{rot } \vec{A} = 0$

Potentiel associé à \vec{E} : $\vec{E} = -\text{grad } V - \frac{\partial \vec{A}}{\partial t}$ car $\text{rot } \text{grad } V = 0$

$$\Delta V = -\text{div } \frac{\partial \vec{A}}{\partial t} - \frac{\rho}{\varepsilon_0}$$

Jauge de Coulomb (\rightarrow statique) : $\text{div } \vec{A} = 0$

Jauge de Lorentz (\rightarrow propagation) : $\text{div } \vec{A} + \frac{1}{c^2} \frac{\partial V}{\partial t} = 0$

Par une transfo de Galilée ($\vec{v} = \text{cst}$ coli à \vec{t}) : $\vec{V} = \vec{V}'$

$$\frac{d}{dt} = \frac{\partial}{\partial t} + (\vec{v} \cdot \text{grad}) \quad \text{or } dt = dt' \quad \text{donc } \frac{\partial}{\partial t'} = \frac{\partial}{\partial t} + \vec{V} \cdot \nabla \quad \text{avec } \vec{V} = \vec{v} - \vec{v}'$$

$$\rho : \text{invariant} \quad \vec{f} = \vec{f}'$$

Maxwell-Gauss : $\text{div } \vec{E} = \frac{\rho}{\epsilon_0} \Rightarrow$ th de Gauss : $\oint_{\Sigma} \vec{E} \cdot d\vec{S} = \frac{Q_{\text{int}}}{\epsilon_0}$

Maxwell-Flux : $\text{div } \vec{B} = 0 \Rightarrow \vec{B}$ à flux conservatif : $\oint_{\Sigma} \vec{B} \cdot d\vec{S}$

Maxwell-Faraday : $\text{rot } \vec{E} = -\frac{\partial \vec{B}}{\partial t} \Rightarrow$ loi de Lenz : $\oint_{\mathcal{C}} \vec{E} \cdot d\vec{l} = -\frac{\partial}{\partial t} \iint_{\Sigma} \vec{B} \cdot d\vec{S}$

Maxwell-Ampère : $\text{rot } \vec{B} = \mu_0(\vec{J} + \epsilon_0 \frac{\partial \vec{E}}{\partial t}) \Rightarrow$ th d'Ampère : $\oint_{\mathcal{C}} \vec{B} \cdot d\vec{l} = \mu_0 I$

À travers une surface chargée : $\vec{E}_2 - \vec{E}_1 = \frac{\sigma}{\epsilon_0} \vec{n}_{12} \quad \vec{B}_2 - \vec{B}_1 = \mu_0 \vec{J}_S \wedge \vec{n}_{12}$

3.2 Phénomènes vibratoires

Onde monochromatique : $V(t) = V_0 \cos(\omega t + \varphi)$ (quasi : $A_0(t) \approx \text{cst}$ sur une période)

Addition de 2 ondes isochrones : $V^2 = VV^* = V_0^2 + V_0^2 + 2V_0 V_0 \cos \Delta\varphi$

Onde progressive : dépend de $t \pm \frac{x}{c}$

Onde plane progressive : $\psi(t - \frac{\vec{r}}{c})$ monochromatique : $\psi = \psi_0 \cos[\omega(t - \frac{\vec{r}}{c})] = \psi_0 \cos(\omega t - \vec{k} \cdot \vec{r})$
les ondes planes se mettent ss la forme : $\psi(x, t) = f(t - \frac{x}{c}) + g(t + \frac{x}{c})$

Onde sphérique : $\psi(r, t) = \frac{\psi_0}{r} \cos[\omega(t - \frac{r}{c})]$

Onde stationnaire : $\psi(x, t) = f(x)g(t)$

Sont solution de l'éq des ondes : $\Delta\psi = \frac{1}{c^2} \frac{\partial^2 \psi}{\partial t^2}$

démo : mq $\Delta\psi = \frac{1}{r} \frac{\partial^2(r\psi)}{\partial r^2} \Rightarrow \phi = (r\psi)$ sol de l'éq en dim 1

Éq de Maxwell ds le vide : $\text{div } \vec{E} = \vec{0} \quad \text{div } \vec{B} = \vec{0} \quad \text{rot } \vec{E} = -\frac{\partial \vec{B}}{\partial t} \quad \text{rot } \vec{B} = \mu_0 \epsilon_0 \frac{\partial \vec{E}}{\partial t}$

On en déduit : $\vec{\Delta} \vec{E} = \frac{1}{c^2} \frac{\partial^2 \vec{E}}{\partial t^2} \quad \vec{\Delta} \vec{B} = \frac{1}{c^2} \frac{\partial^2 \vec{B}}{\partial t^2} \quad \mu_0 \epsilon_0 c^2 = 1$ (avec $\text{rot } \text{rot } \vec{F} = \text{grad } \text{div } \vec{F} - \vec{\Delta} \vec{F}$)

\vec{k} : vecteur d'onde ; coli à la direction de propagation $k = \frac{2\pi}{\lambda} = \frac{\omega}{c}$

c : célérité ds le vide : $c = \frac{1}{\sqrt{\epsilon_0 \mu_0}}$

Vitesse de phase : $v_\varphi = \frac{\omega}{k}$ vitesse de groupe : $v_g = \frac{d\omega}{dk}$

$$\mathcal{E} = h\nu = \frac{hc}{\lambda} = k_B T$$

Milieu homogène : $\epsilon = \epsilon_r \epsilon_0 \quad \mu = \mu_r \mu_0 \quad c' = \frac{c}{\sqrt{\epsilon_r \mu_r}}$

Indice de réfraction : $n = \sqrt{\epsilon_r \mu_r} \quad \lambda = \frac{\lambda_0}{n} \quad n = \frac{c}{v} > 1$ air : $n = 1$, verre : $n \approx 1,5$

Milieu non homogène : $\vec{\Delta} \vec{E} = \frac{1}{v^2} \frac{\partial^2 \vec{E}}{\partial t^2} \quad \vec{\Delta} \vec{B} = \frac{1}{v^2} \frac{\partial^2 \vec{B}}{\partial t^2} \quad v(\vec{r})$

Sols ss la forme $\psi(\vec{r}, t) = A(\vec{r}) \exp[i(\omega t - \varphi(\vec{r}))]$ avec $A(\vec{r}) \approx \text{cst}$ devant $\varphi(\vec{r})$ (phase) : $\frac{\Delta A}{A} \ll \|\text{grad } \varphi\|^2$

Approximation de l'optique géom : $\|\text{grad } \varphi\| = \frac{\omega}{v}$

d'où : $\vec{k} = \text{grad } \varphi \quad \|\vec{k}\| = \|\text{grad } \varphi\| = \frac{\omega}{v} = \frac{2\pi}{\lambda}$

$\text{grad } \varphi \perp$ surf équi-phases

Th de Malus : les rayons sont perpendiculaires aux surfaces d'onde

Principe du retour inverse de la lumière

Chemin optique : $dL = n ds \quad (AB) = c \Delta t$

Principe de Fermat : la lumière emprunte le plus court trajet possible ($dL = 0$)

Éq des rayons lumineux $\frac{d(n\vec{u})}{ds} = \text{grad } n$

démo : mq $\text{grad } L = n\vec{u}$ avec $dL = \text{grad } L \cdot d\vec{r}$ et $d\vec{r} = \vec{u} ds$ puis $\frac{d}{ds}(\text{grad } L) = \text{grad}(\frac{dL}{ds})$

Repère de Frénet : $\frac{1}{R} = \vec{N} \cdot \text{grad } n$

Polarisation (OPPM) : $\varphi = \varphi_y - \varphi_z$ avec $E_x = E_{x0} \cos(\omega t - kz)$ et $E_y = E_{y0} \cos(\omega t - kz - \varphi)$:

- $\sin \varphi > 0$: polarisation elliptique gauche (sens trigo) $\neq \sin \varphi < 0$: droite

- $\varphi = \pm \frac{\pi}{2}$ et $E_{x0} = E_{y0}$: polarisation circulaire gauche (+) / droite (-)

- $\varphi = 0$ ou π : polarisation rectiligne

Vecteur de Poynting : $\vec{\Pi} = \frac{1}{\mu_0} \vec{E} \wedge \vec{B} \quad \mathcal{P} = \oint \vec{\Pi} \cdot d\vec{S} \quad \langle \mathcal{P} \rangle = \oint \langle \vec{\Pi} \rangle \cdot d\vec{S}$

Bilan énergétique : $-\frac{dW_m}{dt} = \mathcal{P}_{\text{cédée ds } V} + \mathcal{P}_{\text{cédée à l'ext}} = \iiint_V \vec{J} \cdot \vec{E} d\tau + \oint \vec{\Pi} \cdot d\vec{S}$

local : $-\vec{J} \cdot \vec{E} = \text{div } \vec{\Pi} + \frac{\partial W_m}{\partial t}$

Pression électrostatique : $\frac{\sigma^2}{2\epsilon_0} \vec{dS}$ démo : $\vec{\Pi}_E = \frac{dq}{ds} \left(\frac{\vec{E}}{2}\right) = \sigma \times \frac{1}{2} \frac{\sigma}{\epsilon_0} \vec{dS} = \frac{\sigma^2}{2\epsilon_0} \vec{dS}$

Pression magnétostatique : $\vec{J}_S \wedge \frac{\vec{B}}{2} dS = -\frac{1}{2} \mu_0 J_S^2 \vec{dS}$ démo : $\vec{\Pi}_B = \vec{J}_S \wedge \frac{\vec{B}}{2} = \frac{\mu_0}{2} \vec{J}_S \wedge (\vec{J}_S \wedge \vec{dS}) = -\frac{\mu_0}{2} J_S^2 \vec{dS}$

3.2.1 Réflexion

Sur un métal \perp : $\vec{E} = 2E_0 \sin kx \sin \omega t \vec{e}_y$ (onde stationnaire) démo : $E_t = 0$

MF : $\vec{B} = 2 \frac{E_0}{c} \cos kx \cos \omega t \vec{e}_z$

$\langle W_{em} \rangle_t = \epsilon_0 E^2$ (onde incidente : $W_{em} = \frac{1}{2} \epsilon_0 E_0^2$) démo : $W_{em} = \frac{1}{2} \epsilon_0 E^2 + \frac{1}{2\mu_0} B^2$

$\sigma = 0$ $\vec{J}_S = \frac{2E_0}{\mu_0} \cos \omega t \vec{e}_y$

pression de radiation ($\vec{B}' = \frac{\vec{B}}{2}$) : $P_m = \epsilon_0 E^2 \vec{e}_x$

Corpusculaire : photon : $\mathcal{E} = h\nu$ $\vec{p} = \frac{h\nu}{c} \vec{n}$ $W_{em} = N h\nu$ $\Delta \vec{p} = \frac{h\nu}{c} (\vec{n}_2 - \vec{n}_1)$ $\frac{d\vec{p}}{dt} \sim$ force

Isolant : $\sigma = 0$ et $\vec{J}_S = \vec{0}$ à l'interface \rightarrow continuité de \vec{E} et \vec{B}

Calcul de \vec{B} à partir de \vec{E} : MF : $\vec{\text{rot}} \vec{E} = -\frac{\partial \vec{B}}{\partial t}$ et vice versa avec MA

Calcul de \vec{J}_S et σ : avec $\vec{E} = \frac{\sigma}{\epsilon_0} \vec{n}$ et $\vec{B} = \mu_0 \vec{J}_S \wedge \vec{n}$

3.2.2 Propagation

$\vec{\Delta} \vec{E} - \frac{1}{c^2} \frac{\partial^2 \vec{E}}{\partial t^2} = \vec{0}$ $\vec{\Delta} \vec{B} - \frac{1}{c^2} \frac{\partial^2 \vec{B}}{\partial t^2} = \vec{0}$ démo : $\vec{\text{rot}} \vec{\text{rot}} \vec{A} = \vec{\text{grad}}(\text{div} \vec{A}) - \vec{\Delta} \vec{A}$

$\vec{B} = \vec{\text{rot}} \vec{A}$ $\vec{E} = -\vec{\text{grad}} V - \frac{\partial \vec{A}}{\partial t}$

Jauge de Lorentz : $\text{div} \vec{A} + \frac{1}{c^2} \frac{\partial V}{\partial t} = 0$ avec $\vec{\text{rot}} \vec{B} = \mu_0 \epsilon_0 \frac{\partial \vec{E}}{\partial t}$

OP : $F(u, v) = f(x, t)$; $\frac{\partial^2 f}{\partial x^2} - \frac{1}{c^2} \frac{\partial^2 f}{\partial t^2} = 0 \Leftrightarrow \left(\frac{\partial}{\partial x} - \frac{1}{c} \frac{\partial}{\partial t}\right) \left(\frac{\partial}{\partial x} + \frac{1}{c} \frac{\partial}{\partial t}\right) f = 0 \Leftrightarrow \frac{-4}{c^2} \frac{\partial^2 F}{\partial u \partial v} = 0$ avec $u = t - \frac{x}{c}$ et $v = t + \frac{x}{c}$

OP : $(\vec{k}, \vec{E}_0, \vec{B}_0)$: trièdre direct

Structure locale d'OP : la norme est \approx indép de r et $\vec{B} = \frac{1}{c} \vec{n} \wedge \vec{E}$

OPP : $\frac{\partial f}{\partial t} = -c \frac{\partial f}{\partial x}$ $A_x = \frac{V}{c} + \text{cst}$ (jauge de L) $\vec{E} \perp \vec{B}$ $B = \frac{E}{c}$

$\vec{\Pi} = \frac{E\vec{B}}{\mu_0} = \frac{1}{c\mu_0} E^2 \vec{n} = c\epsilon_0 E^2 \vec{n} = \frac{c}{\mu_0} B^2 \vec{n}$

$W_{em} \sim \frac{\text{énergie}}{\text{volume}} \sim \pi = \epsilon_0 E^2$ (pression) $\frac{\delta \vec{p}}{\delta t} = \pi d\Sigma \vec{n}$

$W_m = \epsilon_0 E^2 = \frac{B^2}{\mu_0}$ $\vec{\Pi} = c W_m \vec{n}$

Densité volumique de quantité de mvt : $\vec{g} = \epsilon_0 \vec{E} \wedge \vec{B}$

OPPMR : $\vec{E} = \vec{E}_0 \exp[i(\omega t - \vec{k} \cdot \vec{r})]$

$\langle \vec{\Pi} \rangle_t = \frac{1}{2\mu_0} E_0 B_0 = \frac{1}{2} c \epsilon_0 E_0^2$

$\frac{\partial}{\partial t} = i\omega$ $\vec{\nabla} = -i\vec{k}$ démo : $\frac{\partial}{\partial x} = \frac{-1}{c} \frac{\partial}{\partial t}$

Revenir en notation réelle pour calculer $\vec{\Pi}$ ou bien : $\langle \vec{\Pi} \rangle_t = \Re \left(\frac{1}{2\mu_0} \vec{E} \wedge \vec{B}^* \right)$

Milieux isolants : $\epsilon = \epsilon_r \epsilon_0$ et $\mu = \mu_r \mu_0$ $n = \sqrt{\epsilon_r \mu_r}$

Dispersion : $c' = \frac{c}{n}$ avec $n(\omega)$

OP : $\vec{\Pi} = \sqrt{\frac{\epsilon}{\mu}} E^2 \vec{n}$

Loi d'Ohm locale : $\vec{J} = \gamma \vec{E}$

Éq de propagation : $\vec{\Delta} \vec{E} - \mu_0 \gamma \frac{\partial \vec{E}}{\partial t} - \epsilon_0 \mu_0 \frac{\partial^2 \vec{E}}{\partial t^2} = \vec{0}$ $\vec{\Delta} \vec{B} - \mu_0 \gamma \frac{\partial \vec{B}}{\partial t} - \epsilon_0 \mu_0 \frac{\partial^2 \vec{B}}{\partial t^2} = \vec{0}$

démo : $\vec{J} = \gamma \vec{E}$, $\vec{\text{rot}} \vec{B} = \dots$, $\vec{\text{rot}} \vec{\text{rot}} \vec{B} = \dots$, $\vec{\text{rot}} \vec{E} = -\frac{\partial \vec{B}}{\partial t}$

Relation de dispersion : $k = f(\omega)$ avec l'éq de propagation en cplx

$k^2 = \epsilon \mu \omega^2 (1 - i \frac{\gamma}{\epsilon \mu})$

facteur de qualité : $Q = \frac{|\text{courant de déplacement}|}{|\text{courant de conduction}|} = \frac{|\epsilon \frac{\partial \vec{E}}{\partial t}|}{|\vec{J}|}$ $k^2 = k_0^2 (\epsilon_r \mu_r) (1 - \frac{i}{Q})$

att : a priori, $c \neq \frac{\omega}{k}$

Onde évanescence : onde stationnaire atténuée ($\Leftrightarrow k \in i\mathbb{R}$)

Effet de peau : $\delta = \sqrt{\frac{2}{\mu_0 \omega \gamma}}$ démo : relation de dispersion en négligeant le courant de déplacement en $(\frac{\partial \vec{E}}{\partial t}) \rightarrow E = \dots \times e^{x/\delta}$

Ds un plasma, γ avec : $\vec{J} = \gamma \vec{E} = \sum q_i v_i$

3.2.3 Rayonnement

Jauge de Lorentz : $\text{div } \vec{A} + \frac{1}{c^2} \frac{\partial V}{\partial t} = 0$

Éq des potentiels : $\Delta \vec{A} = \frac{1}{c^2} \frac{\partial^2 \vec{A}}{\partial t^2}$ $\Delta V = \frac{1}{c^2} \frac{\partial^2 V}{\partial t^2}$

Solution des potentiels retardés : $V(\vec{r}, t) = \frac{1}{4\pi\epsilon_0} \iiint_V \frac{\rho(\vec{r}', t-\frac{r}{c})}{r} d\tau$ $\vec{A}(\vec{r}, t) = \frac{\mu_0}{4\pi} \iiint_V \frac{\vec{J}(\vec{r}', t-\frac{r}{c})}{r} d\tau$

Dipôle oscillant : $q = q_0 e^{i\omega t}$ $\vec{s} = \overrightarrow{O_- O_+}$ $\vec{p} = q_0 e^{i\omega t} \vec{s}$

$\vec{A}(\vec{r}, t) = \frac{\mu_0}{4\pi r} \vec{p}$ (déf) $V(\vec{r}, t) = \frac{\cos\theta}{4\pi\epsilon_0} \left(\frac{p}{r^2} + \frac{\dot{p}}{rc} \right)$ (avec Lorentz et $\frac{\partial}{\partial z} = \frac{\partial_r}{\partial r} \frac{\partial_r}{\partial z} = \frac{\partial_r}{\partial r} \cos\theta$ ou déf)

$\vec{B}(\vec{r}, t) = \frac{\mu_0 \sin\theta}{4\pi} \left(\frac{\dot{p}}{r^2} + \frac{\ddot{p}}{rc} \right) \vec{e}_\varphi$ (avec $\vec{B} = \text{rot } \vec{A}$) $E_\theta = \frac{\sin\theta}{4\pi\epsilon_0} \left(\frac{p}{r^3} + \frac{\dot{p}}{r^2 c} + \frac{\ddot{p}}{rc^2} \right)$ (avec $\vec{E} = -\text{grad } V - \frac{\partial \vec{A}}{\partial t}$)

3.2.4 Propagation guidée

À l'intérieur du guide d'ondes : $\vec{E} = \vec{E}_0(x, y) \exp[i(\omega t - kz)]$ $\vec{B} = \vec{B}_0(x, y) \exp[i(\omega t - kz)]$ $\rho = 0, \vec{J} = \vec{0}$

$\vec{\nabla} = \left(\frac{\partial}{\partial x}, \frac{\partial}{\partial y}, -ik \right)$

Mq $E_{0x}, E_{0y}, B_{0x}, B_{0y}$ s'expriment en fonction de E_{0z} et B_{0z} et de leurs dérivées spatiales avec MF et MA

Écrire les éq de propagation ($\Delta E_z - \frac{1}{c^2} \frac{\partial^2 E_z}{\partial t^2} = 0$ et en B_z) en cplx

$$\frac{\partial^2 E_{0z}}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 E_{0z}}{\partial y^2} = \left(k^2 - \frac{\omega^2}{c^2} \right) E_{0z} \dots$$

Ondes transversales électriques : $E_{0z} = 0$; chercher une sol de l'éq de propagation ss la forme $B_{0z} = B_{00} X(x) Y(y)$

$$\frac{1}{x} \frac{d^2 X}{dx^2} + \frac{1}{y} \frac{d^2 Y}{dy^2} = -\left(\frac{\omega^2}{c^2} - k^2 \right) \Rightarrow \frac{1}{x} \frac{d^2 X}{dx^2} = \chi_x^2 \text{ et } \frac{1}{y} \frac{d^2 Y}{dy^2} = \chi_y^2 \text{ avec } \chi_x^2 + \chi_y^2 = \frac{\omega^2}{c^2} - k^2 \dots \chi_x = \frac{n\pi}{a} \dots$$

Conditions aux limites : $\vec{E}_t = \vec{0}, \vec{B}_n = \vec{0}, \vec{E} \wedge \vec{n} = \frac{\sigma}{\epsilon_0}, \vec{B} = \frac{1}{\mu_0} \vec{J}_s \wedge \vec{n}$

$$\vec{E} = E(x, y) e^{i(\omega t - kz)} \quad \text{div } \vec{E} = \vec{0} \Rightarrow E(x, y) = E(x) \quad \text{éq de propagation} \rightarrow \text{solution}$$

Modes propres : $l = p \frac{\lambda_p}{2}$ d'où $k_p = \frac{p\pi}{l}$

3.3 Optique

Suivant $\lambda(\text{nm})$: 0.4 (violet) – 0.56 (jaune) – 0.6 (rouge) – 0.8 : visible

γ – rayons X (10^{-10} m) – ultraviolet ... infrarouge – microondes – centimétrq – radio (> 1 km)

Réflexion : $\theta_i = \theta_r$ réfraction (loi de Descartes) : $n_1 \sin i_2 = n_2 \sin i_2$

continuité des composantes T et N \leftarrow Maxwell

Incidence Brewster : $\tan i_B = \frac{n_2}{n_1}$: seule la composante de $\vec{E} \perp$ au plan d'incidence est transmise par réflexion

Principe de Fermat $\rightarrow n_1 \vec{u}_1 - n_2 \vec{u}_2$ colli à \vec{N} démo : introduire O origine ds $dL = 0$ entre A_1 et A_2

Grossissement : $G = \frac{\alpha'}{\alpha}$ grandissement : $\gamma = \frac{A'B'}{AB}$

Relation de Lagrange-Helmoltz : $\gamma G = \frac{n'}{n}$

Stigmatisme : deux rayons entrant / sortent /

$$\text{pr deux rayons / : } L(B_0 B_i) - L(A_0 A_i) = \text{cst} = n_i \vec{u}_i \cdot \vec{A}_i \vec{B}_i - n_0 \vec{u}_0 \cdot \vec{A}_0 \vec{B}_0$$

Sinus d'Abbe (aplanétisme, vertical) : $n AB \sin \alpha = n' A' B' \sin \alpha'$

Condition de Hershell (stigmatisme longitudinal) : $n AC \sin^2 \frac{\alpha}{2} = n' A' C' \sin^2 \frac{\alpha'}{2}$

Objet / image réel / virtuel focale, plan focal

Lorsqu'on entre ds un milieux plus réfringent, le rayon se rapproche de la normale

Dioptré plan : $A'H = \frac{\tan i}{\tan r} AH \approx \frac{n_2}{n_1} AH$

Lame à faces parallèles : $AA' = e \left(\frac{n'-n}{n'} \right)$

Prisme : $A = r + r'$

déviation : (rayon entrant, sortant) $D = A - (i + i')$ angles faibles : $D = (n - 1)A$

condition d'émergence : $A - \lambda \leq r \leq \lambda$ avec $\sin \lambda = \frac{1}{n}$ et $A \leq 2\lambda$

Penser à : $\frac{a}{a'} = \frac{b}{b'} = \frac{a-b}{a'-b'}$

Focale : $f = \overline{HF}$ et $f' = \overline{HF'}$

$x = \overline{FA}, x' = \overline{F'A'}$ $p = \overline{HA} = f + x$

Vergence : $V = \frac{-n}{f} = \frac{n'}{f'}$ (convergente : $V > 0$)

Dioptré sphérique :

$$\frac{n'}{SA'} - \frac{n}{SA} = \frac{n'-n}{SC} \quad \gamma = -\frac{f}{x} = -\frac{x'}{f'} = \frac{n}{n'} \frac{SA'}{SA} \quad xx' = ff' \quad f' = \frac{n'}{n'-n} SC \quad \frac{f}{f'} = -\frac{n'}{n}$$

$$\frac{n'}{CA'} - \frac{n}{CA} = \frac{n'-n}{CS} \quad \gamma = \frac{n}{n'} \frac{CA'}{CA}$$

Lentille mince ($S_1 \approx S_2 \approx S$) :

$$\frac{1}{p'} - \frac{1}{p} = \frac{1}{f'} = (n-1) \left(\frac{1}{R_1} - \frac{1}{R_2} \right) \quad \gamma = \frac{-f}{x} = \frac{-x'}{f'} \quad xx' = ff' = -f'^2 \quad f = -f' \quad \frac{1}{f'} = (n-1) \left(\frac{1}{SC_1} - \frac{1}{SC_2} \right)$$

Formule de Gullstrand : $V = V_1 + V_2 - dV_1V_2 \quad (\Leftrightarrow \gamma G = \frac{n'}{n})$

Tracé des rayons :

- entre / à l'axe \rightarrow sort en passant par F' et vice-versa
- les rayons passant par O ne sont pas déviés
- des rayons / focalisent sur le plan focal image

Lunette réglée à l'infini : entre / \rightarrow sort /

Doublet (a, b, c) : deux lentilles : $\frac{f'_1}{a} = \frac{e}{b} = \frac{f'_2}{c}$

Plan principal objet : rayon horizontal \cap le rayon émergeant

Points principaux (H) : $\gamma = 1$, antiprincipaux (H^*) : $\gamma = -1$, nodaux : $G = 1$

Miroir : $n' = -n$ plan : $R = SC = \infty$

3.4 Interférences lumineuses

Source cohérente : $\Delta\varphi = \text{cst}$ \hat{m} source et $\delta \ll L$ (L : lg de cohérence)

$$I = \frac{1}{2} \langle \psi\psi^* \rangle$$

2 sources cohérentes : $I = I_1 + I_2 + 2\sqrt{I_1I_2} \cos\varphi \quad \hat{m} I_0 : I = 2I_0(1 + \cos\varphi)$

Visibilité (contraste) : $V = \frac{I_{\max} - I_{\min}}{I_{\max} + I_{\min}}$

Interfrange : $\varphi = 2\pi$ ou $\delta = \lambda$

Ordre d'interférence : $p = \frac{\delta}{\lambda_0}$

Onde sphérique : $\varphi = \frac{2\pi}{\lambda_0} \delta \quad \Delta\varphi = \vec{k} \cdot \overrightarrow{S_1S_2}$

op de \hat{m} amplitude : vecteur interférence : $\vec{K} = \vec{k}_2 - \vec{k}_1 \quad \varphi = \vec{K} \cdot \vec{r} \quad \text{interfrange} : i = \frac{\lambda}{2 \sin(\frac{\varphi}{2})}$

Utiliser le th de Malus

Loi de Malus : $I \propto \cos^2\theta$ (intensité lumineuse transmise)

Trous d'Young : $\delta = \frac{sX}{D} \quad i = \frac{\lambda D}{s} \quad (D \text{ "assez grand"})$

Interférence à 2 ondes de \hat{m} amplitude : $I = \frac{I_{\max}}{2} [1 + \cos(2\pi \frac{\delta}{\lambda})]$

Fente de largeur l : $I(M) = \frac{I_0}{l} \int_{-l/2}^{l/2} I dy$

Avec spectre : $I = \int_{\nu_{\text{inf}}}^{\nu_{\text{sup}}} k I_\nu(\nu) [1 + \cos(\frac{2\pi \delta \nu}{c})] d\nu$

caractère non monochromatique insensible si : $2\pi \delta \frac{\Delta\nu_{1/2}}{c} \ll 2\pi \quad \Delta\nu_{1/2} \ll \frac{c}{\delta} \quad \frac{\lambda^2}{\Delta\lambda_{1/2}} \gg \delta$

Modélisations du spectre de raies ($dI = k I_\nu(\nu) d\nu$) :

- rectangle

- lorentzienne : $I_\nu(\nu) = \frac{1}{1 + [2\pi\tau_c(\nu - \nu_0)]^2}$ (gaz à haute pression)

- gaussienne : $I_\nu(\nu) = \exp\left(-\frac{(\nu - \nu_0)^2}{2\sigma^2}\right)$ (effet Doppler)

sinc : $x \mapsto \frac{\sin x}{x}$ fonction d'Airy : $x \mapsto \frac{1}{1 + M \sin^2(\frac{x}{2})}$ poser $\sigma = \frac{1}{\lambda} = \frac{\nu}{c}$ (nombre d'onde)

$$\int_{-a}^a e^{ikx} dx = \left[\frac{e^{ikx}}{ik} \right]_{-a}^a = 2a \text{sinc } ka \quad \text{faire des changements de var pr s'y ramener} \quad \text{max pour } x \approx (2p + 1) \frac{\pi}{2}$$

Longueur de cohérence temporelle l_t : D qui annule la première fois la visibilité

Coef de réflexion (reste ds 1) : $r_{12} = \frac{\psi_r}{\psi_0} = \frac{n_1 - n_2}{n_1 + n_2}$ transmission : $t_{12} = \frac{2n_1}{n_1 + n_2}$

$T = t^2 \quad R = r^2$ pas de pertes : $T + R = 1$

\Rightarrow attention au déphasage de π si $r_{12} < 0$ (ex : air / verre)

Michelson : lame d'air (à l'infini) / coin d'air

Ondes transmises à travers une lame pleine : $\delta = 2ne \cos r$ lame d'air : $\delta \approx 2e \approx 2ax$

Lame pleine à l'infini : $I = \frac{I_{\max}}{1 + M \sin^2 \frac{\varphi}{2}} \quad \varphi = \frac{2\pi}{\lambda} 2ne \cos r$ anneaux : $\cos r = \frac{p\lambda}{2ne}$

figures d'interférence : avec $i \approx nr$ r_p avec $\cos r_p \approx 1 - \frac{r_p^2}{2}$ dans $\varphi = 2p\pi$

Anneaux de Newton : $\varphi = \frac{2\pi}{\lambda} 2e + \pi \quad e \approx \frac{\lambda^2}{2R}$

Réseau de N fentes en incidence normale à l'infini : $I(M) = NI_0 \left(\frac{\sin(N\frac{\varphi}{2})}{N \sin(\frac{\varphi}{2})} \right)^2$

Pouvoir de résolution (sépare les lg d'onde) : $PR = \frac{\lambda}{\Delta\lambda}$

Dispersion en différence de phase : $D_\varphi = \frac{d\varphi}{d\lambda}$

Battelements en intensité : utiliser $\cos a + \cos b = 2 \cos(\frac{a+b}{2}) \cos(\frac{a-b}{2})$

Principe de Huygens-Fresnel : diffraction : chaque pt atteint par une onde se comporte comme une src secondaire d'onde sphérique de m pulsation que l'onde incidente et d'amplitude proportionnelle ; rapidement \approx plane

$$\psi(P) = \iint_{\Sigma} \psi(M) Q \frac{\exp(i k R)}{R} dS \quad [Q] = L^{-1}$$

Diffraction de Fraunhofer : à l'infini + dioptre plan

$$R = \|\vec{MP}\| \approx r(1 - \frac{xX+yY}{r^2}) \quad r = \|\vec{OM}\| \quad M(x, y) \quad P(X, Y) \quad Q \text{ indép de } R \text{ (car } R \text{ grand)}$$

Transmittance du diaphragme : $t(x, y) = \frac{\psi(M)}{\psi_0}$

$$\psi(P) = \frac{Q}{R} \iint_{\Sigma} \psi_0 t(x, y) \exp(-i \vec{k} \cdot \vec{OM}) dx dy$$

$$\vec{k} \cdot \vec{OM} = \frac{2\pi}{\lambda}(ux + vy) \text{ avec } u = \frac{x}{r} \text{ et } v = \frac{y}{r} \quad \vec{k} = \frac{2\pi}{\lambda}(\frac{x}{r}\vec{e}_x + \frac{y}{r}\vec{e}_y + \frac{z}{r}\vec{e}_z)$$

Max relatif de lumière : $u_p = p \frac{\lambda}{a}$

Réseau la transmittance ($\in \mathbb{C}$) varie périodiquement

Déphasage de rayons arrivant / : $\varphi = \vec{k}_0 \cdot \vec{OM}$

Fente rectangulaire en diffraction : $I(M) = KI_0(ab)^2 \text{sinc}^2[\frac{\pi}{\lambda}(\alpha - \alpha_0)a] \text{sinc}^2[\frac{\pi}{\lambda}(\beta - \beta_0)b]$

Réseau de fentes / en transmission : $\psi(P) = K\psi_0 \iint t(x, y) \exp[-i(\vec{k} - \vec{k}_0) \cdot \vec{OM}] dx dy \quad \text{car } \psi(M) = \psi_0 e^{i\vec{k}_0 \cdot \vec{OM}}$

$$I = I_0 \text{sinc}^2[\frac{\pi a}{\lambda}(\sin \alpha - \sin \alpha_0)] \left[\frac{\sin(N\frac{\varphi}{2})}{\sin(\frac{\varphi}{2})} \right]^2$$

Formule des réseaux ($\varphi = 2\pi p$) :

- en transmission : $\sin \alpha - \sin \alpha_0 = p \frac{\lambda}{a} = pn\lambda$

- en réflexion : $\sin \alpha + \sin \alpha_0 = p \frac{\lambda}{a}$

a : distance entre 2 fentes n : nb de fentes par unité de lg

Dispersion angulaire : $\mathcal{D} = \frac{d\alpha}{d\lambda}$

Angle de déviation max : $D(\alpha_0) = \alpha - \alpha_0$ maximal $kn\lambda = 2 \sin(\frac{D_m}{2})$

4 Champs en $\frac{1}{r^2}$

$$\vec{F} = q(\vec{E} + \vec{v} \wedge \vec{B})$$

4.1 Électrostatique

$$\epsilon_0 \approx \frac{1}{36\pi 10^9} \text{ SI} \approx 8.85 \cdot 10^{-12} \text{ SI}$$

Charge volumique : $\rho = \frac{dq}{d\tau}$

Densité surfacique de charge : $\sigma = \frac{dq}{ds}$

Densité linéique de charge : $\lambda = \frac{dq}{dl}$

Conductivité γ : $\vec{J} = \gamma \vec{E}$ (loi d'Ohm locale)

Utiliser les symétries / antisymétries th de superposition

$$\text{Champ électrique : } \vec{E} = \frac{q}{4\pi\epsilon_0 r^2} \vec{u}_{AB}$$

Plan infini : $\vec{E} = \frac{\sigma}{2\epsilon_0} \vec{n}$

Disque : $E = \frac{\sigma}{2\epsilon_0}(1 - \cos \alpha)$

Le champ dérive d'un potentiel / la force dérive de l'énergie potentielle

$$\vec{E} = -\text{grad } V \quad (\text{exprimé ds le repère local en cyl})$$

Circulation : $dC = \vec{E} \cdot d\vec{l} = -dV \quad C = -\Delta V$

Potentiel électrostatique : $V = \frac{q}{4\pi\epsilon_0 r} + \text{cst}$ diverge lorsqu'il y a des charges à l'infini

Énergie potentielle électrostatique : $\mathcal{E}_p = qV$

$$\delta W = -d\mathcal{E}_p = -q dV$$

Les lignes de champ sont perpendiculaires aux surfaces équipotentielles, dans le sens des potentiels décroissants

Flux de \vec{E} : $d\Phi = \vec{E} \cdot d\vec{S}$

Pour une charge ponctuelle : $d\Phi = \frac{Q}{4\pi\epsilon_0} d\Omega$

Théorème de Gauss : flux à travers une surface fermée : $\Phi = \frac{Q_{\text{int}}}{\epsilon_0}$ ($\Phi_{\vec{g}} = 4\pi GM_{\text{int}}$)

$\Rightarrow \oint_{\Sigma} d\vec{S} \cdot \vec{E} = \frac{Q}{\epsilon_0} \rightarrow E \rightarrow V + \text{cst}$ (cst : par continuité / par le potentiel en O)

Théorème de Gauss local (éq de Poisson) : $\text{div } \vec{E} = \frac{\rho}{\epsilon_0}$ $\Delta V + \frac{\rho}{\epsilon_0} = 0$

Unicité de la solution à l'éq de Laplace ($\Delta V = 0$)

$\Delta f = \left(\frac{\partial^2 f}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 f}{\partial y^2} + \frac{\partial^2 f}{\partial z^2} \right)_{\text{cart}} = \left(\frac{1}{r} \frac{\partial}{\partial r} \left(r \frac{\partial f}{\partial r} \right) + \frac{1}{r^2} \frac{\partial^2 f}{\partial \theta^2} + \frac{\partial^2 f}{\partial z^2} \right)_{\text{cyl}}$

chercher les sol ss la forme : $V(r, \theta) = f(r)g(\theta)$ svt : $f(r) = Cr^\alpha$

Méthode des images électriques : placer des autres charges pour "simuler" une équipot (métal)

charge q en B , sphère (O, R) $V = 0 \Leftrightarrow -\lambda q$ placée en A tq : $d = OA = \frac{R^2}{OB}$ et $\lambda = \frac{R}{d}$

Lignes de champ : $\vec{E} = K d\vec{l} \Leftrightarrow \frac{dr}{E_r} = \frac{rd\theta}{E_\theta}$

Équipotentielles : $V = \text{cst}$ ou $\vec{E} \cdot d\vec{l} = 0$

Lorsqu'on traverse une surface chargée, discontinuité du champ normal : $\vec{E}_2 - \vec{E}_1 = \frac{\sigma}{\epsilon_0} \vec{n}_{12}$

Th de Coulomb : $\vec{E} = \frac{\sigma}{\epsilon_0} \vec{n}_e$ ($\Rightarrow \sigma = \epsilon_0 \vec{E} \cdot \vec{n}_e$)

Positions de Gauss : intersection avec les axes ($\theta = \frac{\pi}{2}$)

Taylor de $\frac{1}{r}$ au voisinage de O :

- distribution pôlaire : $V = \frac{Q}{4\pi\epsilon_0 r}$ et $\vec{E} = \frac{Q}{4\pi\epsilon_0 r^2} \vec{u}_{GM}$

- distribution dipolaire ($\sum_i p_i = 0$ et $G_- \neq G_+$) : $V = \frac{1}{4\pi\epsilon_0} \frac{\vec{P} \cdot \vec{OM}}{OM^3}$

- distribution quadripolaire ($\sum_i p_i = 0$ et $G_- = G_+$) : calculer AM^2 puis $\frac{1}{AM} = \left(AM^2 \right)^{-1/2}$, faire un DL

Énergie potentielle (W pr amener les charges à l' ∞) : $W_{\text{elec}} = \frac{1}{2} \sum_i q_i V_i$ (V_i : V en i par les $q_{i \neq j}$)

$W_{\text{elec}} = \frac{1}{2} \iiint_V \rho V d\tau = \frac{\epsilon_0}{2} \iiint E^2 d\tau$

Dipôles électrostatiques :

Moment dipolaire : $\vec{P} = Q\vec{G}_- \vec{G}_+$

$V = \frac{\vec{P} \cdot \vec{r}}{4\pi\epsilon_0 r^3} = \frac{Q G_- G_+ \cos \theta}{4\pi\epsilon_0 r^2}$ $\vec{E} = \left(\frac{2P \cos \theta}{4\pi\epsilon_0 r^3}, \frac{P \sin \theta}{4\pi\epsilon_0 r^3} \right)$

Écriture intrinsèque : $\vec{E} = \frac{1}{4\pi\epsilon_0} \left(\frac{3(\vec{P} \cdot \vec{r})\vec{r} - \vec{P}r^2}{r^5} \right)$

Énergie potentielle du dipôle : $W_d = Q(V_A - V_B) = -\vec{P} \cdot \vec{E}$

Force exercée par le champ sur le dipôle : $\vec{F} = (\vec{P} \cdot \text{grad}) \vec{E}$

Énergie propre (de formation) : $W = \frac{-Q^2}{4\pi\epsilon_0 AB}$

Champ électrique sur le dipôle :

- force résultante nulle : $\vec{F} = q\vec{E}_0 - q\vec{E}_0 = \vec{0}$

- couple de moment qui tend à aligner \vec{P} sur \vec{E} : $\vec{\Gamma} = \vec{P} \wedge \vec{E}$ ($\vec{\Gamma} \rightarrow 0$)

Pression électrostatique : $d\vec{F} = \frac{\sigma^2}{2\epsilon_0} d\vec{S}$ (car $d\vec{F} = dq \vec{E}$)

Capacité d'un condensateur : $C = \frac{Q}{U}$ ($U = \Delta V$) avec $V_1 - V_2 = \int_{r_1}^{r_2} \vec{E} \cdot d\vec{r}$

Condensateur plan : $C = \frac{\epsilon_0 S}{d}$

Association de C : série : $C = \sum_k \frac{1}{C_k}$ / / : $C = \sum_k C_k$

$\mathcal{E}_p = \frac{1}{2} \frac{Q^2}{C} = \frac{1}{2} QV = \frac{1}{2} CV^2$ (car $d\mathcal{E}_p = \frac{q dq}{C}$)

4.2 Magnétostatique

$\text{div } \vec{B} = 0$ $\text{rot } \vec{B} = \mu_0 (\vec{J} + \epsilon_0 \frac{\partial \vec{E}}{\partial t})$

Jauge de Coulomb : $\text{div } \vec{A} = 0$

\Rightarrow éq de Laplace : $\Delta \vec{A} + \mu_0 \vec{J} = \vec{0}$

Potentiel vecteur : $\vec{A}(M) = \frac{\mu_0}{4\pi} \iiint \frac{\vec{J}(P)}{\|\vec{PM}\|} d\tau$ diverge lorsqu'il y a des courants à l'infini

Circuit filiforme ($\vec{J} d\tau \rightarrow I d\vec{l}$) : $\vec{A}(M) = \frac{\mu_0}{4\pi} \int_C \frac{I d\vec{l}}{\|\vec{PM}\|}$

Si \vec{B} est uniforme : $\vec{A}(M) = \frac{\vec{B} \wedge \vec{OM}}{2}$

Calculer \vec{A} avec $\iint_{\Sigma} \vec{B} \cdot \vec{dS} = \iint_{\Sigma} \text{rot } \vec{A} \cdot \vec{dS} = \oint \vec{A} \cdot \vec{dl}$ sur $(r \rightarrow r + dr) \times h$

$$\vec{B} = \text{rot } \vec{A} = \frac{\mu_0}{4\pi} \iiint \frac{\vec{J}(P) \wedge \vec{u}}{r^2} d\tau$$

filiforme : relation de Biot et Savart : $\vec{B} = \frac{\mu_0 I}{4\pi} \int_C \frac{\vec{dl} \wedge \vec{u}}{r^2}$

$$\vec{B}_e - \vec{B}_i = \mu_0 \vec{J}_S \wedge \vec{n}_e$$

Perpendiculaire au plans de sym, / aux plans d'antisym

Pour les \int poser : $\frac{z}{x} = \tan \alpha$

Utiliser des syst équivalents pour les conducteurs (images magnétiques)

DL de \vec{B} : parité, $\text{div } \vec{B} = 0$ (calculer le flux de \vec{B}) et $\text{rot } \vec{B} = \mu_0 \vec{J} = 0$

Trièdre direct : $\vec{B}, \vec{I}, \vec{AM}$ règle de la main droite

Théorème d'Ampère : $\oint_C \vec{B} \cdot \vec{dl} = \mu_0 \iint_{\Sigma} \vec{J} \cdot \vec{dS} = \mu_0 I$

$\text{div } \vec{B} = 0 \Rightarrow$ flux conservatif

Fil rectiligne infini : $B = \frac{\mu_0 I}{2\pi r}$

Segment : $B = \frac{\mu_0 I}{4\pi r} (\sin \alpha_B - \sin \alpha_A)$

Spire de courant : $B = \frac{\mu_0 I}{2R} \sin^3 \alpha$ (pt d'inflexion à $\pm \frac{R}{2}$)

Solénoïde : $B = \frac{\mu_0 IN}{2} (\cos \alpha_1 - \cos \alpha_2)$ infini : $B = \mu_0 IN$

Ruban : $B = \frac{\mu_0 J_S}{\pi D} \sin \alpha$

Plan infini : $\vec{B} = \frac{1}{2} \mu_0 \vec{J}_S \wedge \vec{n}$

En rotation : $dI = dq \frac{\omega}{2\pi}$

Dipôles magnétiques :

Moment magnétique : $\vec{M} = \iint_{\Sigma} I \vec{dS}$ $\vec{M} = \frac{1}{2} \sum_i \vec{r}_i \wedge (q_i \vec{v}_i)$

$$d\vec{M} = \frac{\vec{OP} \wedge \vec{J} d\tau}{2} = \frac{\vec{OP} \wedge \vec{dl}}{2} \quad \text{démô : } d\vec{S} = \frac{1}{2} \vec{OP} \wedge d\vec{OP}$$

$\vec{A}(M) = \frac{\mu_0}{4\pi} \frac{\vec{M} \wedge \vec{r}}{r^3}$ (avec la formule de Kelvin)

$$\vec{B} = -\text{grad} \left(\frac{\mu_0}{4\pi} \frac{\vec{M} \cdot \vec{r}}{r^3} \right) \quad \vec{B} = \left(\frac{2\mu_0 M \cos \theta}{4\pi r^3}, \frac{\mu_0 M \sin \theta}{4\pi r^3} \right)_{\text{cyl}} \quad \vec{B} = \frac{\mu_0}{4\pi r^3} [3(\vec{M} \cdot \vec{r})\vec{r} - \vec{M}r^2]$$

$\mathcal{E}_p = U_L = -\vec{M} \cdot \vec{B}$ force : $\vec{F} = -\text{grad } U_L = (\vec{M} \cdot \text{grad}) \vec{B}$

Moment sur le dipôle : $\vec{\Gamma} = \vec{M} \wedge \vec{B}$

Force de Lorentz : $\vec{F} = q(\vec{E} + \vec{v} \wedge \vec{B})$ $\frac{d\mathcal{P}_L}{dt} = \vec{J} \cdot \vec{E}$

Éq locale de Poynting : $\frac{\partial W_{em}}{\partial t} + \text{div } \vec{\Pi} = -\vec{J} \cdot \vec{E}$ W_{em} : densité volumiq d'énergie magnétiq $\vec{\Pi}$: vecteur de Poynting

$W_{em} = \frac{1}{2} \epsilon_0 E^2 + \frac{1}{2\mu_0} B^2$ $\vec{\Pi} = \frac{1}{\mu_0} \vec{E} \wedge \vec{B}$ avec $\text{div}(\vec{E} \wedge \vec{B}) = \vec{B} \cdot \text{rot } \vec{E} - \vec{E} \cdot \text{rot } \vec{B}$

$$\mathcal{P} = \iint \vec{\Pi} \cdot \vec{dS}$$

Penser à : $\vec{J} = \gamma \vec{E}$

Énergie magnétique : $W_m = \frac{1}{2\mu_0} \iiint B^2 d\tau = \frac{1}{2} \iiint \vec{J} \cdot \vec{A} d\tau$ avec $\text{div}(\vec{A} \wedge \vec{B}) = \dots$

Force de Laplace : $\vec{df} = \vec{J} \wedge \vec{B} d\tau = I \vec{dl} \wedge \vec{B}$ att : orientation de \vec{dl}

2 circuits : $\vec{F}_{1 \rightarrow 2} = -\frac{\mu_0 I_1 I_2}{4\pi} \oint_{C_1} \oint_{C_2} \frac{(\vec{dl}_1 \cdot \vec{dl}_2) \vec{M}_1 \vec{M}_2}{\|\vec{M}_1 \vec{M}_2\|^3}$

2 fils infinis / : $\vec{f}_{1 \rightarrow 2} = -\frac{\mu_0}{4\pi R} I_1 I_2 \vec{e}_r$

déf de l'Ampère : lorsque $R = 1$ m et $I_1 = I_2 = 1$ A, $\vec{f}_{1 \rightarrow 2} = 10^{-7}$ N $\Rightarrow \mu_0 = 4\pi \cdot 10^{-7}$ SI

Pression magnétostatique : $P_m = \frac{1}{2\mu_0} B^2 = \frac{1}{2} \mu_0 \vec{J}_S^2$

démô : $\vec{B}'_2 - \vec{B}'_1 = \mu_0 \vec{J}_S \wedge \vec{n}$, $\vec{B}'_2 = -\vec{B}'_1$, $\vec{B} = \vec{B}' + \vec{B}''$, $\vec{0} = \vec{B}' + \vec{B}''_1$, $\vec{B}' = \frac{1}{2} \mu_0 \vec{J}_S \wedge \vec{n}$

Travail des forces de Laplace : $W_L = I \phi_C = I \iint \vec{B} \cdot \vec{dS}$ ϕ_C : flux coupé $d\phi_C = \vec{B} \cdot \vec{dS}$ $\vec{dS} = (\vec{dr} \wedge \vec{dl})$

Théorème de Maxwell : $W_L = I(\phi_2 - \phi_1)$ démô : $\text{div } \vec{B} = 0$ att : orientation de la normale

Énergie potentielle : $U_L = -I\phi$ volumique : $U_L = -\iiint \vec{J} \cdot \vec{A} d\tau$

$$dW_L = -dU_L \quad U_L = -\vec{M} \cdot \vec{B} \quad \vec{\Gamma} = \vec{M} \wedge \vec{B}$$

$$F_x = \frac{\partial W}{\partial x} = I \frac{\partial \phi}{\partial x} \quad \Gamma = \frac{\partial W}{\partial \theta} = I \frac{\partial \phi}{\partial \theta}$$

Coef d'inductance mutuelle M : $\phi_{1 \rightarrow 2} = MI_1$ $U_L = -MI_1 I_2$ $M = \frac{\mu_0}{4\pi} \oint_{C_1} \oint_{C_2} \frac{\vec{dl}_1 \cdot \vec{dl}_2}{r_{12}}$

Force électromotrice : $e = \oint \vec{E} \cdot d\vec{l}$

C fixe dans \vec{B} variable (induction de Neumann) : loi de Lenz : $e = -\frac{d\phi}{dt}$ démo : MF

C mobile dans \vec{B} uniforme (induction de Lorentz) : $e = -\frac{d\phi_C}{dt}$

Cas général : champ électromoteur : $\vec{E}_m = \vec{v} \wedge \vec{B} - \frac{\partial \vec{A}}{\partial t}$ $e = \oint \vec{E}_m \cdot d\vec{l}$

Coefficient d'autoinductance : $\phi_p = LI$ circuit infini, etc : L avec $W_m = \frac{1}{2}LI^2 = \frac{1}{2\mu_0} \iiint B^2 d\tau$

Pr un circuit filiforme : $W_m = \frac{1}{2}\phi I$ $W_m = \frac{1}{2} \sum_i I_i \phi_{j \rightarrow i}$

Deux circuits couplés : $k = \frac{M}{\sqrt{L_1 L_2}}$ $-1 < k < 1$ démo : $W_m = \frac{1}{2}\phi_1 I_1 + \frac{1}{2}\phi_2 I_2 \geq 0$

Couplage électromécanique : 1 éq électrique ($U = RI$) + 1 éq mécanique (TRC, TMC)

éq méca avec la puiss : $J\dot{\omega} \times \omega = P_c = -ei$

Quantité d'électricité induite : $q_{ind} = -\frac{1}{R}(\phi_2 - \phi_1)$

5 Atomistique

Énergie d'un photon : $w = h\nu = \frac{hc}{\lambda}$

Longueur d'onde : $\lambda = \frac{h}{p} = \frac{h}{mv}$ quantité de mvt : $p = \frac{h\nu}{c}$

Force exercée sur l' e^- : $F = ma = m\frac{v^2}{r} \rightarrow \mathcal{E}_m = \mathcal{E}_c + \mathcal{E}_p = \frac{-e^2}{8\pi\epsilon_0 r}$

Condition de quantification (sur le moment cinétique) : $L = mvr = n\hbar$

Rayon de l'orbite n : $r = n^2 \frac{\epsilon_0 \hbar^2}{\pi m e^2} = n^2 r_0$ rayon de Bohr : $r_0 \approx 5 \cdot 10^{-11}$ m

Relation de Rydberg : $\sigma = \frac{1}{\lambda} = R_y \left(\frac{1}{n^2} - \frac{1}{m^2} \right)$

$R_y = \frac{me^4}{8\epsilon_0^2 \hbar^3 c} \approx 1.1 \cdot 10^{-7} \text{ m}^{-1}$

$E_0 = hcR_y \approx 13.6 \text{ eV}$

Règle de Slater : énergie de l'électron : $E = \frac{(z - \sum \sigma)^2}{n^2} E_0 = -13.6 \left(\frac{Z_{eff}}{n} \right)^2 \text{ eV}$

rayon de l'orbitale : $r = \frac{n^2}{Z_{eff}} a_0$ $a_0 \approx 53 \text{ pm}$

$$\sigma_{21} \approx \begin{cases} 0 & \text{si } n_2 > n_1 \\ 0.35 & \text{si } n_2 = n_1 \\ 0.85 & \text{si } n_2 = n_1 - 1 \\ 1 & \text{si } n_2 \ll n_1 \end{cases}$$

Principe d'incertitude d'Heisenberg : $\Delta x \Delta p_x \geq \hbar$

Équation de Schrödinger : $\mathcal{H}\Psi = \frac{\hbar^2}{2m} \Delta \Psi + \mathcal{E}_p \Psi = \mathcal{E}_m \Psi$ ($\mathcal{E}_m = \mathcal{E}_c + \mathcal{E}_p$ avec $x \leftrightarrow \cdot x$ et $p_x \leftrightarrow i\hbar \frac{\partial}{\partial x}$)

Quantité d'énergie (probabilité de présence) : $E = |\Psi|^2 = \Psi\Psi^*$

n : nb quantique principal l : nb quantique orbital m : nb quantique magnétique

Énergie : $E = \frac{E_0}{n^2}$ moment cinétique : $L = \hbar \sqrt{l(l+1)}$

$n \geq 1$ $0 \leq l < n$ $-l \leq m \leq l$ spin des e^- : $\frac{1}{2}$ ou $-\frac{1}{2}$

Couche : suivant l : S P D F (ex : $n = 3, l = 1$: couche 3p)

Remplissage suivant les niveaux d'énergie : règle de Klechkowski

e^- de valence : e^- de n max + couches incomplètes

2 premières exceptions : Cr ($Z = 24, \dots 4s^1 3d^5$) Cu ($Z = 29, \dots 4s^1 3d^{10}$)

6 Chimie

| | | | | | | | |
|----|----|----|----|---|---|----|----|
| H | | | | | | | He |
| Li | Be | B | C | N | O | F | Ne |
| Na | Mg | Al | Si | P | S | Cl | Ar |

$aA + bB \rightleftharpoons cC + dD$

Loi d'action de masse : $\frac{a_c^c a_d^d}{a_a^a a_b^b} = K_T^0$

Activité : solide : 1, gaz : pression partielle en bars, liquide : concentration

Air $\approx \frac{4}{5}N_2 + \frac{1}{5}O_2$ ne pas oublier les gaz inertes ds les bilans

Conductivité : $\gamma = \gamma_+ + \gamma_- = (\alpha a_0) \mathcal{F} xp(k_+ + k_-)$

(avec α : taux de dissociation, x : coefficient stœchiométrique, p : charge, k_{\pm} : mobilité)

Conductivité équivalente : $\Lambda_{\infty} = \mathcal{F}k$

Conductance : $\sigma = k\gamma \approx \gamma \frac{S}{T} \sim \frac{1}{R}$
 $\gamma = \sum \lambda_i c_i$ $\lambda_i \approx \lambda_{0i}$: conductivité molaire ($\Omega^{-1} \text{cm}^{-1} \text{mol}^{-1}$) $1 \text{ S} = 1 \Omega^{-1}$

Densité : $d = \frac{\rho}{\rho_{\text{air}}} = \frac{M}{M_{\text{air}}} \approx \frac{M}{29}$ (avec M en $\text{g} \cdot \text{mol}^{-1}$)

Volume molaire partiel : $v_i = \left(\frac{\partial V}{\partial n_i} \right)_{T,P,n_{j \neq i}}$

Mésomères (plusieurs struct de Lewis) :

- règle de l'octet (8 e⁻ max sur la couche périph)
- charges formelles minimales

Insaturation : $\frac{1}{2}(2n_{IV} + n_{III} - n_I + 2 + z)$

AX_nE_p (n doublets liants, p doublets non liants) → linéaire, coudée, tétraédrique, bipyramidal

À l'équivalence : $\frac{[A]}{a} = \frac{[B]}{b}$

$aA + bB \rightarrow cC + dD$ produit ionique : $K = \frac{[C]^c[D]^d}{[A]^a[B]^b}$

ex : $\text{AgCl} \rightleftharpoons \text{Ag}^+ + \text{Cl}^-$

Produit ionique (= cste d'équilibre de la réaction) : $PI = [\text{Ag}^+][\text{Cl}^-]$

Si précipité en solution : $PI = K_s$, sinon : $PI < K_s$

Solubilité : $s = -\log K_s$

6.1 Cristallographie

| | | | |
|---------------|---|---|-----|
| cubique | p | i | f |
| quadratique | p | i | |
| hexagonal | | | |
| orthorombique | p | c | i f |
| monoclinique | p | c | |
| romboédrique | | | |
| triclinique | | | |

p : primitif c : 2 faces centrées i : centré f : faces centrées

Cristaux : métallique ionique covalent moléculaire

Coordinance : nb de voisins (12 max)

Compacité (τ ou C) : $\tau = \frac{\text{vol occupé par les atomes}}{\text{vol de la maille}}$

$V = (a \times b)c$ $\rho = \frac{MZ}{VN_a}$

Hexagonal compact : $h = a\sqrt{\frac{2}{3}}$ $\tau = 0.74$ $c = 12$

Cubique à faces centrées : $l = a\frac{\sqrt{2}}{4}$ $\tau = 0.74$ $c = 12$

Cubique centré : $\tau = 0.68$

Sites : tétraédriques, octaédriques

$2r_- \leq a = k(r_+ + r_-)$

Structures :

- silicium et diamant : cfc + 1 site T sur 2 occupé
- graphite : plans d'hexagones (2^e décalé)
- CsCl : Cl⁻ cubique simple, Cs⁺ au centre du cube
- NaCl : Cl⁻ cfc, Na⁺ ds ts les sites O (ou vice versa)
- blende (ZnS) : S²⁻ cfc, Zn²⁺ ds 1 site T sur 2
- fluorine (CaF₂) : Ca²⁺ cfc, F⁻ ds ts les sites T

6.2 Cinétique chimique

$aA + bB \rightarrow cC + dD$

Degré d'avancement du réacteur : $d\eta = -\frac{dn_A}{a} = \frac{dn_C}{c}$

Vitesse de réaction : $R = \frac{d\eta}{dt}$

Vitesse spécifique : $r = \frac{R}{V}$

Si $V = \text{cst}$, $r = -\frac{1}{a} \left(\frac{d[A]}{dt} \right)_R$

$\dot{\eta} = k \cdot f([A], [B], \dots)$ k : cste de vitesse

Relation d'Arrhénius : $k_{(T)} = A e^{-\frac{E_a}{RT}}$ avec E_a : énergie d'activation ($\text{J} \cdot \text{mol}^{-1}$) et A : facteur de préexponentiel

Réaction ordonnée : $r = k[A]^{\alpha_A}[B]^{\alpha_B}$ avec α_A : ordre partiel, $\alpha_A + \alpha_B$: ordre total

Si $\alpha_A = a$ et $\alpha_B = b$, la réaction suit la règle de Vant'hoff (réaction élémentaire)

Souvent : $-\frac{1}{a} \frac{d[A]}{dt} = k[A]^a[B]^b$

AEQS (principe de Bodenstein) : $\frac{d[X]}{dt} = 0 \Rightarrow [X] = \dots$

Faire un bilan de matière

Réaction rapide : équilibre atteint : $K = \frac{k_1}{k_{-1}}$

Mesure de l'ordre total :

- on se met ds les proportions stoech $\rightarrow r = k'[A]^{\alpha_A + \alpha_B}$
- dégénérescence de l'ordre : $[B] \approx \text{cst}$ avec $[B] \gg [A]$, très concentré

| | | | | | |
|-----------|-----|---------------|----------|-----------------|-------------------|
| Ordre | 0 | $\frac{1}{2}$ | 1 | 2 | 3 |
| Évolution | [R] | $\sqrt{[R]}$ | $\ln[R]$ | $\frac{1}{[R]}$ | $\frac{1}{[R]^2}$ |

6.3 Réaction acide-base

$K_e = [\text{H}_3\text{O}^+][\text{HO}^-] = 10^{-14}$ à 25 ° C

$K_a = \frac{[\text{A}^-][\text{H}_3\text{O}^+]}{[\text{AH}]}$ $pK_a = -\log K_a$

$K_b = \frac{K_e}{K_a}$

Équations : conservation, équilibre, (électroneutralité,) zéro protonique

Monocacide : $[\text{AH}] = a_0 \frac{h}{h+K_a}$

Diacide : $[\text{AH}_2] = a_0 \frac{h^2}{h^2+h \cdot K_{a1}+K_{a1} \cdot K_{a2}}$

Acide fort : $pH \approx -\log a_0$ / faible : $h \approx \frac{K_e}{h} + \frac{a_0 \cdot K_a}{h+K_a}$

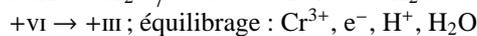
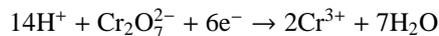
Prédominance : $pH < pK_a - 1$ / $pH > pK_a + 1$

6.4 Oxydo-réduction

$\mathcal{F} = 96500 \text{ C}$

Nombre d'oxydation : $\Sigma \text{n.o.} = \text{charge de la molécule}$, O : -II (péroxydes -O-O- : -I par O), H : +I (hydrures : -I)

Oxydant : capte des électrons (grand n.o., grand E^0)



$dU = TdS - PdV + \phi dq$

Potentiel électrochimique : $\bar{\mu}_i = \mu_i + \phi z \mathcal{F}$

Affinité électrochimique : $\bar{\mathcal{A}} = -\sum v_i \bar{\mu}_i$ équilibre : $\bar{\mathcal{A}} = 0$

$\phi_2 - \phi_1 = \frac{\mu_{\text{e}^-(2)} - \mu_{\text{e}^-(1)}}{\mathcal{F}}$

Électrodes :

- 1^{re} espèce : Ag / Ag⁺

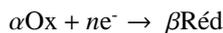
- 2^e espèce : Hg / Hg₂Cl₂ / K⁺, Cl⁻ (au calomel : ECS : $E^0 = 241 \text{ mV}$)

- 3^e espèce : Pt / Fe²⁺ / Fe³⁺

Piles : $\ominus \text{Pt} | \text{Ox}_1, \text{Red}_1 : \text{Ox}_2, \text{Red}_2 | \text{Pt} \oplus$

$E^0(\text{Ox}/\text{Réd}) = K^0(\text{Ox}/\text{Réd}) - K^0(\text{H}_3\text{O}^+/\text{H}_2)$ convention : $E^0(\text{H}_3\text{O}^+/\text{H}_2) = 0$

$\delta W_{\text{elec}} = \Delta E dq$ $dG_{T,P} = -Edq$



Relation de Nernst :

$E = E^0 + \frac{RT}{n\mathcal{F}} \ln \left(\frac{a_{\text{Ox}}^\alpha}{a_{\text{Réd}}^\beta} \right)$

$E = E^0 + \frac{0.059}{n} \log \left(\frac{a_{\text{Ox}}^\alpha}{a_{\text{Réd}}^\beta} \right)$ $\frac{RT}{\mathcal{F}} \ln 10 \approx 0.059$

$\Delta_r \tilde{g} = -n\mathcal{F}E$ $\Delta_r \tilde{g}^0 = -n\mathcal{F}E^0$ $\Delta_r G^0 = \Delta_r(\Delta_r \tilde{g}_i^0)$

$\Delta_r S^0 = -\frac{d\Delta_r G^0}{dT} = n\mathcal{F} \frac{dE^0}{dT}$ $\Delta_r H^0 = \Delta_r G^0 + T\Delta_r S^0$ ou avec : $-\frac{\Delta_r H^0}{T^2} = \frac{d}{dT} \left(\frac{\Delta_r G^0}{T} \right)$

Coefficient de température : $\frac{dE^0}{dT}$

$$n_1 \text{Red}_2 + n_2 \text{Ox}_1 \rightleftharpoons n_1 \text{Ox}_2 + n_2 \text{Red}_1$$

$$dq = n_1 n_2 \mathcal{F} d\xi \quad \Delta_r G = -n_1 n_2 \mathcal{F} \Delta E$$

$$\Delta_r G^0 = \Delta_r(\Delta_r \tilde{g}_i^0) = -RT \ln K_T^0$$

Énergie récupérable : $\mathcal{T} = \Delta_r G^0$

Oxydation anodique (\ominus) / réduction cathodique (\oplus)

Référence : $E_{\text{H}^+/\text{H}_2}^0 = 0 \quad E^0(\text{H}_2\text{O}/\text{H}_2) = 1.23 \text{ V}$

Tous les couples d'une même solution sont, à l'équilibre, au même potentiel

"Chasles" avec les E^0 : $6E^0(\text{v}/\text{i}) = 5E^0(\text{v}/\text{o}) + E^0(\text{o}/\text{i}) \quad (\text{linéarité des } \Delta_r \tilde{g}^0)$

Pile \approx générateur de tension

Fém : $E = E_+ - E_- = E_+^0 - E_-^0 - \frac{0.06}{n} \log Q \quad \text{où } Q = \prod a_i^{v_i}$

Pile à l'équilibre : $\Delta E = 0$

Cste d'équilibre : $\Delta_r G^0 + RT \ln K_T^0 = 0$ donc $E^0 = \frac{0.06}{n} \log K_T^0$

$pH = -\log[\text{H}_3\text{O}^+]$

Diagrammes E / pH : $E = E^0 - 0.06 \frac{p}{n} pH + \frac{0.06}{n} \log \frac{a_{\text{Ox}}^\alpha}{a_{\text{Red}}^\beta}$

convention 1 : $\hat{m} [\text{c}] \quad \text{convention 2 : équi-répartition} \quad \text{att : ex : } c_0 = [\text{Cl}^-] + 2[\text{Cl}_2]$

- immunité : H_2O n'oxyde pas le métal
- corrosion : métal oxydé par H_2O
- passivation : le métal est protégé par un oxyde ou un hydroxyde

Dismutation : ex : $X_{\text{II}} \rightarrow X_{\text{I}} + X_{\text{III}} \rightarrow$ stabilité avec K_T^0

Diagrammes E / pH : il ne peut y avoir de domaines disjoints

Électrolyse : $U \geq U_{\text{min}} = \frac{\Delta_r G}{n\mathcal{F}}$

6.5 Diagrammes binaires

On représente : à P fixée : $T = f_1(x_i^l)$ et $T = f_g(x_i^g)$ à T fixée...

Variance : $v = 4 - \varphi$

Mélange parfait de gp : loi de Raoult : $P_i = x_i^l P_A^{\text{sat}}(T)$

Coeff d'activité :

- réf corps pur ($x \rightarrow 1$) : $P = \gamma x P^{\text{sat}}$ (loi de Raoult)
- réf soluté infiniment dilué ($x \rightarrow 0$) : $P = \gamma x k$ (k : cste d'Henry)

Courbe d'ébullition :

- iso- T : $P = P_B^{\text{sat}}(T) + x_A^l [P_A^{\text{sat}}(T) - P_B^{\text{sat}}(T)]$: droite loi de Raoult $\rightarrow P = x_A^l P_A^{\text{sat}}(T) + x_B^l P_B^{\text{sat}}(T)$
- iso- P : avec Clapeyron (hyp : g.p., $v_l \ll v_g$, $L(T) = \text{cst}$) : $\frac{dP}{dT} = \frac{LP}{RT^2} \rightarrow P = \dots \rightarrow T = \dots$

Courbe de rosée :

- iso- T : $P_A = x_A^l P_A^{\text{sat}}(T) = x_A^g P \Rightarrow x_A^l \rightarrow$ ds la 1^{re} eq
- iso- P : idem : $x_A^g = x_A^l \frac{P_A^{\text{sat}}(T)}{P}$

Point homoazéotropique (Z) : $T_{\text{éb}} = T_{\text{ros}}$ et $P_{\text{éb}} = P_{\text{ros}}$

Th de Gibbs-Konovalov : $(s_g - s_l) dT - (v_g - v_l) dP = -(x_A^g - x_A^l)(d\mu_A - d\mu_B)$

démo : Gibbs-Duhem ($\sum n_i d\mu_i = -S dT + V dP$) et, à l'équilibre, $\mu_X^l = \mu_X^g$

donc pt Z : $T^g = T^l \quad P^g = P^l \quad \frac{dP}{dT} = \frac{s_g - s_l}{v_g - v_l}$

Th des moments chimiques : $(x - x^l)n^l + (x - x^g)n^g = 0$

Deux liquides non miscibles : pt hétéroazéotropique

Courbe de rosée : avec $\mu_A^l = \mu_{A,1}^*(T, P)$ (du corps pur)

démo : $\mu_{A,g}^0(T) + RT_A^{\text{éb}} \ln\left(\frac{P_{\text{tot}}}{P^0}\right) = \mu_{A,1}^*(T, P) = \mu_{A,g}^0(T) + RT \ln\left(\frac{x_A^g P_{\text{tot}}}{P^0}\right)$; $\frac{d}{dT} \left(\frac{\mu_{A,g}^0(T) - \mu_{A,1}^*(T, P)}{T} \right) = -R \frac{d}{dT} (\ln x_A^g)$; puis $\frac{d}{dT} \left(\frac{P}{T} \right) = -\frac{h}{T^2}$ où $h_{A,g}^0 - h_{A,1}^* = L_A^{\text{vap}}$

7 Thermodynamique

Gaz parf : 22.4 L à $T = 273$ K et $P = 1$ atm

$$T = 273,16 \times \lim_{P \rightarrow 0} \frac{PV}{(PV)_{\text{point triple de l'eau}}}$$

$$t = T - 273,15$$

$$E = k_B T \quad k_B = \frac{R}{N}$$

$$\text{Échelle affine centésimale : } \theta(t) = 100 \frac{t - t_0}{t_{100} - t_0}$$

Diagramme d'Amagat : PV / P

Pression : 1 bar = 10^5 Pa 760 mm de Hg = 1 atm = 101325 Pa unité SI : Pa

$$\vec{dF} = -\vec{\text{grad}} P d\tau = P \vec{dS}$$

$$P = -\rho g z + P_0 \quad \Delta P = \rho g h$$

$$\text{Souvent : } \rho = \frac{m}{V} = \frac{nM}{V} = \frac{PM}{RT}$$

relation de la statique des fluides : $\vec{\text{grad}} P + \vec{\text{grad}}(\rho g z) = \vec{0}$ en dim 1 : $dP = -\rho g dz$ d'où $P = P_0 e^{-\frac{\rho g z}{P}}$

Poussée d'Archimède : $\Pi_A = -\rho v g = -P_{\text{fluide déplacé}}$

Gaz parfaits :

On néglige les interactions entre les molécules (P doit être faible : $\ll 1$ atm) et $V_{\text{molécules}} \ll V_{\text{tot}}$

Loi des gaz parfaits : $PV = nRT$ $P = NkT$ $R \approx 8.314 \text{ J} \cdot \text{K}^{-1} \cdot \text{mol}^{-1}$

Loi de Van Der Waals : $(P + \frac{a}{V^2})(V - b) = RT$

a : interaction entre molécules b : covolume, vol des particules

$$\text{Coef de dilatation isobar : } \alpha = \frac{1}{V} \left(\frac{\partial V}{\partial T} \right)_P \approx \frac{1}{T}$$

$$\text{Coef de variation de pression à vol cst : } \beta = \frac{1}{P} \left(\frac{\partial P}{\partial T} \right)_V \approx \frac{1}{T}$$

$$\text{Coef de compressibilité isotherme : } \chi_T = -\frac{1}{V} \left(\frac{\partial V}{\partial P} \right)_T \approx \frac{1}{P}$$

$$\left(\frac{\partial P}{\partial V} \right)_T \left(\frac{\partial V}{\partial T} \right)_P \left(\frac{\partial T}{\partial P} \right)_V = -1$$

$$\alpha = \beta \chi_T P$$

7.1 Premier principe

Énergie interne : $U = W_{c(\text{int})} + W_{p(\text{int})}$

Travail échangé par les forces pressantes : $dW = P_{\text{ext}} d\tau$

$$dW = -P_{\text{ext}} dV$$

C_p, C_v : capacités calorifiques à P / V constant

Chaleur massique : $c_p = \frac{C_p}{M}$ chaleur molaire : $C_p = \frac{C_p}{n}$

$$dQ_{\text{rév}} = C_v dT + l dV$$

$$dQ_{\text{rév}} = C_p dT + h dP$$

$$dQ_{\text{rév}} = \lambda dV + \mu dP$$

h : chaleur latente de variation de pression (m^3) g p : $h = -V$

l : chaleur latente de variation de volume (Pa) g p : $l = P$

λ : capacité calorifique (Pa)

1^{er} principe de la thermo : $dU = \delta W + \delta Q$

Enthalpie : $H = U + PV$

Loi de Joule : l'énergie interne d'un gaz parf ne dépend que de sa température ($\Delta U = 0$)

Loi de Joule-Thomson : pour un gaz qui subit une détente de Joule-Thomson, $\Delta T = 0$ (et $\Delta H = 0$)

$$\Delta(H + \frac{1}{2}mv^2 + mgh) = W' + Q \quad (W' : \text{travail des forces autres que pressantes})$$

Transformations :

$$\gamma = \frac{C_p}{C_v} \quad (\text{monoatomique : } \gamma \approx \frac{5}{3} \quad / \quad \text{diatomique } \gamma \approx \frac{7}{5} \approx 1.4)$$

$$\text{g. p. : } C_p - C_v = R \quad dU = C_v dT \quad dH = C_p dT \quad C_v = \frac{R}{\gamma-1} \quad C_p = \frac{\gamma R}{\gamma-1}$$

$$\text{Svt : } W = \int -P dV = P_1 V_1 \cdot \ln \frac{V_1}{V_2} = nRT \cdot \ln \frac{P_2}{P_1}$$

$$- \text{isotherme : } \delta U = 0 \quad \Delta H = 0 \quad Q = -W$$

$$- \text{isobare : } W = P \Delta V \quad \Delta U = C_v \Delta T \quad Q_p = \Delta H = C_p \Delta T$$

$$- \text{isochore : } W = 0 \quad Q_v = \Delta U = \frac{P_2 V_2 - P_1 V_1}{\gamma-1}$$

Transfo adiabatique : le syst n'échange pas de chaleur ($\delta Q = 0$) (svt réversible)
 Relations de Lapalce : $PV^\gamma = \text{cst}$ $TV^{\gamma-1} = \text{cst}$ $P^{1-\gamma}T^\gamma = \text{cst}$ démo : $\delta Q = -\delta W + dU = 0$

7.2 Second principe

S : entropie $\Delta S = \Delta S_{\text{échange}} + \Delta S_{\text{création}}$ $dS \geq 0$ (rév / irrév) Transfo rév : $\Delta S = 0$

$dS = \frac{\delta Q}{T_{\text{ext}}}$ ($\rightarrow \Delta S_{\text{éch}} = C_p \ln \frac{T_f}{T_i}$) (eau : $C_p = 4186 \text{ J} \cdot \text{kg}^{-1} \cdot \text{K}^{-1}$)

3^e principe : à 0 K, $S = 0$

Machine thermique : $\sum_i \frac{Q_i}{T_i} \leq 0$: inégalité de Clausius

Moteur : cyclique $\rightarrow \Delta S = 0$ et $\Delta U = 0$

Pour les machines thermiques (valable aussi pr les ∂) : $\sum_i Q_i + \sum_j W_j = 0$ et $\sum_i S_i = 0$ (si réversible)

Rendement : $\rho = \frac{|\text{travail fourni}|}{|\text{travail reçu}|}$

Moteur : $\rho = 1 - \frac{T_2}{T_1}$ réfrigérateur : $\rho = \frac{T_2}{T_1 - T_2}$ pompe à chaleur : $\rho = \frac{T_1}{T_1 - T_2}$

$S = \frac{nR}{\gamma-1} \ln(PV^\gamma) + \text{cst} = \frac{nR}{\gamma-1} \ln(TV^{\gamma-1}) + \text{cst} = \frac{nR}{\gamma-1} \ln(P^{1-\gamma}T^\gamma) + \text{cst}$

$dU = \delta Q + \delta W = T dS - P dV$

Diagramme entropique : T / S

Condition d'équilibre ($\Leftarrow dS = \frac{\delta Q}{T} + \delta_i S$ avec $\delta_i S \geq 0$) :

syst isolé ($\delta Q = 0$) \rightarrow $-S$ décroît jusqu'à un minimum

S et V fixés \rightarrow U

S et P fixés \rightarrow H

T et U fixés \rightarrow F

T et P fixés \rightarrow G

$F^* = U - T_{\text{ext}}S$ $G^* = U - T_{\text{ext}}S + P_{\text{ext}}V$ (exergie) (partir de U)

$W_f \leq -\Delta F^*$ (pr une transfo monotherme) $W_{f,u} \leq -\Delta G^*$ (pr une transfo monotherme monobare)

$\mathcal{P}_{\text{utile}} + \mathcal{P}_{\text{thermq}} = \frac{d}{dt}(E + P_{\text{ext}} + V) + [(h + e_c + e_p)q_m]_e^s$

7.3 Application différentielle des deux principes

$H = U + PV$ $F = U - TS$ $G = H - TS$

$dU = TdS - PdV$ $dH = VdP + TdS$ $dF = -PdV - SdT$ $dG = VdP - SdT$

Relations de Clapeyron : $l = T \left(\frac{\partial P}{\partial T} \right)_V$ $h = -T \left(\frac{\partial V}{\partial T} \right)_P$ (grâce à dU / dS et dH / dS et Schwartz)

$C_p - C_v = T \left(\frac{\partial V}{\partial T} \right)_P \left(\frac{\partial P}{\partial T} \right)_V = T \alpha V \beta P$

Relation de Gibbs-Helmholtz :

$-\frac{H}{T^2} = \left(\frac{\partial}{\partial T} \left(\frac{G}{T} \right) \right)_P$ car $H = G + TS = G - T \left(\frac{\partial G}{\partial T} \right)_P$

$-\frac{U}{T^2} = \left(\frac{\partial}{\partial T} \left(\frac{F}{T} \right) \right)_V$ car $U = F + TS = F - T \left(\frac{\partial F}{\partial T} \right)_V$

7.4 Changement d'état

Point critique : $L \xrightarrow{T \rightarrow T_c} 0$

Changement d'état : $Q_p = \Delta H = mL$ $L_{1 \rightarrow 2} = h_2 - h_1$

Formule de Clapeyron : $L_{1 \rightarrow 2} = T(u_2 - u_1) \left(\frac{\partial P}{\partial T} \right)_V$ (où u : vol massique)

$\frac{dP}{dT} = \frac{L_{\alpha \rightarrow \beta}}{T(u_\beta - u_\alpha)}$ démo : $\mu_\alpha = \mu_\beta$ donc $d\mu_\alpha = d\mu_\beta$ donc $v dP - s dT$ donc $\frac{dT}{dP} = \frac{v_\beta - v_\alpha}{s_\beta - s_\alpha}$ et $S = \frac{L}{T}$

$\Delta H_{\text{cycle}} = L_F + L_V - L_S = 0$

$u = x u_v + (1-x) u_l$ avec $x = \frac{m_{\text{vapeur}}}{m} = \frac{LM}{LV}$ (idem pour h et s)

$P^{\text{sat}}(T) = P^{\text{sat}}(T_0) \exp \left[-\frac{L}{R} \left(\frac{1}{T} - \frac{1}{T_0} \right) \right]$ démo : $\frac{dP}{dT} \approx \frac{L}{Tv_g} = \frac{LP}{RT^2}$

Diagramme de phases : P / T diagramme d'Andrews : P / v

Formule de Duperray (pr l'eau) : $P_{(\text{atm})} = \left(\frac{t_{\text{cc}}}{100} \right)^4$ (pr $50 < t < 200$ °C)

| | | | |
|-------|------------|---------|-------------------------------|
| | ébullition | 100 °C | 1 atm |
| Eau : | τ | 0,01 °C | 4 mm Hg = $\frac{4}{760}$ atm |
| | C | 374 K | 218 atm |

Machines : régime permanent : $\Delta H = 0 = \sum_i m_i h_i$

7.5 Théorie cinétique des gaz

Hyp :

- $U = \sum_i \frac{1}{2} m_i v_i^2$
- homogénéité : $\frac{dN}{dt} = \text{cst}$
- isotropie de l'espace

Cste de Boltzmann : $k_B = \frac{R}{N} \approx 1.38 \cdot 10^{-23} \text{ J} \cdot \text{K}^{-1}$

Nb de particules tq : $v_x < v < v_x + dv, v_y \dots$: $d^3n = N \left(\frac{m}{2\pi kT}\right)^{3/2} e^{-\frac{mv^2}{2kT}} dv_x dv_y dv_z$ (on a : $dv_x dv_y dv_z = 4\pi v^2 dv$)

Vitesse la plus probable : $v_p = \sqrt{\frac{2kT}{m}}$

$\bar{u} = \frac{1}{N} \int_{v=0}^{\infty} v dn(v) = \sqrt{\frac{3kT}{m}}$

$I_n = \int_0^{\infty} e^{-\beta v^2} v^n dv$ $I_n = \frac{n-1}{2\beta} I_{n-2}$ $I_0 = \frac{1}{2} \sqrt{\pi\beta}$ $I_1 = \frac{1}{2\beta}$

Vitesse quadratique moyenne : $\bar{u}^2 = \frac{3m}{4kT}$

Méthode du viriel : dériver $\sum OM^2 = \text{cst} \rightarrow \mathcal{E}_c = \sum \frac{1}{2} mv^2$

Chaque degré de liberté ajoute $\frac{1}{2}kT$ à l'énergie

Monoatomique : $U = \frac{3}{2}RT / \gamma = \frac{5}{3}$ diatomique : $\gamma = \frac{7}{5}$ déformable : $\gamma = \frac{9}{7}$

Polyatomique : $\gamma = \frac{6a-3}{6a-5}$ déformable : $\gamma = \frac{3a-2}{3a-3}$

L'énergie est proportionnelle à $e^{-\frac{E}{kT}}$

7.6 Transferts thermiques

$E_{\text{vib}} = (n + \frac{1}{2})h\nu$ changemnt de niv d'énerg : $\Delta n = \pm 1$

\vec{q} : vect densité de courant volumq d'énerg interne σ_u : terme de création d'énerg int par unité de vol

$d\mathcal{E} = d\mathcal{E}_c - d\mathcal{E}_e$ échange : $d\mathcal{E}_e = -(\iint_{\partial\Sigma} \vec{q} \cdot \vec{d\Sigma}) \delta t$ création : $d\mathcal{E}_u = \sigma_u d\tau \delta t$

$\frac{\partial \mathcal{E}}{\partial t} = \iint \sigma_u d\tau - \iint_{\partial\Sigma} \vec{q} \cdot \vec{d\Sigma}$

Rayonnement / conduction / convection (déplacemnt de matière) : $\vec{q} = \vec{q}_R + \vec{q}_{Cd} + \vec{q}_{Cv}$

$\vec{J}_{Th} = \vec{q}_{Cd} \approx \vec{q}$: vect densité volumq de courant d'énerg int, non convectif (conduction) $\mathcal{P}_{Th} = - \iint \vec{J}_{Th} \cdot \vec{d\Sigma}$ (reçue)

u_m : énerg int massq ρ : masse volumq ($u_v = \rho u_m$)

Conservation locale de l'énerg : $\text{div } \vec{J}_{Th} + \frac{\partial(\rho u_m)}{\partial t} = \sigma_u$

$\text{div } \vec{J}_{Th} + \rho c_m \frac{\partial T}{\partial t} = \sigma_u$ avec $du_m = c_m dT$

pr une résistance : $\sigma_u = \vec{J} \cdot \vec{E} = \frac{J^2}{\sigma}$

Loi de Fourier : $\vec{J}_{Th} = -\lambda \overrightarrow{\text{grad}} T$ λ : conductivité themique (en $\text{W} \cdot \text{m}^{-1} \cdot \text{K}^{-1}$)

Éq de la diffusion thermique : $\rho c \frac{\partial T}{\partial t} = \text{div}(\lambda \overrightarrow{\text{grad}} T) + \sigma_u$

en milieu homogène ($\overrightarrow{\text{grad}} \lambda \approx 0$) : $\frac{\partial T}{\partial t} = a \Delta T + \frac{\sigma_u}{\rho c_m}$

$a = \frac{\lambda}{\rho c_m}$: diffusivité themique a en $\text{m}^2 \cdot \text{s}^{-1}$

Svt : $\sigma_u = 0$ (pas de création d'énergie)

En régime permanent, le flux thermique est constant $\Delta T = 0$

Résistance themique : $R = \frac{T_2 - T_1}{P}$

Entropie : $dS = s_v d\tau = \rho s_m d\tau$ $\delta_e S = -(\iint_{\partial\Sigma} \frac{\vec{J}_{Th} \cdot \vec{d\Sigma}}{T}) \delta t$

\vec{J}_S : densité de courant volumq d'entropie σ_S : création d'entropie

Éq de conservation locale de l'entropie : $\rho \frac{c_m}{T} \frac{\partial T}{\partial t} + \text{div } \vec{J}_S = \sigma_S$ avec : $\frac{\partial s_v}{\partial t} + \text{div } \vec{J}_S = \sigma_S$

Avec A entropie volumique : $\rho \frac{\partial s}{\partial t} + \text{div } \vec{J}_S = A$ $A = \lambda \left(\frac{\overrightarrow{\text{grad}} T}{T}\right)^2$

démo : $dS = \frac{C_p dT}{T}$ et $\overrightarrow{\text{grad}}\left(\frac{1}{T}\right) = -\frac{1}{T^2} \overrightarrow{\text{grad}} T$ et la conservation locale de l'énergie

$\overrightarrow{\text{grad}} T$ et \vec{J}_{Th} st de sens contraire démo : $\sigma_S = \overrightarrow{\text{grad}} \frac{1}{T} \cdot \vec{J}_{Th} \geq 0$

Convexion :

χ : grandeur scalaire extensive

$$\vec{J}_\chi = \rho \chi_m \vec{v} \quad \phi_\chi = \iint \vec{J}_\chi \cdot d\vec{\Sigma}$$

Continuité de T donc de \vec{J}_{Th} à l'interface

$$\text{Loi de Newton : } \delta Q = -h(T - T_{ext}) d\Sigma \delta t$$

Rayonnement thermique :

ϕ : puiss totale rayonnée par la source (W)

$\varphi_{\vec{u}}$: fraction du flux surfacique émis ds l'angle solide $d\Omega$ ds la direction \vec{u} (en $W \cdot m^{-2} \cdot sr^{-1}$)

$$d\phi = \varphi_{\vec{u}} d\Sigma d\Omega \quad \text{ici : } d\Omega = \sin \theta d\theta d\varphi = \frac{\cos \theta dS}{r^2}$$

Émittance totale : $M = \frac{d\phi}{d\Sigma}$ flux surfacique : $\phi = \int_{\text{surf}} M d\Sigma$

Luminance totale : $d\phi = L_{\vec{u}} \cos \theta d\Sigma d\Omega$ θ : angle fait avec la normale

Loi de Lambert : $L_{\vec{u}} = L = \text{cst}$

$$M = \pi L \quad \text{démô : } M = \iint L \cos \theta d\Omega$$

Luminance, émittance monochromatiques : $L_{\vec{u}} = \int_0^\infty L_{\vec{u},\lambda} d\lambda$ $M = \int_0^\infty M_\lambda d\lambda$

Éclairement total (d'une surface) : $E = \frac{d\phi}{d\Sigma}$ $\phi = \int_{\text{surf}} E d\Sigma$

Corps noir : idéal, émet le maximum d'énergie par rayonnement

$$\text{Loi de Planck : } M_\lambda^0 = \frac{2\pi h c^2 \lambda^{-5}}{\exp\left[\frac{hc}{\lambda kT}\right] - 1}$$

$$\text{loi de Wien : } \lambda_{\text{max}}(T) \cdot T = \text{cst} \approx 3 \cdot 10^{-3} \text{ m} \cdot \text{K}$$

$$\text{Loi de Stephan : } M^0 = \sigma T^4 \quad \text{avec } \sigma = \frac{2\pi^5 h k^4}{15 c^2 h^4}$$

$$\text{Flux du Soleil sur la Terre : } \varphi_{S \rightarrow T} = \sigma T_S^4 \left(\frac{R_S}{D}\right)^2 \pi R_T^2 \quad \text{démô : } \varphi = M \times \frac{\Delta\Omega}{4\pi} \times S \text{ (supposé isotrope)}$$

Émissivité : $\mathcal{E}_{\vec{u},\lambda} = \frac{L_{\vec{u},\lambda}}{L_\lambda^0}$

$$L_{\vec{u},\lambda} = \mathcal{E}_{\vec{u},\lambda} L_\lambda^0 \quad M_\lambda = \mathcal{E}_\lambda M_\lambda^0 \quad M = \mathcal{E} M^0$$

Corps gris : $\mathcal{E}_{\vec{u},\lambda} = \mathcal{E}_{\vec{u},\lambda_0}$

Corps à émission diffuse : $\mathcal{E}_{\vec{u},\lambda} = \mathcal{E}_{\vec{u}_0,\lambda}$ (suit la loi de Lambert)

Loi de Kirchhoff : à l'équilibre thermodynamiq, $\mathcal{E}_{\lambda,\vec{u}} = \alpha_{\lambda,\vec{u}}$ (coef d'absorption)

8 Thermochimie

$$Q_p + Q_v = RT (\sum_i \nu_i)_{\text{gaz}}$$

Pour un corps simple : $H^0 = 0$

$$\Delta H = \Delta U^0 + RT (\sum_i \nu_i)_{\text{gaz}} = Q_p$$

$$dQ_v = (\sum_i \nu_i C_{v,i}) dT \quad (\rightarrow \Delta U^0)$$

$$dQ_p = (\sum_i \nu_i C_{p,i}) dT \quad (\rightarrow \Delta H^0)$$

$$\frac{dQ_p}{dT} = 0 \quad \frac{dQ_v}{dT} = 0$$

Enthalpie de formation (énergie de la réaction à 25 °C) : $\Delta H = \sum_i \nu_i H_i^0$ (ne dépend pas du chemin suivi)

$\Delta H^0 < 0$: exothermique

Énergie de liaison : $\Delta_r H^0$ de la réaction $(A - B)_g \rightarrow A_g + B_g$

8.1 Thermodynamique chimique

Pression partielle : pression qu'aurait le gaz s'il était seul

$$\text{Fraction molaire : } x_i = \frac{n_i}{n} = \frac{P_i}{P}$$

$$dU = TdS - PdV + \mu dn$$

Potentiel chimique : $\mu = \left(\frac{\partial U}{\partial n}\right)_{S,V} = g = \frac{G}{n}$

$$\mu = \left(\frac{\partial H}{\partial n}\right)_{S,P} = \left(\frac{\partial F}{\partial n}\right)_{T,V} = \left(\frac{\partial G}{\partial n}\right)_{T,P} \quad d\mu = v dP - s dT$$

$$\left(\frac{\partial \mu}{\partial T}\right)_P = -s \quad \left(\frac{\partial \mu}{\partial P}\right)_T = v \quad \mu = h - Ts \quad -\frac{h}{T^2} = \left(\frac{\partial}{\partial T} \left(\frac{\mu}{T}\right)\right)_P \quad (\text{avec } \mu = g = h - Ts = h + T \left(\frac{\partial \mu}{\partial T}\right)_P)$$

gaz parf : $\mu = \mu^0(T) + RT \ln \frac{P}{P^0}$ avec $\left(\frac{\partial \mu}{\partial P}\right)_T = v$

cas général : $\mu(T, P) = \mu^0(T) + RT \ln f(T, P)$ f : fugacité $f(T, P) \underset{P \rightarrow 0}{\sim} P$

$$f : \text{avec } \left(\frac{\partial \mu}{\partial P}\right)_T = v \quad \frac{v}{RT} dP - d(\ln P) = d(\ln \frac{f}{P}) \quad f(T, P) = P \exp \left[\int_0^P \left(\frac{v}{RT} - \frac{1}{P} \right) dP \right]$$

Plusieurs constituants :

$$\mu_i = \left(\frac{\partial U}{\partial n_i} \right)_{S, V, n_{j \neq i}} \quad dU = T dS - P dV + \sum \mu_i dn_i \quad -T \delta_i S = \sum_i \mu_i dn_i$$

Théorème d'Euler : si $f(x, y, z)$ est homogène, de degré 1, en x, y, z alors $f(x, y, z) = x \left(\frac{\partial f}{\partial x} \right)_{y,z} + y \left(\frac{\partial f}{\partial y} \right)_{x,z} + z \left(\frac{\partial f}{\partial z} \right)_{x,y}$

démo : dériver $\lambda f = f(\lambda x, \lambda y, \lambda z)$ par rapport à λ d'où, si $\lambda = 1$...

si Y extensive alors : $Y(T, P, n_i) = \sum n_i \left(\frac{\partial Y}{\partial n_i} \right)_{T, P, n_{j \neq i}}$

$$\Rightarrow G = \sum n_i \mu_i$$

Équation de Gibbs-Duhem : $V dP - S dT = \sum n_i d\mu_i$ démo : $dG = P dV - S dT + \sum \mu_i dn_i = d(\sum n_i \mu_i)$

à T et P fixés : $\sum x_i d\mu_i = 0$ (permet de relier les μ_i) aussi : $\sum x_i = 1$

Cœxistence de deux phases (pr un corps pur) : $\mu_\alpha = \mu_\beta$ (si $\mu_\alpha < \mu_\beta$, seule α est stable)

Relation de Clausius-Clapeyron : $\frac{dP}{dT} = \frac{L_{\alpha \rightarrow \beta}}{T(v_\beta - v_\alpha)}$ (loin du pt critiq : $v_l \ll v_g$)

Diagramme de phases : P / T isothermes d'Andrews : P / v

Mélange parf de g p (loi de Dalton) : $P_i = x_i P_{\text{tot}}$ $\mu_i = \mu_i^0(T, P^0) + RT \ln \frac{P_i}{P^0}$

Loi de Raoult (liq + gaz) : $P_i = x_i^l P_i^{\text{sat}}(T)$ alors : $\mu_i^l = \mu_{i,p,x}^{0,l}(T) + RT \ln x_i^l$ avec : $\mu_{i,p,x}^g = \mu_i^g(T) + RT \ln x_i^g$

Mélange binaire : A \approx pur : suit la loi de Raoult B \approx pur : A suit la loi d'Henry ($P_A = x_A^l K_{h(B/A)}$)

Activité : $P_i = P_i^{\text{sat}} a_i$ coeff d'activité : $a_i = \gamma_i x_i^l$

$$\mu_i^l = \mu_i^{0,l}(T) + RT \ln a_i^l$$

À dilution infinie (suit la loi d'Henry) : $\mu_A^l = \mu_{A,\infty,x}^{0,l}(T) + RT \ln x_A^l$

Pr une concentration fixée : $\mu_A^l = \mu_{A,\infty,c}^{0,l}(T) + RT \ln \frac{[A]}{c_{\text{réf}}}$

Avancement ξ : $n_i = n_i^0 + \nu_i \xi$

ξ_{max} et ξ_{min} : avec $n_i \geq 0$

Opérateur de Lewis : $\Delta_r Y = \sum \nu_i Y_i = \left(\frac{\partial Y}{\partial \xi} \right)_{T,P}$ si Y fonction d'état extensive

Affinité chimique : $T \delta_i S = \mathcal{A} d\xi$ $\mathcal{A} = - \left(\frac{\partial G}{\partial \xi} \right)_{S,V} = - \left(\frac{\partial G}{\partial \xi} \right)_{T,P}$ $dG = -S dT + V dP - \mathcal{A} d\xi$

$$\mathcal{A} = - \sum \nu_i \mu_i = -\Delta_r G$$

Condition d'équilibre chimique : $\mathcal{A} = 0$

Constante d'équilibre : $K_T^0 = \prod (a_i^{\text{éq}})^{\nu_i}$ $\Delta_r G^0 = -RT \ln K_T^0$ (loi d'action de masse)

Avec l'activité a_i :

- liquide pur (solvant) / solide pur : $a_i = 1$

- gaz (\approx parf) : $a_i = \frac{P_i}{P_{\text{réf}}}$ en bar (att avec les Pa !) $P_{\text{réf}} = 1 \text{ bar}$

- soluté : $a_i = \frac{[A_i]}{c_{\text{réf}}}$ $c_{\text{réf}} = 1 \text{ mol / L}$ $\mu_i = \mu_{i,\infty,c}^{0,l}$

$$\mathcal{A} = RT \sum \nu_i \ln \frac{a_i^{\text{éq}}}{a_i}$$

Évolution : $\mathcal{A} d\xi \geq 0$ donc : $\mathcal{A} > 0$: \rightarrow $\mathcal{A} < 0$: \leftarrow $\mathcal{A} = 0$: éq

faire des bilans de matière (+ colonne n_{tot}^g) att : gaz inertes 2 réaction \sim successives

Quotient de réaction : $Q = \prod a_i^{\nu_i}$ $\mathcal{A} = RT \ln \frac{K_T^0}{Q}$

Relation de Van't Hoff : $\frac{d \ln K_T^0}{dT} = \frac{\Delta_r H^0}{RT^2}$

démo : $\frac{d}{dT} (\ln K_T^0) = -\frac{1}{R} \frac{d}{dT} \left(\frac{\Delta_r G^0}{T} \right) = -\frac{1}{R} \sum_i \nu_i \frac{d}{dT} \left(\frac{\mu_i^0}{T} \right)$ or $\frac{d}{dT} \left(\frac{\mu_i^0}{T} \right) = -\frac{h_i^0}{T^2}$ d'où $\frac{d}{dT} (\ln K_T^0) = \frac{\sum_i \nu_i h_i^0}{RT^2} = \frac{\Delta_r H^0}{RT^2}$

$\Delta_r G^0 = \Delta_r H^0 - T \Delta_r S^0$ approximation d'Ellingham : $\Delta_r H^0$ et $\Delta_r S^0$ indép de T

Relations de Kirchhoff : $\frac{d \Delta_r H^0}{dT} = \Delta_r C_p^0$ $\frac{d \Delta_r S^0}{dT} = \frac{\Delta_r C_p^0}{T}$

Relations de Gibbs-Helmholtz : $\Delta_r S^0 = -\frac{d(\Delta_r G^0)}{dT} - \frac{\Delta_r H^0}{T^2} = \frac{d}{dT} \left(\frac{\Delta_r G^0}{T} \right)$

Réaction de formation : produit 1 mol à $P^0 = 1 \text{ bar}$ et à $T = \text{cst}$

$\Delta_f H_i^0 = \sum \nu_j h_j^0$ $h_i^0 = \Delta_f H_i^0 - \sum_{\text{corps simple}} \nu_j h_j^0$ loi de Hess : $\Delta_r H^0 = \sum_i \nu_i \Delta_f H^0$

Variance : $\nu = n - r + 2 - \varphi$ (n : nb d'espèces chimiques, r : nb de réactions, φ : nb de phases)

démo : $\sum_{i=1}^n x_i^\phi$: φ , $\mu_i^1 = \mu_i^2 = \dots = \mu_i^\varphi$: $\varphi - 1$, $\mathcal{A} = 0$: r

$c' = c - r$: nb de réaction chimqmt indép att : aux relations entre $P \Rightarrow \nu = \nu - 1$

Liq / gaz : $\mathcal{A} = RT \ln K_T^0 - RT \left(\sum \nu_i^g \ln \left(\frac{P}{N_{\text{tot}}^g P_{\text{réf}}} \right) - RT \ln \prod_{\text{gaz}} (n_i^g)^{\nu_i} \right)$

Solutés / solides : $\mathcal{A} = RT \ln K_T^0 + RT \left(\sum_{\text{soluté}} \nu_i^{\text{soluté}} \ln (C_{\text{réf}} V) - RT \ln \prod_{\text{soluté}} n_i^{\nu_i} \right)$

Endo/exothermique : $\Delta_r H^0 > 0$ ou < 0

$\Delta_r H^0 dT d\xi \geq 0$

Principe de Lechatelier : principe modération, le syst diminue les effets de la perturbation

Diagramme d'Ellingham : $\frac{2x}{y}M + O_2 \rightarrow \frac{2}{y}M_xO_y$ (oxyde) $\Delta_r G^0 = RT \ln \overline{P_{O_2}^{eq}} = f(T)$ haut : + oxydants