Innocence asychrone

Samuel Mimram

Équipe PPS, CNRS, Université Paris VII
(encadré par Paul-André Melliès)

13 septembre 2005

Une sémantique des jeux asynchrone

$\boxed{\text{sémantique des jeux} = \text{sémantique des traces des langages fonctionnels}}$

- Objectifs :
  - court terme : en dégager le caractère **concurrent**
  - long terme : l'appliquer aux langages de processus
- Notre modèle sera :
  - modulaire (sémantique)
  - interactif (jeux)
  - concurrent (asynchrone)

Nouveautés

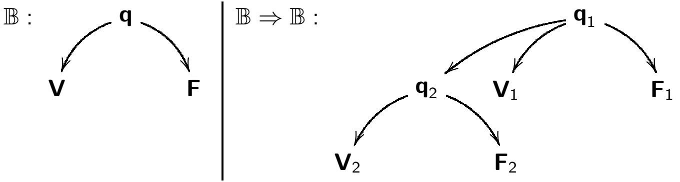
- Jouer sur des traces de Mazurkievicz
  (graphes 2-dimensionnels)
- Les parties ne sont pas alternées
- Reformulation diagrammatique des stratégies innocentes

$$\text{innocence} = \lambda\text{-calcul} = \text{preuves}$$

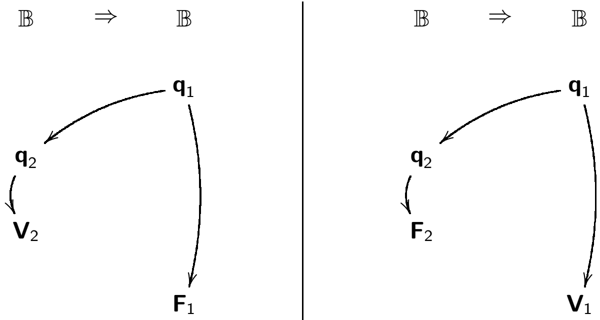
$$\text{innocence} \Rightarrow \text{positionnalité}$$

Description usuelle (jeux et stratégies)

- Un *jeu* se joue sur une arène

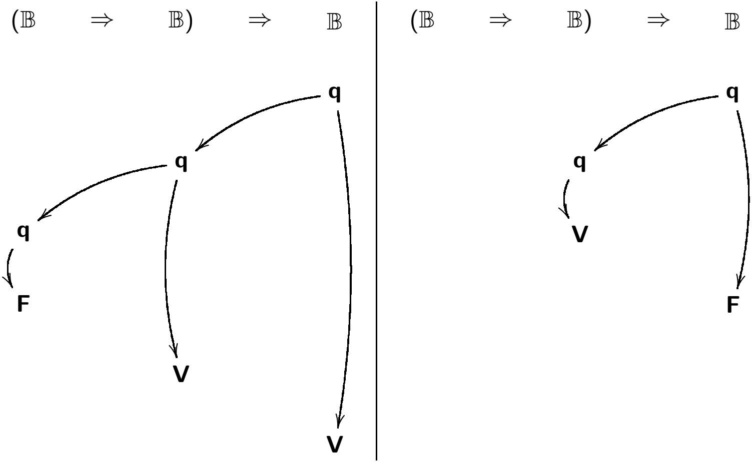


- Une *stratégie* est un ensemble de parties (e.g. **not**)



L'innocence, caractérisation des preuves

- Jouer avec un rétroviseur (la *vue* = mémoire partielle)



Vers une géométrie de la concurrence
Les graphes

- On joue maintenant sur des graphes

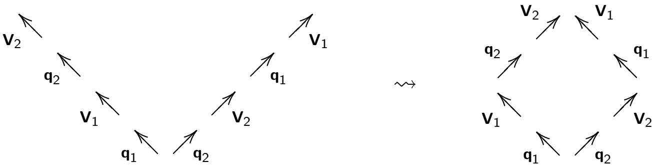


FIG.: $\mathbb{B} \otimes \mathbb{B}$

Vers une géométrie de la concurrence
Les traces de Mazurkievicz

- On joue maintenant sur des graphes 2-dimensionnels

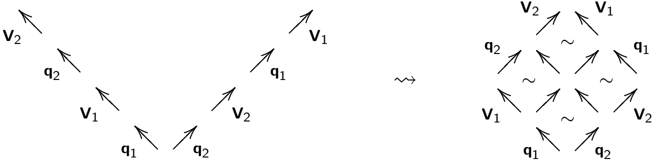


FIG.: $\mathbb{B} \otimes \mathbb{B}$

Vers une géométrie de la concurrence
Tuile de permutation 2-dimensionnelle

L'ordre des coups est indifférent à homotopie près

$$\begin{tikzcd}
 & {} \\
 & {} \arrow[u, two heads, "t"] \\
{} \arrow[ur, "n"] \arrow[rr, phantom, "\sim"] & & {} \arrow[ul, "m"'] \\
 & {} \arrow[ul, "m"] \arrow[ur, "n"'] \\
 & {} \arrow[u, two heads, "s"]
\end{tikzcd}$$

Homotopie et non alternance

- On veut un modèle de LL non polarisée
  ($\longrightarrow$ pas de connecteurs synthétiques)

$$\dfrac{\dfrac{\pi_1}{\Gamma_1 \vdash A} \qquad \dfrac{\pi_2}{\Gamma_2 \vdash B} \qquad \dfrac{\pi_3}{\Gamma_3 \vdash C}}{\Gamma_1, \Gamma_2, \Gamma_3 \vdash A \otimes B \otimes C}$$

$$\downdownarrows$$

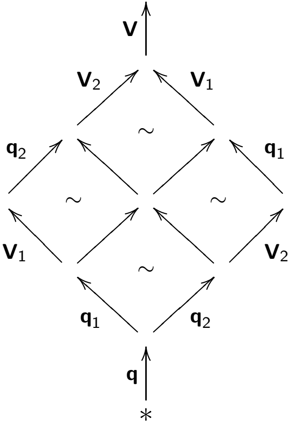
$$\dfrac{\dfrac{\dfrac{\pi_1}{\Gamma_1 \vdash A} \qquad \dfrac{\pi_2}{\Gamma_2 \vdash B}}{\Gamma_1, \Gamma_2 \vdash A \otimes B} \qquad \dfrac{\pi_3}{\Gamma_3 \vdash C}}{\Gamma_1, \Gamma_2, \Gamma_3 \vdash A \otimes B \otimes C} \qquad \dfrac{\dfrac{\pi_1}{\Gamma_1 \vdash A} \qquad \dfrac{\dfrac{\pi_2}{\Gamma_2 \vdash B} \qquad \dfrac{\pi_3}{\Gamma_3 \vdash C}}{\Gamma_2, \Gamma_3 \vdash B \otimes C}}{\Gamma_1, \Gamma_2, \Gamma_3 \vdash A \otimes B \otimes C}$$

$$\begin{tikzcd} & {} & \\ {} \arrow[ur] & \sim & {} \arrow[ul] \\ & {} \arrow[ul] \arrow[ur] & \end{tikzcd}$$

Homotopie et non alternance

Conjonction booléenne par la gauche :

$$\dfrac{\dfrac{\dfrac{\dfrac{\dfrac{\dfrac{\mathbf{V}_1, \mathbf{V}_2 \vdash \mathbf{V}}{\mathbf{V}_1, \mathbf{V}_2 \vdash \mathbf{V} \oplus \mathbf{F}}(\mathbf{V})}{\mathbf{V}_1, \mathbf{V}_2 \oplus \mathbf{F}_2 \vdash \mathbf{V} \oplus \mathbf{F}}(\mathbf{V}_2)}{\mathbf{V}_1, !(\mathbf{V}_2 \oplus \mathbf{F}_2) \vdash \mathbf{V} \oplus \mathbf{F}}(\mathbf{q}_2)}{\mathbf{V}_1 \oplus \mathbf{F}_1, !(\mathbf{V}_2 \oplus \mathbf{F}_2) \vdash \mathbf{V} \oplus \mathbf{F}}(\mathbf{V}_1)}{!(\mathbf{V}_1 \oplus \mathbf{F}_1), !(\mathbf{V}_2 \oplus \mathbf{F}_2) \vdash \mathbf{V} \oplus \mathbf{F}}(\mathbf{q}_1)}{!(\mathbf{V}_1 \oplus \mathbf{F}_1), !(\mathbf{V}_2 \oplus \mathbf{F}_2) \vdash !(\mathbf{V} \oplus \mathbf{F})}(\mathbf{q})$$



Les stratégies

Soit $\mathcal{G}$ un graphe asynchrone pointé par $*$.

Définition usuelle

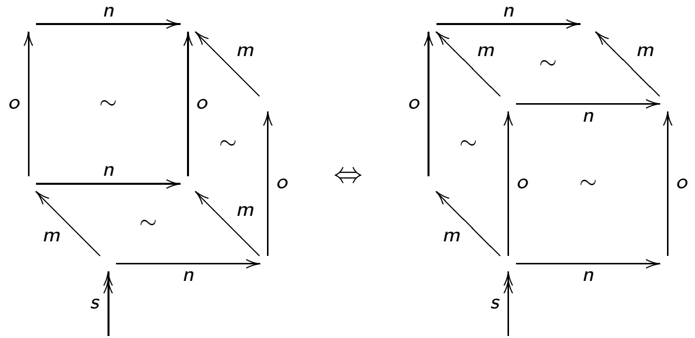
Une *stratégie* est un ensemble de chemins partant de $*$, clos par préfixe.

Formulation diagrammatique de l'innocence

Définition asynchrone

Une stratégie est *innocente* lorsqu'elle vérifie les trois propriété suivantes.

1. La *propriété du cube* :



Formulation diagrammatique de l'innocence

Définition asynchrone

Une stratégie est *innocente* lorsqu'elle vérifie les trois propriété suivantes.

2. La *confluence locale* :

$$
\begin{tikzcd}[column sep=small]
 & & {} & & \\
\sigma \ni & {} \arrow[ur, dotted, "n"] & \sim & {} \arrow[ul, dotted, "m"'] & \in \sigma \\
 & & {} \arrow[ul, "m"] \arrow[ur, "n"'] & & \\
 & & {} \arrow[u, two heads, "s"] & &
\end{tikzcd}
\quad \Rightarrow \quad
\begin{tikzcd}[column sep=small]
 & & {} & & \\
\sigma \ni & {} \arrow[ur, "n"] & \sim & {} \arrow[ul, "m"'] & \in \sigma \\
 & & {} \arrow[ul, "m"] \arrow[ur, "n"'] & & \\
 & & {} \arrow[u, two heads, "s"] & &
\end{tikzcd}
$$

Formulation diagrammatique de l'innocence

Définition asynchrone

Une stratégie est *innocente* lorsqu'elle vérifie les trois propriété suivantes.

3. La propriété de cohérence suivante :

$$
\sigma \ni
\begin{tikzcd}
 & \cdot & \\
\cdot \arrow[ur, "n"] & \sim & \cdot \arrow[ul, "m"'] \\
 & \cdot \arrow[ul, "m"] \arrow[ur, "n"'] & \\
 & \cdot \arrow[u, "s"] &
\end{tikzcd}
\in \sigma
\quad \text{et} \quad
\sigma \ni
\begin{tikzcd}
 & \cdot \\
 & \cdot \arrow[u, "t"] \\
\cdot \arrow[ur, "n"] & \\
 & \cdot \arrow[ul, "m"] \\
 & \cdot \arrow[u, "s"]
\end{tikzcd}
\quad \Rightarrow \quad
\begin{tikzcd}
\cdot & \\
\cdot \arrow[u, "t"] & \\
 & \cdot \arrow[ul, "m"'] \\
\cdot \arrow[ur, "n"'] & \\
\cdot \arrow[u, "s"] &
\end{tikzcd}
\in \sigma
$$

La positionnalité

Définition

$$x \text{ position de } \sigma \qquad \Leftrightarrow \qquad \exists s \in \sigma, \quad s : * \twoheadrightarrow x$$

Théorème

Toutes stratégie σ innocente est caractérisée par l'ensemble des positions qu'elle atteint (elle définit un sous-graphe du jeu)

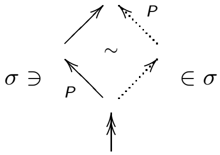
(technique diagrammatique : définir un treillis sur les coups de σ)

Polarisation

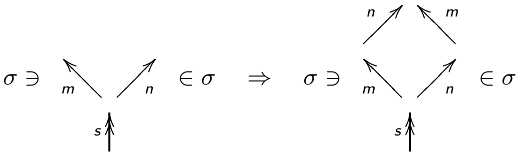
$$\boxed{\text{On polarise les coups : } \lambda : M \to \{-1, +1\}}$$

Conditions supplémentaires :

déterminisme :



J-commutation :



Positions complètes

$\mathbb{B} \otimes \mathbb{B}$:

$$
\begin{tikzcd}
 & & \mathbf{V}_1 \otimes \mathbf{V}_2 & & \\
 & \mathbf{V}_1 \otimes \mathbf{q}_2 \arrow[ur, "\mathbf{v}_2"] & \sim & \mathbf{q}_1 \otimes \mathbf{V}_2 \arrow[ul, "\mathbf{v}_1"'] & \\
\mathbf{V}_1 \otimes * \arrow[ur, "\mathbf{q}_2"] & \sim & \mathbf{q}_1 \otimes \mathbf{q}_2 \arrow[ul] \arrow[ur] & \sim & * \otimes \mathbf{V}_2 \arrow[ul, "\mathbf{q}_1"'] \\
 & \mathbf{q}_1 \otimes * \arrow[ul, "\mathbf{v}_1"] \arrow[ur] & \sim & * \otimes \mathbf{q}_2 \arrow[ul] \arrow[ur, "\mathbf{v}_2"'] & \\
 & & * \otimes * \arrow[ul, "\mathbf{q}_1"] \arrow[ur, "\mathbf{q}_2"'] & &
\end{tikzcd}
$$

Positionnalité pure

- σ° : positions complètes de σ
- Foncteur fidèle monoïdal fort :

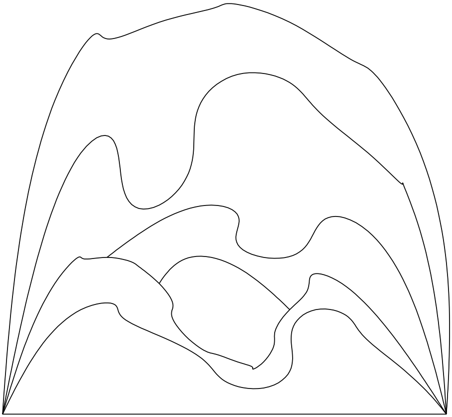
$$\begin{array}{ccc} \mathbb{G} & \xrightarrow{\circ} & \mathbb{R}\mathrm{el} \\ A & \mapsto & A^\circ \\ \sigma & \mapsto & \sigma^\circ \end{array}$$

$$\begin{tikzcd} & \pi \arrow[dl] \arrow[dr] & \\ \mathbb{G} \arrow[rr, "\circ"] & & \mathbb{R}\mathrm{el} \end{tikzcd}$$

- Remarque : il faut imposer des conditions de gain
- En vue : toute la logique linéaire

Jeux asynchrones

- position = type
- terme = ensemble des types qu'il explore



Conclusion

- Un point de rencontre nouveau entre syntaxe, sémantique et concurrence
- Une description *diagrammatique* et *interactive*
  - des démonstrations
  - des programmes purement fonctionnels
- Vers une étude du π-calcul et d'autres modèles de la concurrence