

Stage de Master 2
février–juillet 2005
*Master Parisien
de Recherche en Informatique*

Innocence asynchrone

Samuel MIMRAM

Encadré par Paul-André MELLIÈS



PPS
Université Denis Diderot
2 place Jussieu
75251 PARIS Cedex 05
<http://www.pps.jussieu.fr/>

Résumé

Nous proposons une généralisation du cadre habituel des sémantiques de jeux. Les jeux que nous définissons ne sont pas nécessairement alternés et une arène est représentée par un graphe pointé, ce qui étend les définitions utilisant une relation de justification. Nous présentons une caractérisation diagrammatique des stratégies innocentes dans ce nouveau cadre, puis nous montrons qu'elle est liée à la notion de positionnalité d'une stratégie. Enfin, nous donnons quelques prolongements dans le but de réaliser un modèle d'un fragment de logique linéaire utilisant nos jeux.

Table des matières

1	Jeux séquentiels	3
2	Une approche asynchrone et géométrique de l'innocence	9
2.1	La positionnalité	9
2.2	L'homotopie	11
2.3	La concurrence	12
3	Graphes asynchrones	13
3.1	Premières définitions	14
3.2	La propriété du cube	16
3.3	Le treillis des factorisations d'un chemin	20
4	Jeux, stratégies innocentes et positionnalité	26
4.1	Stratégies	26
4.2	Stratégies innocentes	27
4.3	Jeux polarisés	31
4.4	Positionnalité	32
4.5	Constructions sur les jeux	34
4.6	Gain	37
5	Perspectives	39

Les sémantiques de jeux proposent des modèles de logique en s'attachant à observer les preuves sous un aspect dynamique : on étudie les traces, au sens de la théorie de la concurrence, que peuvent engendrer interactivement, c'est-à-dire par élimination des coupures, les preuves. Les formules sont interprétées par des jeux et les preuves par des stratégies sur ces jeux. Calculer dans ce modèle, c'est faire jouer deux joueurs (souvent appelés Joueur et Opposant) l'un contre l'autre, chacun répondant à un coup de l'autre en utilisant sa stratégie. Le cadre proposé par ces sémantiques semble très général puisqu'il s'applique à de nombreux langages de programmation et a permis d'obtenir des modèles pleinement complets du λ -calcul et de PCF [HO00, AJM00], d'ALGOL idéalisé [AM97] mais aussi des primitives de contrôle (comme celles du $\lambda\mu$ -calcul) [AM97, AM99], des états [AM99], du non déterminisme [Har99], etc. Plus récemment, Melliès [Mel05] a proposé un modèle de jeux pleinement complet de la logique linéaire propositionnelle (non polarisée). Ces modèles partent de la notion sémantique de trace pour arriver au calcul ; la démarche contraire est aussi envisageable et a été choisie par Girard pour élaborer la ludique [Gir01], dans laquelle les stratégies sont déduites de la structure syntaxique des preuves.

L'une des notions fondamentales, à laquelle nous nous sommes particulièrement intéressé durant ce stage, est celle d'*innocence* car elle caractérise le comportement interactif des termes du λ -calcul : la catégorie des stratégies innocentes est un modèle pleinement complet du λ -calcul simplement typé.

On peut s'interroger sur plusieurs aspects des jeux tels qu'ils sont habituellement définis.

- Une stratégie (en particulier une stratégie innocente) est caractérisée par un ensemble de parties ; réciproquement, comment caractériser un ensemble de parties générées par une stratégie ?
- La définition d'innocence est fondée sur la notion de vue ; pourrait-on avoir d'autres caractérisations de l'innocence, plus concises, plus géométriques et plus faciles à manipuler dans certains cas ?
- Les jeux sont séquentiels à cause de l'alternance des coups du Joueur et de l'Opposant dans les arènes. Serait-il possible de relaxer cette condition afin d'avoir un modèle plus concurrent ?

Le présent rapport tente d'apporter des réponses à ces questions.

Nous commencerons par présenter les modèles de jeux tels qu'ils sont usuellement définis, puis nous rappellerons la caractérisation des stratégies innocentes proposée par Melliès dans [Mel04] sur laquelle nous avons fondé notre travail. Ensuite, nous montrerons les définitions et les résultats que nous avons établis durant notre stage en commençant par étudier

les propriétés des graphes asynchrones (qui sont à la base des stratégies innocentes), puis en donnant plusieurs définitions successives de l'innocence (d'abord non polarisée, puis polarisée, puis nous rajouterons des conditions de gain). Enfin, nous présenterons des constructions qui devraient permettre de définir une catégorie des jeux et stratégies innocentes qui soit un modèle d'un fragment de logique linéaire.

1 Jeux séquentiels

Nous rappelons ici les concepts et définitions des modèles de jeux, en utilisant les formulations données dans [HO00]. Une présentation abordable et plus complète pourra par exemple être trouvée dans la thèse de Russ Harmer [Har99] ou dans les notes de cours d'Olivier Laurent [Lau04]. Nous avons tenu à faire ce rappel car il permet d'avoir un point de comparaison pour apprécier les améliorations apportées par notre modèle. Par souci de simplicité, nous présentons ici une interprétation d'un λ -calcul simplement typé avec constantes booléennes et une construction **if** ... **then** ... **else** Notre calcul contiendra deux constantes **V** et **F** du type \mathbb{B} représentant les booléens.

Nous allons observer les *traces* de calcul que peuvent engendrer les termes, une trace étant une suite $m_1 \cdot m_2 \cdot \dots \cdot m_k$ de *coups* qui ont une polarité $+1$ (pour les coups du Joueur) ou -1 (pour les coups de l'Opposant) : ces traces représentent l'interaction entre deux partenaires, le Joueur et l'Opposant. Elles devront commencer par un coup de l'Opposant et être alternées (c'est-à-dire deux coups consécutifs devront être de polarité opposée, chacun jouant à son tour). Un type pourra être vu comme un ensemble de traces, appelé *arène* ou encore *jeu* ; c'est l'ensemble des traces que les termes de ce type ont le droit de jouer.

L'arène correspondant au type \mathbb{B} des booléens peut par exemple être représentée comme à la fig. 1. Elle comporte quatre traces : ε (la trace vide), **q**, **q** · **V** et **q** · **F**. Seules les deux

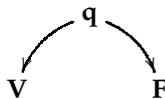


FIG. 1 – Arène \mathbb{B} .

dernières traces sont des traces maximales (on ne peut pas les prolonger). Le coup noté **q** doit être compris comme une question ; l'Opposant commence à poser une question au booléen (« quelle est ta valeur ? ») et le Joueur répond soit **V** (vrai), soit **F** (faux).

De même, on peut représenter l'arène correspondant au type $\mathbb{B} \Rightarrow \mathbb{B}$ (les fonctions des booléens dans les booléens) par le diagramme de la fig. 2. Elle contient six traces maximales :

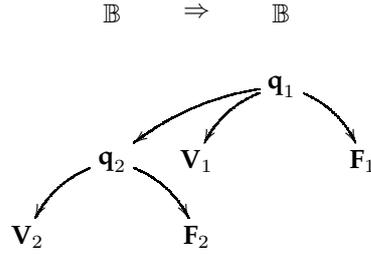


FIG. 2 – Arène $\mathbb{B} \Rightarrow \mathbb{B}$.

$q_1 \cdot V_1, q_1 \cdot F_1, q_1 \cdot q_2 \cdot V_1 \cdot V_2, q_1 \cdot q_2 \cdot V_1 \cdot F_2, q_1 \cdot q_2 \cdot F_1 \cdot V_2$ et $q_1 \cdot q_2 \cdot F_1 \cdot F_2$. Ces traces correspondent aux six comportements possibles des fonctions f des booléens dans les booléens. Le calcul de $f x$, où x est un booléen, se déroule de la façon suivante. L'environnement initie le calcul en demandant à f quelle est sa valeur par le coup q_1 . f peut alors soit répondre immédiatement, si elle ne dépend pas de la valeur de son argument, soit demander (par le coup q_2) la valeur de son argument, puis répondre en fonction de cette valeur.

Les flèches sur le diagramme indiquent à quelle question les valeurs V_i et F_i « répondent » : si un coup n répond à un coup m , on dira que m justifie n .

Les arènes, qui correspondent aux types ou aux formules, sont définies de la sorte.

Définition 1 (Arène)

Une arène est un triplet $A = (M_A, \vdash_A, \lambda_A)$ où

- M_A est un ensemble dont les éléments sont appelés coups.
- \vdash_A est une relation dite de justification définissant une forêt d'arbres étiquetés par les éléments de M_A ($m \vdash_A n$ signifie que m est le père de n). Les racines m sont appelées coups initiaux et notées $\vdash_A m$.
- λ_A est une fonction, appelé polarité, de M_A dans $\{-1, +1\}$. Les coups de polarité négative sont dits coups de l'Opposant (O) et les coups de polarité positive de Joueur (J).

L'arène doit de plus être telle que tout coup initial soit un coup de l'Opposant, et si $m \vdash_A n$ alors $\lambda_A(n) = -\lambda_A(m)$.

Si A et B sont des arènes, on sait construire les arènes suivantes :

- l'arène \top est la forêt vide ;
- l'arène \perp est la forêt réduite à un seul arbre, lui-même réduit à un seul nœud ;
- l'arène $A \times B$ est l'union disjointe de A et B ;
- l'arène $A \Rightarrow B$ est obtenue en ajoutant chaque racine de A comme fils de chaque racine de B (cf. par exemple fig. 1 et 2).

Nous avons vu qu'une arène décrit l'ensemble des traces « légales » pour un type. Un

λ -terme (ou, de façon équivalente par isomorphisme de Curry-Howard, une preuve) va quant à lui être représenté par une *stratégie*, c'est-à-dire un ensemble de traces, encore appelées *parties*, valides vis-à-vis de l'arène, qui va déterminer comment le terme va répondre à l'opposant. La figure 3 présente par exemple les deux parties qui constituent la stratégie correspondant à la fonction **not** (la négation booléenne). L'interaction entre **not** et son envi-

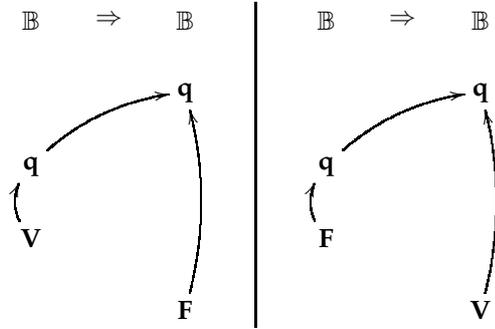


FIG. 3 – Stratégie correspondant à **not**.

ronnement (l'Opposant) va se dérouler de la façon suivante. L'environnement initie le calcul en demandant sa valeur à **not**. **not** demande alors la valeur de son argument. Si l'Opposant lui répond **V** alors **not** répond **F**, et vice versa.

Les flèches, encore appelées *pointeurs*, sont nécessaires car elles permettent de savoir quel coup justifie un coup. Si on ne les faisait pas figurer dans les parties, on pourrait trouver deux λ -termes qui sont interprétés par la même stratégie (termes de Kierstead)¹. Une partie sera donc représentée par une *suite pointée* alternée c'est-à-dire une suite alternée de coups et une structure de pointeurs sur ces coups.

Formellement, on définit les traces comme des mots munis d'une structure de pointeurs de la façon suivante.

Définition 2 (Suite pointée)

Une suite pointée sur l'arène A est un couple (s, f) où s est une suite finie $m_1 \cdot \dots \cdot m_k$ de coups de A et f est une fonction de $\llbracket 1, k \rrbracket$ dans $\llbracket 0, k - 1 \rrbracket$ telle que :

- $f(i) < i$,
- si $f(i) = 0$ alors m_i est un coup initial de A ,
- si $f(i) = j \neq 0$ alors m_j justifie m_i dans A .

La suite pointée vide est notée ε .

Les images $f(i) = j$ de f , sont représentées par des flèches de m_i vers m_j dans nos diagrammes (e.g. fig. 3).

¹Les pointeurs ne seront plus indispensables dans les parties suivantes du rapport car nous nous attacherons à modéliser des termes linéaires (i.e. sans répétition de coup) : nous nous sommes intéressés à la logique linéaire plutôt qu'à la logique intuitionniste.

Définition 3 (Partie)

Une partie sur l'arène A est une suite pointée sur A dont la polarité des coups est alternée.

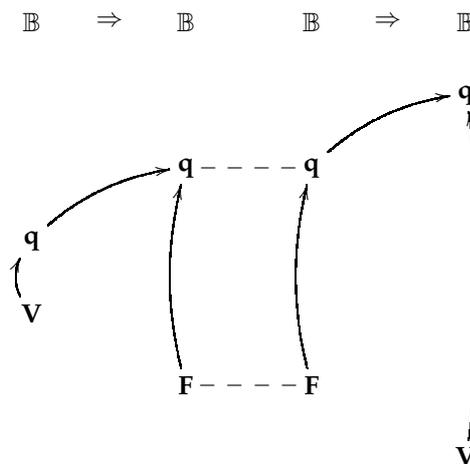
On peut alors définir les stratégies, qui sont l'équivalent en sémantique des jeux des termes ou des preuves, comme des ensembles de parties qui vérifient certaines propriétés de cohérence.

Définition 4 (Stratégie)

Une stratégie σ sur l'arène A , noté $\sigma : A$, est un ensemble de parties sur l'arène A :

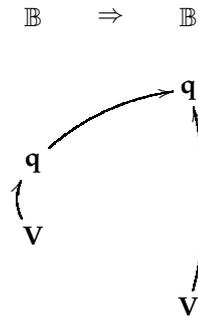
- non vide,
- dont les parties sont de longueur paire,
- clos par préfixes de longueur paire,
- déterministe (si $sm \in \sigma$ et $sn \in \sigma$ alors $m = n$ et ils pointent sur le même coup).

Soient $\sigma : A \Rightarrow B$ et $\tau : B \Rightarrow C$ deux stratégies. L'interaction entre deux parties $s \in \sigma$ et $t \in \tau$, si elle existe, est définie de la sorte. On démarre la partie dans C en suivant t et on continue tant que les coups sont dans C . Si à un moment t décide de jouer un coup m dans B alors on joue ce coup (avec une polarité inversée) dans s et on continue dans s (dans A) jusqu'au prochain coup joué dans B que l'on va recopier en inversant la polarité dans t , et ainsi de suite. La composée $\sigma; \tau : A \Rightarrow C$ de σ et de τ sera alors l'ensemble des interactions (qui sont bien définies) entre les parties de σ et celles de τ , dont on aura caché les coups joués dans B (ce seront bien des parties sur l'arène $A \Rightarrow C$). Calculons par exemple la valeur de **not; not** en **V**. L'interaction correspondante est la suivante :



La stratégie **not; not** contiendra donc la partie suivante, obtenue en cachant dans le dia-

gramme précédent l'arène \mathbb{B} dans laquelle s'est déroulée l'interaction.

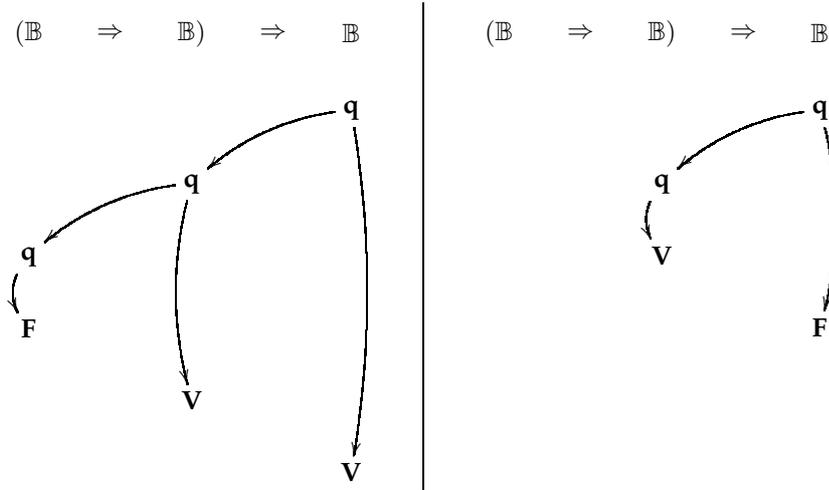


Il est aisé de constater, en regardant la partie correspondant à l'évaluation de **not; not** en \mathbf{F} , que la stratégie correspondant à **not; not** est la même que celle correspondant à l'identité sur les booléens. Par souci de concision, nous ne donnerons pas ici la définition formelle de la composée $\sigma; \tau$ de deux stratégies.

On peut montrer que l'on peut construire une catégorie ayant pour objets les arènes, et pour morphismes entre deux arènes A et B , les stratégies sur l'arène $A \Rightarrow B$; la composition de deux morphismes $\sigma : A \rightarrow B$ et $\tau : B \rightarrow C$ étant définie par $\tau \circ \sigma = \sigma; \tau$. Dans cette catégorie, \top est un objet terminal et \times est une loi monoïdale symétrique; de plus cette catégorie est close par \Rightarrow . Cependant, ce n'est pas un modèle du λ -calcul car la loi monoïdale n'est pas un produit cartésien.

Pour avoir un modèle catégorique du λ -calcul simplement typé (i.e. une CCC), il faut restreindre les stratégies considérées aux stratégies *innocentes*. Intuitivement une stratégie est innocente si elle ne tient pas compte des calculs intermédiaires de son opposant. Par exemple, la stratégie sur l'arène $(\mathbb{B} \Rightarrow \mathbb{B}) \Rightarrow \mathbb{B}$, qui contient les deux parties suivantes, ne sera pas innocente (son comportement ne correspondra pas à celui d'un λ -terme) car son

résultat sur une entrée f n'est pas le même suivant que f utilise ou non son argument :



Plus formellement, l'innocence est définie grâce à la notion de *vue* : une stratégie ne peut pas jouer en fonction de tout son passé (i.e. de tous les coups qui ont été joués jusqu'à présent) mais seulement d'une partie de celui-ci, sa vue.

Définition 5 (Vue)

Soit s une partie sur l'arène A . La vue $\ulcorner s \urcorner$ de s est la sous-suite pointée de s définie récursivement par :

- $\ulcorner \varepsilon \urcorner = \varepsilon$;
- $\ulcorner s \cdot n \urcorner = \ulcorner s \urcorner \cdot n$ si $\lambda_A(n) = +1$;
- $\ulcorner s \cdot n \urcorner = n$ si n est initial ;
- $\ulcorner s \cdot m \cdot t \cdot n \urcorner = \ulcorner s \cdot m \urcorner \cdot n$ sinon.

Une stratégie σ est innocente lorsque son comportement ne dépend que de sa vue (i.e. de sa position dans l'arbre de vue, cf. remarque 1).

Définition 6 (Stratégie innocente)

Une stratégie $\sigma : A$ est dite innocente si :

- pour toute partie $s \cdot n$ de σ , n est justifié par un coup de $\ulcorner s \urcorner$;
- si $s \cdot m \cdot n \in \sigma$, si $t \in \sigma$, si $t \cdot m$ est une partie sur A et si $\ulcorner s \cdot m \urcorner = \ulcorner t \cdot m \urcorner$ alors la partie $t \cdot m \cdot n$ est dans σ .

On peut montrer que l'on peut définir une sous-catégorie de la précédente dont les morphismes sont les stratégies innocentes et que cette catégorie est cartésienne close (c'est donc un modèle catégorique du λ -calcul simplement typé). En outre, c'est un modèle pleinement complet² du λ -calcul simplement typé avec \top et \perp comme seuls types de base³ : l'innocence

²Si $\llbracket A \rrbracket$ et $\llbracket B \rrbracket$ sont des objets qui sont l'interprétation de types A et B alors tous les morphismes entre ces objets sont l'interprétation de termes de type $A \Rightarrow B$.

³De façon précise, il faut aussi supposer que les stratégies sont finies et totales. Si l'on ajoute d'autres types de

caractérise donc le comportement des λ -termes.

Remarque 1

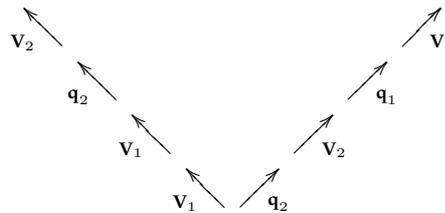
L'ensemble des vues des parties d'une stratégie innocente forme un arbre qui est isomorphe à l'arbre de Böhm du terme duquel la stratégie est l'interprétation : les vues permettent de retrouver la syntaxe à partir de la sémantique.

2 Une approche asynchrone et géométrique de l'innocence

Dans [Mel04], Melliès propose de faire le lien entre la sémantique des jeux et la théorie de la concurrence – les traces de Mazurkiewicz en particulier. Nous avons tenu à présenter les points importants de cet article car il a servi de base à notre travail et c'est dans cette direction que nous avons orienté nos recherches. Il part en particulier de la constatation que les traces en sémantique des jeux sont encore beaucoup étudiées comme des objets à une dimension alors que la théorie de la concurrence nous incite à penser que ce sont des objets 2-dimensionnels.

2.1 La positionnalité

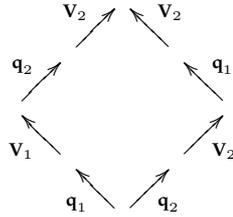
À titre d'exemple, considérons le jeu (l'arène) produit $\mathbb{B} \otimes \mathbb{B}$. Les parties valides sur ce jeu sont obtenues par entrelacement des parties de deux instances de \mathbb{B} . Ainsi, le jeu $\mathbb{B} \otimes \mathbb{B}$ ressemble à ceci :



Ces deux parties sont différentes d'un point de vue procédural mais équivalentes d'un point de vue extensionnel – elles représentent toutes les deux la valeur (\mathbf{V}, \mathbf{F}) . La première modification apportée au cadre de la sémantique des jeux pour prendre cela en compte consiste à « tordre » les deux chemins pour les faire se rejoindre : les jeux ne se font plus sur des arbres

base, le type \mathbb{B} des booléens par exemple, alors il faut imposer une condition supplémentaire pour rester pleinement complet : le *bon parenthésage*, sinon le codage $\mathbb{B} = \perp \times \perp \Rightarrow \perp$ montre qu'il s'agit (par codage par continuations) d'un modèle complet du $\lambda\mu$ -calcul (ou encore de PCF avec contrôle).

mais sur des dags (graphes dirigés acycliques).



La principale contribution apportée par cette modification est de pouvoir distinguer nettement les *positions* du jeu, c'est-à-dire l'ensemble des coups joués jusqu'à un instant donné. Le sommet du diagramme ci-dessus est par exemple la position $\{q_1, V_1, q_2, V_2\}$ dans laquelle les deux booléens ont donné leur valeur, V . Nous verrons que les stratégies innocentes sont caractérisées par les positions qu'elles rencontrent et qu'elles ne jouent qu'en fonction de leur position, et non pas en fonction de tout leur historique (le chemin d'interaction qui a été suivi).

Ainsi, un jeu asynchrone est maintenant défini par une structure d'événements – de laquelle on peut déduire le dag associé en construisant le graphe positionnel – auquel on adjoint une polarisation des coups.

Définition 7 (Structure d'événements)

Une structure d'événements est un ensemble ordonné (M, \leq) tel que chaque élément $m \in M$ définisse un segment initial fini $m \downarrow = \{n \in M \mid n \leq m\}$.

Définition 8 (Jeu asynchrone)

Un jeu asynchrone est un triplet $A = (M_A, \leq_A, \lambda_A)$ qui consiste en :

- une structure d'événements (M_A, \leq_A) dont les éléments sont appelés les coups du jeu;
- une fonction $\lambda_A : M_A \rightarrow \{-1, +1\}$ qui associe à chaque coup une polarité (+1 pour les coups du Joueur, -1 pour les coups de l'Opposant).

Les *parties* sur un jeu A sont définies comme des suites alternées de coups qui se succèdent selon l'ordre de la structure d'événements définissant A (ce sont des chemins du graphe positionnel de A , défini ci-dessous, qui partent de la position vide $*_A$) :

Définition 9 (Position)

Une position dans un jeu asynchrone A est un sous-ensemble clos vers le bas fini de (M_A, \leq_A) .

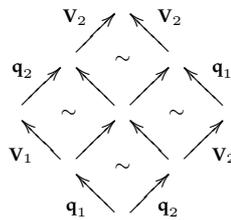
Définition 10 (Graphe positionnel)

Le graphe positionnel $\mathcal{G}(A)$ induit par un jeu asynchrone A est le graphe :

- dont les nœuds sont les positions x, y de A ;
 - dont les sommets $m : x \rightarrow y$ sont les coups m tels que $y = x \uplus \{m\}$.
- Un chemin s de x vers y est noté $s : x \rightarrow y$.

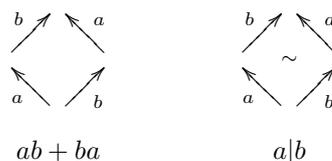
2.2 L'homotopie

Cette nouvelle formulation n'est cependant pas entièrement satisfaisante car les permutations sont globales (elles font en général permuter plus de deux coups). Une seconde étape consiste donc à « remplir » le diagramme avec des tuiles de permutation locale.



De nouvelles parties comme $q_1 \cdot q_2 \cdot v_1 \cdot v_2$ sont apparues, elles ne peuvent pas être jouées car elles ne sont pas alternées mais permettent d'envisager les jeux dans un cadre véritablement concurrent et rendent possible l'étude qui est menée dans [Mel04].

Le symbole \sim dans le diagramme ci-dessus symbolise une relation d'équivalence sur les chemins appelée *homotopie*. Deux chemins homotopes peuvent être déduits l'un de l'autre par une permutation de coups indépendants : elle permet de rendre compte de cette indépendance et de donner une sémantique véritablement concurrente (dans le sens de *true concurrency*). On pourra trouver dans [Gou00] une introduction aux principes sous-jacents qui ont motivé l'introduction de cette relation. Intuitivement, si a et b sont deux actions, elle permet de distinguer si l'on peut les faire l'une après l'autre et le contraire (penser à $ab + ba$ en CCS) ou si ces deux actions sont véritablement indépendantes (comme dans $a|b$ en CCS) auquel cas les chemins seront homotopes. On peut penser que deux chemins sont homotopes si l'on peut déformer continûment l'un en l'autre. Au contraire, si deux chemins ne sont pas homotopes, cela indique qu'il y a un « trou » dans l'espace sous-jacent.



Par exemple, considérons un langage impératif avec des cellules mémoires, et supposons que a est l'action qui consiste à affecter une certaine valeur à une cellule mémoire x et que b est l'action qui consiste à lire la valeur d'une cellule y . Alors les actions a et b sont indépendantes (i.e. $ab \sim ba$), sauf si $x = y$. Cela ne change rien d'écrire d'abord sur x et de lire le contenu de y ou de faire le contraire dans le cas où $x \neq y$, les deux séquences d'actions seront donc homotopes dans ce cas, mais si $x = y$ alors on peut faire les deux actions l'une après l'autre dans n'importe quel ordre, mais cet ordre importe (et il n'y aura pas homotopie des séquences d'actions).

Définition 11 (Homotopie)

Étant donnés deux chemins $s, s' : x \rightarrow y$ dans le graphe positionnel $\mathcal{G}(A)$ d'un jeu asynchrone A et m et n étant deux coups de M_A , on écrit $s \stackrel{1}{\sim} s'$ lorsque $s = m \cdot n$ et $s' = n \cdot m$. La relation d'homotopie \sim entre deux chemins est définie comme la plus petite relation d'équivalence contenant $\stackrel{1}{\sim}$ et close par composition.

Ces « solutions de continuité » de l'espace devraient nous permettre de modéliser de façon géométrique des mécanismes propres aux langages de la concurrence comme CCS et le π -calcul ou encore à des modèles de calcul comme les circuits asynchrones [Fos04], c'est pourquoi nous avons tenu à conserver la notion d'homotopie dans notre modèle, même si l'étude précise de ces mécanismes fera l'objet d'études ultérieures.

2.3 La concurrence

L'une des améliorations que l'on souhaiterait apporter dans le modèle présenté ci-dessus serait de le rendre plus concurrent. Dans les modèles de logique linéaire *polarisée* (comme en ludique), l'alternance des coups joueur / opposant apparaît naturellement ; mais dans le cadre général de la logique linéaire, on aimerait pouvoir se dispenser de l'alternance. Considérons par exemple une formule de la forme $A \otimes B \otimes C$, où A, B et C sont des formules négatives. Une stratégie correspond à une exploration de la formule. En logique linéaire polarisée, le premier coup m d'une stratégie sur le jeu $A \otimes B \otimes C$ correspondra à une exploration simultanée des deux tenseurs, ceux-ci étant vus comme formant un connecteur unique, appelé connecteur synthétique. Ainsi m correspondra à la règle

$$\frac{\Gamma_1 \vdash A \quad \Gamma_2 \vdash B \quad \Gamma_3 \vdash C}{\Gamma_1, \Gamma_2, \Gamma_3 \vdash A \otimes B \otimes C}$$

Avec une approche non polarisée de la logique ceci n'est plus possible : un coup correspond à l'application d'une règle ne concernant qu'un seul connecteur. Pour « casser » les deux tenseurs, il faut maintenant deux coups joueur distincts. Comme on ne peut pas jouer ces deux coups successivement dans un cadre alterné, la solution utilisée par Melliès dans [Mel05] est de rajouter des coups « invisibles » qui ne sont là que pour préserver l'alternance ; ceci est rendu possible par l'introduction de conditions de gain et d'un quotientage des stratégies suivant leurs positions externes. Cependant, on veut que le tenseur reste associatif : on veut que les preuves dont les débuts sont présentés à la figure 4 soient « équivalentes » ; dans notre cadre, elles seront homotopes.

$$\frac{\frac{\frac{\vdots}{\Gamma_1 \vdash A} \quad \frac{\frac{\vdots}{\Gamma_2 \vdash B}}{\Gamma_2, \Gamma_3 \vdash B \otimes C}}{\Gamma_1, \Gamma_2 \vdash A \otimes B} \quad \frac{\vdots}{\Gamma_3 \vdash C}}{\Gamma_1, \Gamma_2, \Gamma_3 \vdash A \otimes B \otimes C} \quad \text{et} \quad \frac{\frac{\vdots}{\Gamma_1 \vdash A} \quad \frac{\frac{\frac{\vdots}{\Gamma_2 \vdash B} \quad \frac{\frac{\vdots}{\Gamma_3 \vdash C}}{\Gamma_2, \Gamma_3 \vdash B \otimes C}}{\Gamma_1, \Gamma_2, \Gamma_3 \vdash A \otimes B \otimes C}}{\Gamma_1, \Gamma_2, \Gamma_3 \vdash A \otimes B \otimes C}}$$

FIG. 4 – Deux façons de prouver $A \otimes B \otimes C$.

Ne pas imposer l'alternance des polarités des parties est la principale des modifications que nous avons faite. Nous verrons qu'elle a une forte incidence sur le comportement du modèle. Nous avons aussi cherché à généraliser la définition des jeux : les graphes sur lesquels sont joués les jeux n'ont pas besoin d'être des dags (i.e. caractérisés par des ordres partiels). Nous jouons sur des graphes plus généraux appelés *graphes asynchrones* qui ne sont que « localement » caractérisés par des ordres partiels.

Des propriétés importantes des stratégies innocentes sur les jeux asynchrones sont démontrées dans [Mel04], nous avons voulu les retrouver dans notre cadre.

- Une caractérisation diagrammatique de l'innocence est donnée.
- Les stratégies innocentes sont purement *positionnelles* : une stratégie innocente est caractérisée par les positions qu'elle rencontre.

Nous développerons par la suite ces points en détail.

3 Graphes asynchrones

Ici commence véritablement l'exposé de notre travail. Nous avons commencé par étudier les propriétés de certains graphes, les graphes asynchrones. Ces graphes, lorsqu'ils vérifient une propriété particulière appelée *cube*, vont caractériser l'ensemble des parties formant une stratégie innocente.

3.1 Premières définitions

Soit M un ensemble fixe dont les éléments seront appelés *coups*.

Définition 12 (Graphe asynchrone)

Un graphe asynchrone sur M est un triplet $\mathcal{G} = (V_{\mathcal{G}}, E_{\mathcal{G}}, \sim_{\mathcal{G}})$ tel que $(V_{\mathcal{G}}, E_{\mathcal{G}})$ soit un (multi-)graphe dont les arêtes sont étiquetées par les éléments de M ($E_{\mathcal{G}}$ est un sous-ensemble de $V_{\mathcal{G}} \times M \times V_{\mathcal{G}}$) qui satisfait les conditions suivantes.

– Non-répétition. Un chemin dans \mathcal{G} ne contient pas deux fois le même coup

$$\forall m_0 \cdot \dots \cdot m_n \in \mathcal{P}(\mathcal{G}), \forall i, j, \quad i \neq j \Rightarrow m_i \neq m_j$$

– Déterminisme. Si (v, m, v') et (v, m, v'') sont deux arêtes alors $v' = v''$ et de façon duale, si (v', m, v) et (v'', m, v) sont deux arêtes alors $v' = v''$.

Un chemin $(v_0, m_0, v_1), (v_1, m_1, v_2), \dots, (v_n, m_n, v_{n+1})$ dans \mathcal{G} sera écrit $m_0 \cdot m_1 \cdot \dots \cdot m_n$, ou $m_0 \cdot m_1 \cdot \dots \cdot m_n : v_0 \rightarrow v_{n+1}$ pour indiquer sa source et sa destination. L'ensemble des chemins de \mathcal{G} est noté $\mathcal{P}(\mathcal{G})$.

De plus, $\sim_{\mathcal{G}}$ est une relation d'équivalence, appelée homotopie, qui est la plus petite relation d'équivalence qui contient la relation $\overset{1}{\sim}_{\mathcal{G}}$ définie par

$$\forall s, s' \in \mathcal{P}(\mathcal{G}), \quad s \overset{1}{\sim}_{\mathcal{G}} s' \quad \Rightarrow \quad \exists s_1, s_2 \in \mathcal{P}(\mathcal{G}), \exists m, n \in M, \quad s = s_1 \cdot m \cdot n \cdot s_2 \wedge s' = s_1 \cdot n \cdot m \cdot s_2$$

Nous imposons la propriété de non-répétition car le modèle que nous projetons de faire est un modèle de logique linéaire et cela simplifie l'énoncé et les preuves des propriétés qui vont suivre. La condition de déterminisme est nécessaire pour que la composition soit bien définie (sans modifier profondément le modèle comme en faisant un modèle non déterministe, c'est à dire où une stratégie peut interagir de plusieurs façons différentes avec un même environnement).

Lemme 1

On peut montrer simplement les propriétés suivantes.

1. Si deux chemins sont homotopes alors ils ont les mêmes source et destination.
2. La relation $\sim_{\mathcal{G}}$ est respectée par concaténation des chemins : si $s_1 : v \rightarrow v', s'_1 : v \rightarrow v', s_2 : v' \rightarrow v''$ et $s'_2 : v' \rightarrow v''$ sont des chemins de \mathcal{G} , $s_1 \sim_{\mathcal{G}} s'_1$ et $s_2 \sim_{\mathcal{G}} s'_2$ alors $s_1 \cdot s_2 \sim_{\mathcal{G}} s'_1 \cdot s'_2$.

Dans la suite, nous allons souvent ne pas vouloir distinguer deux chemins homotopes ; les propriétés principales qui vont suivre ne dépendront en effet que de la classe d'hom-

topie des chemins. Pour simplifier notre exposé, nous allons donc introduire une catégorie des chemins modulo homotopie avec laquelle nous allons travailler.

Définition 13 (Classe d'homotopie)

Si s est un chemin dans \mathcal{G} , la classe d'homotopie de s dans \mathcal{G} , notée $[s]_{\mathcal{G}}$, est la classe d'équivalence de s par $\sim_{\mathcal{G}}$.

Définition 14 (Catégorie des chemins)

Un graphe asynchrone \mathcal{G} induit une catégorie $[\mathcal{G}]$ qui est la catégorie libre engendrée par \mathcal{G} dont les morphismes sont quotientés par $\sim_{\mathcal{G}}$.

Les objets de $[\mathcal{G}]$ sont les sommets de \mathcal{G} et les morphismes entre deux objets v et v' sont les classes d'équivalence modulo $\sim_{\mathcal{G}}$ des chemins de \mathcal{G} entre v et v' . L'identité d'un objet v est $[\varepsilon_v]_{\mathcal{G}}$ (le chemin vide) et la composition est définie par $[t]_{\mathcal{G}} \circ [s]_{\mathcal{G}} = [s \cdot t]_{\mathcal{G}}$. La composition est bien définie (par le lemme 1) et les axiomes requis pour définir une catégorie sont vérifiés.

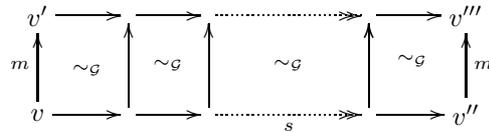
Nous allons maintenant introduire des notions qui nous seront utiles dans les preuves qui vont suivre.

Deux chemins sont dit indépendants dans \mathcal{G} si l'on peut les entrelacer de n'importe quelle façon dans \mathcal{G} et que tous ces entrelacements sont homotopes.

Définition 15 (Indépendance)

La relation d'indépendance dans \mathcal{G} entre une arête $m : v \rightarrow v'$ et un chemin $s : v \rightarrow v''$, notée $m \perp_{\mathcal{G}} s$, est définie par induction sur s par :

- $m \perp_{\mathcal{G}} \varepsilon$;
- si s est un chemin de \mathcal{G} et n un coup tel que $m \perp_{\mathcal{G}} s, s \cdot n \cdot m \in \mathcal{P}(\mathcal{G}), s \cdot m \cdot n \in \mathcal{P}(\mathcal{G})$ et $s \cdot n \cdot m \sim_{\mathcal{G}} s \cdot m \cdot n$ alors $m \perp_{\mathcal{G}} s \cdot n$.

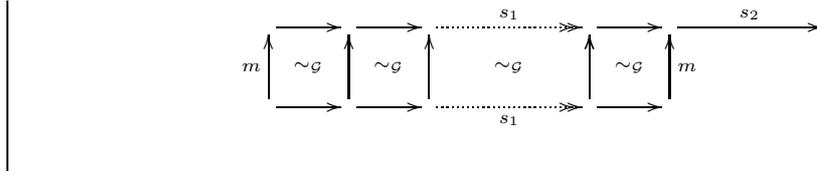


Un coup initial m d'un chemin s modulo homotopie est un coup de s qui peut être « tiré » jusqu'au début de s en ne passant que par des chemins homotopes.

Définition 16 (Coups initiaux d'un chemin)

Si s est un chemin dans \mathcal{G} , l'ensemble des coups initiaux de s modulo homotopie, noté $\chi_{\mathcal{G}}(s)$ est défini par

$$\chi_{\mathcal{G}}(s) = \{m \in E \mid \exists s_1, s_2, \quad s = s_1 \cdot m \cdot s_2 \wedge m \perp_{\mathcal{G}} s_1\}$$



Enfin, le résidu d'un chemin s à travers un chemin t , s'il existe, est ce que serait devenu s si l'on joue t avant de jouer s (c'est-à-dire les coups qu'il reste à jouer après avoir joué t pour pouvoir avoir joué s).

Définition 17 (Résidu d'un chemin)

Si $s : v \rightarrow w$ est un chemin tel que $m \in \chi_G(s)$, le résidu s/m de s par m est défini par induction par :

$$(s \cdot n)/m = \begin{cases} s & \text{si } m = n, \\ (s/m) \cdot n & \text{sinon.} \end{cases}$$

Remarque 2

Si $m \in \chi_G(s)$ alors $s \sim_G m \cdot (s/m)$.

Remarque 3

La définition d'indépendance peut être étendue à deux chemins par :

- $\varepsilon I_G t$;
- $s \cdot m I_G t$ ssi $s I_G t$ et $m I_G (t/s)$.

et celle de résidu par :

- $s/\varepsilon = s$;
- $s/(t \cdot m) = (s/m)/t$ (s'il existe !).

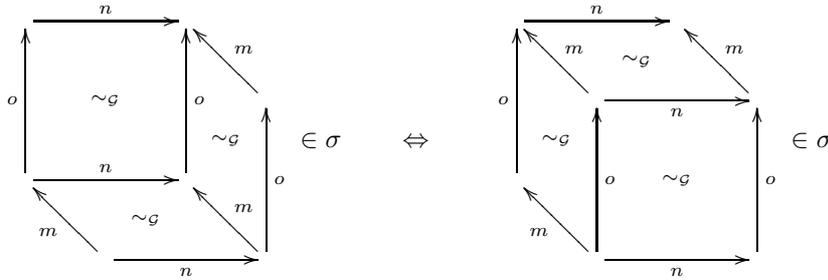
3.2 La propriété du cube

Nous allons étudier les propriétés de certains graphes qui vérifient une condition diagrammatique, que nous avons appelée cube. En particulier, nous verrons que les chemins dans de tels graphes sont localement⁴ les chemins engendrés par une structure d'événements. Cette condition, transposée à des ensembles de chemins, sera à la base de notre définition de l'innocence : nous aurons une caractérisation des ensembles de chemins qui sont engendrés par une stratégie innocente.

⁴Plus précisément sur une tranche, au sens de la logique linéaire.

Définition 18 (Propriété du cube)

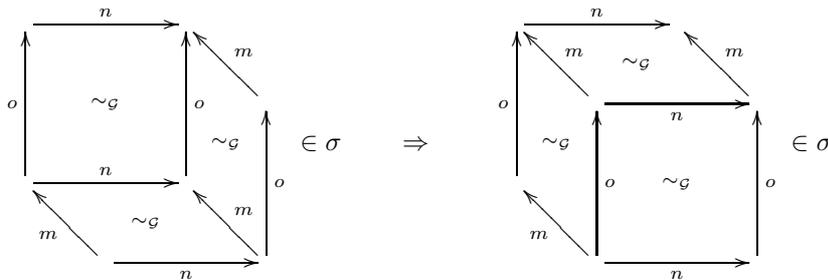
On dit qu'un graphe asynchrone \mathcal{G} vérifie la propriété du cube lorsque pour tous coups m, n et o , $m \cdot o \cdot n : v \rightarrow v'$, $m \cdot n \cdot o : v \rightarrow v'$, $n \cdot m \cdot o : v \rightarrow v'$ et $n \cdot o \cdot m : v \rightarrow v'$ sont quatre chemins de \mathcal{G} deux à deux homotopes si et seulement si $m \cdot o \cdot n : v \rightarrow v'$, $o \cdot m \cdot n : v \rightarrow v'$, $o \cdot n \cdot m : v \rightarrow v'$ et $n \cdot o \cdot m : v \rightarrow v'$ sont quatre chemins de \mathcal{G} deux à deux homotopes.



Cette propriété se décompose en deux propriétés duales (on peut obtenir l'une à partir de l'autre en inversant le sens des flèches) : la stabilité et la costabilité.

Définition 19 (Stabilité)

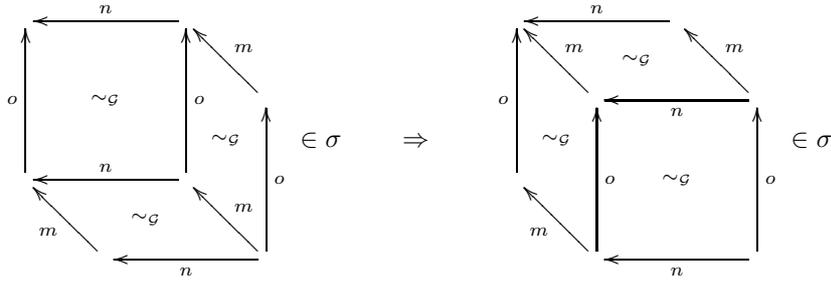
Un graphe asynchrone \mathcal{G} est dit stable lorsque pour tous coups m, n et o , si $m \cdot o \cdot n : v \rightarrow v'$, $m \cdot n \cdot o : v \rightarrow v'$, $n \cdot m \cdot o : v \rightarrow v'$ et $n \cdot o \cdot m : v \rightarrow v'$ sont des chemins de \mathcal{G} deux à deux homotopes, alors $o \cdot m \cdot n : v \rightarrow v'$ et $o \cdot n \cdot m : v \rightarrow v'$ sont aussi des chemins de \mathcal{G} homotopes aux précédents.



Définition 20 (Costabilité)

Un graphe asynchrone \mathcal{G} est dit costable lorsque pour tous coups m, n et o , si $n \cdot m \cdot o : v \rightarrow v'$, $m \cdot n \cdot o : v \rightarrow v'$, $m \cdot o \cdot n : v \rightarrow v'$ et $o \cdot m \cdot n : v \rightarrow v'$ sont des chemins de \mathcal{G} deux à deux homotopes, alors $n \cdot o \cdot m : v \rightarrow v'$ et $o \cdot n \cdot m : v \rightarrow v'$ sont aussi des chemins de

\mathcal{G} homotopes aux précédents.



Remarque 4

La définition de stabilité telle que nous la présentons ci-dessus a d'abord été introduite dans [GLM92] et [PSS90]. Le dernier article montre en particulier qu'elle correspond à la stabilité des fonctions entre *dI*-domaines, telle que définie par Berry.

Dans un graphe asynchrone costable, les coups initiaux d'un chemin ne dépendent que de sa classe d'homotopie.

Lemme 2

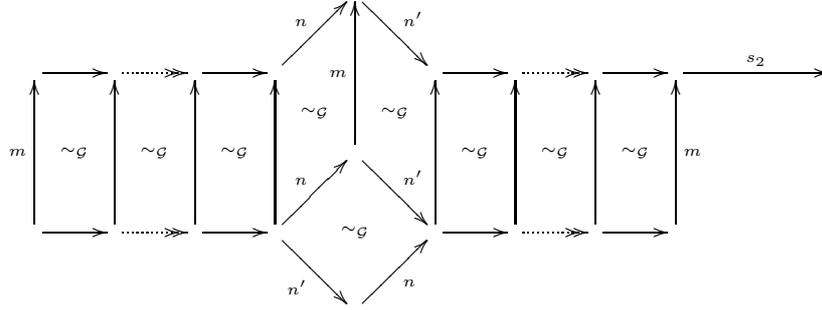
Soient s et t deux chemins dans un graphe asynchrone costable \mathcal{G} . Si $m \in \chi_{\mathcal{G}}(s)$ et $s \sim_{\mathcal{G}} t$ alors :

1. $m \in \chi_{\mathcal{G}}(t)$;
2. $s/m \sim_{\mathcal{G}} t/m$.

Démonstration : Par induction, on peut se contenter de montrer les deux propriétés dans les cas où $s \stackrel{1}{\sim}_{\mathcal{G}} t$. Comme $m \in \chi_{\mathcal{G}}(s)$, il existe deux chemins s_1 et s_2 tels que $s = s_1 \cdot m \cdot s_2$ et $m \text{I}_{\mathcal{G}} s_1$, c'est-à-dire que pour tous chemins s'_1, s''_1 tels que $s_1 = s'_1 \cdot s''_1$, on a $s'_1 \cdot m \cdot s''_1 \cdot s_2 \in \mathcal{P}(\mathcal{G})$.

1. Étant donné, par hypothèse, que $s \stackrel{1}{\sim}_{\mathcal{G}} t$, les cas suivants sont envisageables.
 - Il existe deux coups n et n' et deux chemins s'_2 et s''_2 tels que $s_2 = s'_2 \cdot n \cdot n' \cdot s''_2$ et $t = s_1 \cdot m \cdot s'_2 \cdot n' \cdot n \cdot s''_2$. Comme $m \text{I}_{\mathcal{G}} s_1$, on a $m \in \chi_{\mathcal{G}}(t)$.
 - Il existe un coup n et un chemin s'_2 tel que $s_2 = n \cdot s'_2$ et $t = s_1 \cdot n \cdot m \cdot s'_2$. Comme $m \text{I}_{\mathcal{G}} s_1$ et $s_1 \cdot n \cdot m \in \mathcal{P}(\mathcal{G})$, on a $m \text{I}_{\mathcal{G}}(s_1 \cdot m)$, et par suite $m \in \chi_{\mathcal{G}}(t)$.
 - Il existe un coup n et un chemin s'_1 tels que $s_1 = s'_1 \cdot n$ et $t = s'_1 \cdot m \cdot n \cdot s_2$. Comme $m \text{I}_{\mathcal{G}} s'_1 \cdot n$, on a aussi $m \text{I}_{\mathcal{G}} s'_1$. D'où $m \in \chi_{\mathcal{G}}(t)$.
 - Il existe deux coups n et n' et deux chemins s'_1 et s''_1 tels que $s_1 = s'_1 \cdot n \cdot n' \cdot s''_1$ et

$$t = s'_1 \cdot n' \cdot n \cdot s''_1 \cdot s_2.$$



Comme $m \in \chi_{\mathcal{G}}(s_1)$, on a $m \in \chi_{\mathcal{G}}(s'_1)$ car s'_1 est un préfixe de s_1 . Par hypothèse, on sait que $n \cdot n' \cdot m$, $n' \cdot n \cdot m$, $n \cdot m \cdot n'$ et $m \cdot n \cdot m'$ sont des chemins de \mathcal{G} deux à deux homotopes et donc, par costabilité, $n' \cdot m \cdot n$ et $n' \cdot n \cdot m$ sont aussi des chemins homotopes de \mathcal{G} (en particulier $s'_1 \cdot n' \cdot n$ est un chemin de \mathcal{G}). Ceci implique que $s'_1 \cdot n' \cdot m \cdot n \cdot s''_1 \cdot s_2$ est un chemin de \mathcal{G} . En outre, s'il existe deux chemins u et u' tels que $s''_1 = u \cdot u'$, alors, comme $m \in \chi_{\mathcal{G}}(s_1)$, $u \cdot m \cdot u'$ est un chemin de \mathcal{G} et par suite $s'_1 \cdot n' \cdot n \cdot u \cdot m \cdot u' \cdot s_2$ est un chemin de \mathcal{G} .
Finalement, on en conclut $m \in \chi_{\mathcal{G}}(t)$.

2. Comme $m \in \chi_{\mathcal{G}}(s)$, il existe deux chemins s_1 et s_2 tels que $s = s_1 \cdot m \cdot s_2$. On sait que $s \sim_{\mathcal{G}} t$, et donc t et s contiennent les mêmes coups : le coup m apparaît dans t et il existe deux chemins t_1 et t_2 tels que $t = t_1 \cdot m \cdot t_2$. Par définition de $\chi_{\mathcal{G}}(s)$, on sait que $s \sim_{\mathcal{G}} m \cdot s_1 \cdot s_2$, d'où $m \cdot s_1 \cdot s_2$ est un chemin de \mathcal{G} . Par la première partie de la démonstration, on a donc $m \in \chi_{\mathcal{G}}(t)$, et $m \cdot t_1 \cdot t_2$ est un chemin de \mathcal{G} .

Par hypothèse, on a $s \stackrel{1}{\sim}_{\mathcal{G}} t$: t peut être obtenu à partir de s en permutant deux coups. Si l'un de ces deux coups était m , on a $m \cdot s_1 \cdot s_2 = m \cdot t_1 \cdot t_2$ et donc $s/m = s_1 \cdot s_2 = t_1 \cdot t_2 = g/m$. Sinon, ces coups étaient tous les deux dans s_1 ou dans s_2 , et dans ce cas, on a immédiatement $s/m = s_1 \cdot s_2 \stackrel{1}{\sim}_{\mathcal{G}} t_1 \cdot t_2 = t/m$. \square

Nous montrons finalement que si $[\mathcal{G}]$ est un graphe vérifiant la propriété du cube alors ses morphismes sont à la fois épi et mono.

Lemme 3

Si \mathcal{G} est un graphe asynchrone costable, les morphismes de $[\mathcal{G}]$ sont épi.

Démonstration : Soient $[s]_{\mathcal{G}}$, $[t]_{\mathcal{G}}$ et $[u]_{\mathcal{G}}$ trois morphismes de $[\mathcal{G}]$ tels que $[t]_{\mathcal{G}} \circ [s]_{\mathcal{G}} = [u]_{\mathcal{G}} \circ [s]_{\mathcal{G}}$. s étant un chemin, par induction il suffit de montrer le résultat lorsque s est réduit à un seul coup m , et par symétrie on peut se contenter de montrer $[t]_{\mathcal{G}} \subseteq [u]_{\mathcal{G}}$.

Soit t' un chemin dans $[t]_{\mathcal{G}}$. t' est tel que $t \sim_{\mathcal{G}} t'$. Comme le chemin $m \cdot t'$ est dans $[t']_{\mathcal{G}} \circ [m]_{\mathcal{G}} = [m \cdot t']_{\mathcal{G}}$, il est aussi dans $[u]_{\mathcal{G}} \circ [m]_{\mathcal{G}}$, d'où $m \cdot t' \sim_{\mathcal{G}} m \cdot u$. Par définition de $\chi_{\mathcal{G}}$, on a $m \in \chi_{\mathcal{G}}(t')$ et $m \in \chi_{\mathcal{G}}(u)$. En utilisant le lemme précédent, on montre que ceci implique

$t' = (m \cdot t')/m \sim_{\mathcal{G}} (m \cdot u)/m = u$. Enfin, par transitivité de $\sim_{\mathcal{G}}$, on peut conclure que $t \sim_{\mathcal{G}} u$, ou de façon équivalente que $t \in [u]_{\mathcal{G}}$. \square

Lemme 4

Si \mathcal{G} est un graphe asynchrone stable, les morphismes de $[\mathcal{G}]$ sont mono.

Démonstration : C'est le dual du lemme précédent. \square

3.3 Le treillis des factorisations d'un chemin

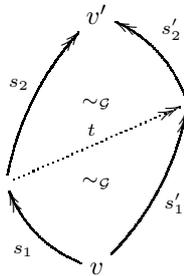
Soient \mathcal{G} un graphe asynchrone vérifiant la propriété du cube et $s : v \rightarrow v'$ un chemin donné dans \mathcal{G} .

Nous allons montrer que l'ensemble des préfixes (et, de façon duale, l'ensemble des suffixes) de s modulo $\sim_{\mathcal{G}}$ a une structure de treillis distributif. Il est donc engendré par une structure d'événements (corollaire 2). En particulier, en appliquant cette propriété aux préfixes uniquement, on en déduira que l'ensemble des chemins qui peuvent être complétés pour atteindre une position commune donnée sera engendré par une structure d'événements. C'est en ce sens que \mathcal{G} est localement caractérisé par une structure d'événements.

Définition 21 (Catégorie des factorisations d'un chemin)

La catégorie des factorisations du chemin $[s]$ modulo homotopie, notée L_s , est la catégorie dont :

- les objets sont les paires de morphismes $([s_1], [s_2])$ et $[\mathcal{G}]$ telles que $[s_2] \circ [s_1] = [s]$;
- les flèches entre $([s_1], [s_2])$ et $([s'_1], [s'_2])$ sont les morphismes $[t]$ de $[\mathcal{G}]$ tels que $[t] \circ [s_1] = [s'_1]$ et $[s'_2] \circ [t] = [s_2]$.



Bien sûr L_s ne dépend pas du représentant choisi de la classe d'équivalence $[s]$.

Cette construction est générale. Dans notre cas, les morphismes étant épi et mono (lemmes 3 et 4), on peut sans perte de généralité ne travailler qu'avec les préfixes de s et le dual des

résultats s'appliquera aux suffixes de s . Par abus de notation, nous écrirons « $[t] \in L_s$ » pour signifier « il existe un morphisme $[t']$ de $[\mathcal{G}]$ tel que $([t], [t'])$ est un objet de L_s ».

L'étude de la structure de cette catégorie va nous permettre de ramener localement la relation d'homotopie à une structure d'événements.

Lemme 5

L_s est une catégorie d'ordre (i.e. il y a au plus un morphisme entre deux objets).

Démonstration : Soient $[s]$ et $[s']$ deux objets de L_s et $[t]$ et $[t']$ deux morphismes entre ces objets.

Par définition de la catégorie, on a $[t] \circ [s] = [s'] = [t'] \circ [s]$. Les morphismes de $[\mathcal{G}]$ étant épi (lemme 3), ceci implique $[t] = [t']$. \square

Définition 22

L_s étant une catégorie d'ordre, elle induit un préordre \leq sur ses objets qui est défini par

$$[s] \leq [s'] \Leftrightarrow \text{Hom}([s], [s']) \neq \emptyset$$

Définition 23 (Coups)

Si t est un chemin de \mathcal{G} , on note $\partial(t)$ l'ensemble des coups qui apparaissent dans t . Cet ensemble est défini inductivement par :

- $\partial(\varepsilon) = \emptyset$;
- $\partial(s \cdot m) = \partial(s) \uplus \{m\}$.

Lemme 6

Si s et t sont deux chemins de \mathcal{G} tels que $s \sim_{\mathcal{G}} t$ alors $\partial(s) = \partial(t)$.

Démonstration : Par induction, on peut se contenter de traiter le cas $s \stackrel{1}{\sim}_{\mathcal{G}} t$, qui est immédiat. \square

Remarque 5

Ceci nous permet de définir, pour tout chemin t , $\partial([t]) = \partial(t)$ (cet ensemble est indépendant du représentant choisi).

Lemme 7

Le préordre \leq est inclus dans l'ordre d'inclusion des coups :

$$[t] \leq [u] \Rightarrow \partial(t) \subseteq \partial(u)$$

Démonstration: Supposons que $[s]$ et $[s']$ soient deux objets tels que $[s] \leq [s']$. Il existe donc un chemin $[t]$ tel que $[t] \circ [s] = [s']$, soit encore $s \cdot t \sim_{\mathcal{G}} s'$. Par le lemme 6, on a $\partial(s) \uplus \partial(t) = \partial(s \cdot t) = \partial(s')$. Donc $\partial(s) \subseteq \partial(s')$. \square

Corollaire 1

Le préordre \leq est un ordre.

Lemme 8

Soient $t_1 : v \rightarrow v_1$ et $t_2 : v \rightarrow v_2$ deux objets de L_s (i.e. deux préfixes du chemin s modulo homotopie). Alors

$$\partial(t_1) = \partial(t_2) \iff t_1 \sim_{\mathcal{G}} t_2$$

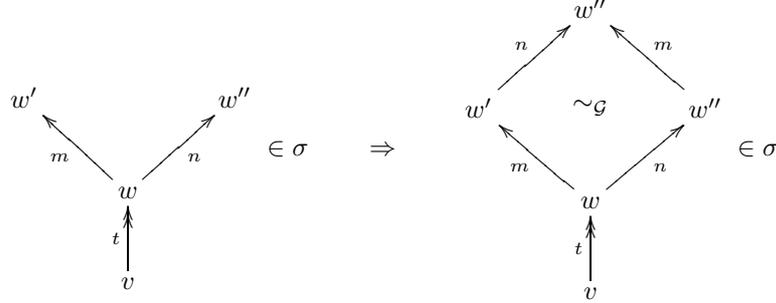
Démonstration: \Rightarrow La preuve est faite par induction sur la longueur de s . Si $s = \varepsilon$ alors $t_1 = t_2 = \varepsilon$ et $\partial(t_1) = \partial(t_2) = \emptyset$. Supposons que $s \neq \varepsilon$. Comme $t_1, t_2 \in L_s$, il existe deux chemins t'_1 et t'_2 dans \mathcal{G} tels que $t_1 \cdot t'_1 \sim_{\mathcal{G}} s$ et $t_2 \cdot t'_2 \sim_{\mathcal{G}} s$. t_1 étant non vide, il existe un coup m et un chemin t''_1 tels que $t_1 = m \cdot t''_1$ et on a $m \in \chi_{\mathcal{G}}(t_1)$ et $m \in \chi_{\mathcal{G}}(s)$. Comme $t_1 \cdot t'_1 \sim_{\mathcal{G}} t_2 \cdot t'_2$, d'après le lemme 2, on sait que $m \in \chi_{\mathcal{G}}(t_2 \cdot t'_2)$, et $m \in \chi_{\mathcal{G}}(t_2)$. On en déduit qu'il existe un chemin t''_2 de \mathcal{G} tel que $t_2 \sim_{\mathcal{G}} m \cdot t''_2$. En outre, comme $\partial(t''_2) = \partial(t_2) \setminus \{m\} = \partial(t_1) \setminus \{m\} = \partial(t''_1)$ (car un coup ne peut apparaître qu'une fois dans un chemin), par hypothèse d'induction, on sait que $t''_1 \sim_{\mathcal{G}} t''_2$ car t''_1 et t''_2 sont tous les deux des chemins dans $L_{s/m}$. Ainsi, $t_1 = m \cdot t''_1 \sim_{\mathcal{G}} m \cdot t''_2 \sim_{\mathcal{G}} t_2$.

\Leftarrow Par application directe du lemme 6. \square

D'après le lemme précédent, une classe d'homotopie de L_s étant déterminée de façon unique par l'ensemble des coups qui apparaissent dans ses chemins, dans la suite nous allons sans perte de généralité pouvoir travailler avec l'ensemble des coups apparaissant dans les chemins d'une classe d'homotopie plutôt qu'avec la classe d'homotopie elle-même.

Lemme 9 (Union locale)

Si $t : v \rightarrow w$, $t \cdot m : v \rightarrow w'$ et $t \cdot n : v \rightarrow w''$ sont trois chemins de L_s , alors il existe un sommet w''' de \mathcal{G} tel que $t \cdot m \cdot n : v \rightarrow w'''$ et $t \cdot n \cdot m : v \rightarrow w'''$ soient des chemins homotopes de L_s (i.e. $[t \cdot m \cdot n] = [t \cdot n \cdot m] \in L_s$).

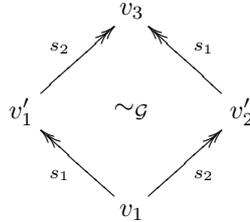


Démonstration: Par définition de L_s , il existe deux chemins $s_1 : w' \rightarrow v'$ et $s_2 : w'' \rightarrow v'$ de L_s tels que $t \cdot m \cdot s_1 \sim_{\mathcal{G}} s \sim_{\mathcal{G}} t \cdot n \cdot s_2$. D'après le lemme 2, on a donc $m \in \chi_{\mathcal{G}}(n \cdot s_2)$ et $n \in \chi_{\mathcal{G}}(m \cdot s_1)$, car $m \cdot s_1 \sim_{\mathcal{G}} n \cdot s_2$, t étant épi. Cela signifie qu'il existe quatre chemins s'_1, s''_1, s'_2 et s''_2 dans \mathcal{G} tels que $s_1 = s'_1 \cdot n \cdot s''_1$, $s_2 = s'_2 \cdot m \cdot s''_2$ et que $t \cdot m \cdot n \cdot s'_1 \cdot s''_1$ et $t \cdot n \cdot m \cdot s'_2 \cdot s''_2$ soient tous les deux des chemins de L_s , car ils sont respectivement homotopes à $t \cdot m \cdot s_1$ et $t \cdot n \cdot s_2$. De plus, d'après le lemme 8 (que l'on peut appliquer car $t \cdot m \cdot n$ et $t \cdot n \cdot m$ sont cointiaux et $\partial(t \cdot m \cdot n) = \partial(t \cdot n \cdot m)$), les destinations de $m \cdot n$ et $n \cdot m$ coïncident. \square

Les lemmes suivants montrent que les diagrammes locaux (i.e. faisant intervenir des permutations de deux coups par des tuiles d'homotopie) peuvent être étendus en diagrammes globaux (faisant intervenir des permutations de chemins indépendants). Les démonstrations se font toutes en pavant les diagrammes globaux avec les diagrammes locaux.

Lemme 10 (Union)

Si $s_1 : v_1 \rightarrow v'_1$ et $s_2 : v_2 \rightarrow v'_2$ sont des chemins de L_s tels que $\partial(s_1) \cap \partial(s_2) = \emptyset$, alors $s_1 \perp_{L_s} s_2$.

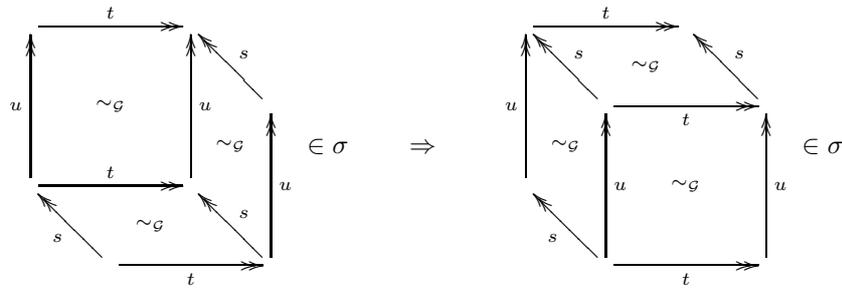


Démonstration: Par induction sur la longueur de s_1 et s_2 en utilisant le lemme 9. \square

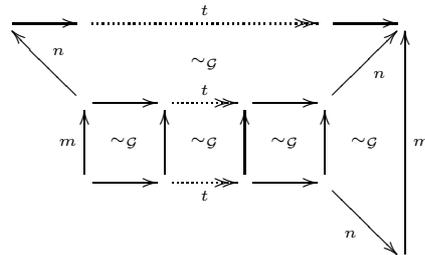
Ce dernier lemme nous permet de calculer l'union (c'est-à-dire la borne supérieure) de deux chemins indépendants. L'existence de l'intersection de deux chemins sera montrée au lemme 12.

Lemme 11 (Stabilité globale)

Si $s \cdot t \cdot u : v \rightarrow v'$, $t \cdot s \cdot u : v \rightarrow v'$, $s \cdot u \cdot t : v \rightarrow v'$ et $t \cdot u \cdot s : v \rightarrow v'$ sont des chemins de L_s alors $u \cdot s \cdot t : v \rightarrow v'$ et $u \cdot t \cdot s : v \rightarrow v'$ sont des chemins homotopes de L_s .



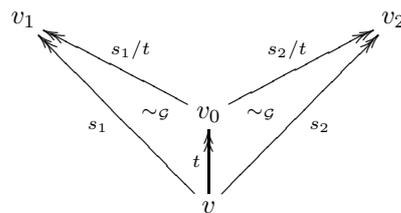
Démonstration : Par induction sur u , on peut supposer que u ne contient qu'un coup n . Par induction sur s , on peut supposer que s ne contient qu'un coup m .



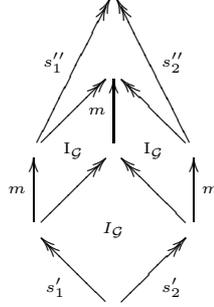
On termine alors la preuve par induction sur t en utilisant la stabilité. □

Lemme 12 (Intersection)

Si $s_1 : v \rightarrow v_1$ et $s_2 : v \rightarrow v_2$ sont deux chemins homotopes de L_s alors il existe un chemin $t : v \rightarrow v_0$ de L_s tel que $\partial(t) = \partial(s_1) \cap \partial(s_2)$, et $t \cdot (s_1/t) : v \rightarrow v_1$ et $t \cdot (s_2/t) : v \rightarrow v_2$ soient tous deux des chemins de L_s homotopes à s_1 et s_2 .



Démonstration : Par induction sur s et sur le cardinal de $\partial(s_1) \cap \partial(s_2)$. Si $\partial(s_1) \cap \partial(s_2) = \emptyset$ (ce qui est toujours le cas lorsque $s = \varepsilon$) alors on peut poser $t = \varepsilon$. Sinon, soit m le premier coup de s_1 qui soit aussi dans s_2 . On a $s_1 = s'_1 \cdot m \cdot s'_1$ et $s_2 = s'_2 \cdot m \cdot s'_2$. Comme $\partial(s'_1) \cap \partial(s'_2) = \emptyset$, d'après le lemme 10 on a $s'_1 I_{L_s} s'_2$. De plus, $m \notin \partial(s'_1)$ et $m \notin \partial(s'_2)$ d'où $m I_{L_s} s'_1$ et $m I_{L_s} s'_2$.



Par stabilité globale (lemme 11), les chemins $m \cdot s'_1 \cdot s'_1$ et $m \cdot s'_2 \cdot s'_2$ sont aussi dans L_s . On peut alors utiliser l'hypothèse d'induction sur $s'_1 \cdot s'_1$ et $s'_2 \cdot s'_2$ qui sont des chemins de $L_{[s/m]}$: il existe un chemin t' tel que $\partial(t') = \partial(s'_1 \cdot s'_1) \cap \partial(s'_2 \cdot s'_2)$, et $t' \cdot ((s'_1 \cdot s'_1)/t')$ et $t' \cdot ((s'_2 \cdot s'_2)/t')$ soient tous deux des chemins de $L_{[s/m]}$. On conclut en remarquant que $t = m \cdot t'$ convient. En effet, $t \cdot (s_1/t) = (m \cdot t') \cdot ((s'_1 \cdot m \cdot s'_1)/(m \cdot t')) = (m \cdot t') \cdot ((s'_1 \cdot s'_1)/t')$ est un chemin de L_s et de même $t \cdot (s_2/t) = (m \cdot t')$ est aussi un chemin de L_s . \square

Remarque 6

D'après le lemme 10, on a $s_1/t I_{L_s} s_2/t$, car $\partial(s_1/t) \cap \partial(s_2/t) = \emptyset$ et par suite $t \cdot (s_1/t) \cdot (s_2/t)$ et $t \cdot (s_2/t) \cdot (s_1/t)$ sont des chemins de L_s . On peut remarquer que $\partial(t \cdot (s_1/t) \cdot (s_2/t)) = \partial(t \cdot (s_2/t) \cdot (s_1/t)) = \partial(s_1) \cup \partial(s_2)$.

Lemme 13

(L_s, \leq) est un treillis distributif tel que pour tous préfixes $[t]$ et $[t']$ de s dans L_s on ait :

- $\partial([t] \wedge [t']) = \partial([t]) \cap \partial([t'])$;
- $\partial([t] \vee [t']) = \partial([t]) \cup \partial([t'])$.

Démonstration : Soient $[t]$ et $[t']$ deux éléments de L_s .

- L'infimum $[t] \wedge [t']$ de $[t]$ et $[t']$ est la chemin donné par le lemme 12 (modulo homotopie) tel que $\delta([t] \wedge [t']) = \partial([t]) \cap \partial([t'])$: il est plus petit que $[t]$ et $[t']$ car les chemins résiduels $[t]/([t] \wedge [t'])$ (resp. $[t']/([t] \wedge [t'])$) sont des morphismes de L_s entre $[t] \wedge [t']$ et $[t]$ (resp. $[t']$). De plus, c'est le plus grand minorant car \leq est inclus dans \subseteq (l'inclusion des coups apparaissant dans des chemins, cf. la remarque 6) et $\partial([t]) \cap \partial([t'])$ est l'infimum de $\partial([t])$ et $\partial([t'])$.
- De même, le supremum de $[t]$ et $[t']$ est donné par la remarque 6 : $[t] \vee [t'] = ([t'])/([t] \wedge [t'])$

$$[t']) \circ ([t]/([t] \wedge [t'])) \circ ([t] \wedge [t']).$$

De plus, pour tous éléments $[t]$, $[t']$ et $[t'']$, on a $[t] \vee ([t'] \wedge [t'']) = ([t] \wedge [t']) \vee ([t] \wedge [t''])$ car $\partial(t) \cup (\partial(t') \cap \partial(t'')) = (\partial(t) \cap \partial(t')) \cup (\partial(t) \cap \partial(t''))$, étant donné que, d'après le lemme 8, les classes d'homotopie sont déterminées de façon unique par l'ensemble des coups qui apparaissent dans leurs chemins. Le treillis est donc bien distributif. \square

Corollaire 2

Le treillis L_s est isomorphe au graphe positionnel (i.e. au treillis des segments initiaux) de la structure d'événements $(\delta(s), \preceq)$, où $n \preceq m$ est défini par

$$\forall t \in [s], \quad (\exists t_1, t_2, \quad t = t_1 \cdot n \cdot t_2) \Rightarrow m \in \delta(t_1)$$

Démonstration : (L_s, \preceq) est un treillis distributif fini. D'après le théorème de représentation de Birkhoff, il est donc isomorphe au treillis des segments initiaux de l'ordre partiel des éléments premiers (i.e. qui ne sont pas l'union de deux autres éléments). Or, les éléments premiers sont ici les chemins réduits à un coup. \square

Cette propriété nous sera utile pour définir la notion d'innocence.

4 Jeux, stratégies innocentes et positionnalité

Nous allons maintenant définir notre modèle de jeux : les jeux (ou arènes) et les stratégies sur ces jeux. En particulier, nous donnerons une caractérisation des stratégies innocentes. Par souci de généralité, nous faisons cette présentation en deux étapes. Nous commençons par définir notre modèle dans un cadre non polarisé, puis nous rajoutons des polarités aux coups (joueur ou opposant) ainsi que les définitions liées à la polarité.

4.1 Stratégies

Nos arènes généralisent les cadres habituels de sémantique de jeux : ce sont des graphes asynchrones (pointés).

Définition 24 (Graphe asynchrone pointé)

Un graphe asynchrone pointé $(\mathcal{G}, *)$ est un couple constitué d'un graphe asynchrone \mathcal{G} et d'un sommet $*$ de \mathcal{G} .

Nous noterons $\mathcal{P}_*(\mathcal{G})$ l'ensemble des chemins de \mathcal{G} partant de $*$.

Dans la suite, nous faisons l'hypothèse que $(\mathcal{G}, *)$ est un graphe asynchrone pointé costable donné. Une stratégie sur ce graphe sera définie de la façon suivante.

Définition 25 (Stratégie)

Une stratégie σ sur $(\mathcal{G}, *)$ est un ensemble de chemins de \mathcal{G} , appelés parties, dont la source est $*$. De plus, σ doit être non vide et clos par préfixe.

Nous écrirons $\sigma : A$ pour indiquer que σ est une stratégie sur un graphe asynchrone pointé A .

4.2 Stratégies innocentes

Nous allons donner une définition d'innocence pour nos stratégies, puis nous montrons que les parties dans une stratégie innocente sont les chemins d'un sous-graphe du jeu sous-jacent, dont le graphe positionnel associé vérifie la propriété du cube et est donc caractérisé par un ordre partiel sur une tranche (lemme 2).

Expliquons pourquoi nous tenons à avoir cette propriété pour les stratégies innocentes. Les stratégies innocentes sont les stratégies qui correspondent à des preuves. Dans les cadres de jeux habituels, on peut retrouver la preuve à laquelle correspond une stratégie en calculant son arbre de vue (cf. remarque 1). Dans notre cadre, nous n'aurons pas un arbre mais un dag (car on a un ordre partiel) : nos stratégies vont correspondre à des preuves généralisées dans lesquelles l'ordre n'est plus nécessairement complètement spécifié (e.g. on peut ne pas distinguer les deux façons de prouver $A \otimes B \otimes C$, fig. 4). En ce sens, nous avons une notion d'innocence plus *concurrente*. Une approche similaire a été employée dans [FM05] pour définir une ludique dans laquelle les desseins ne sont plus des arbres mais des dags.

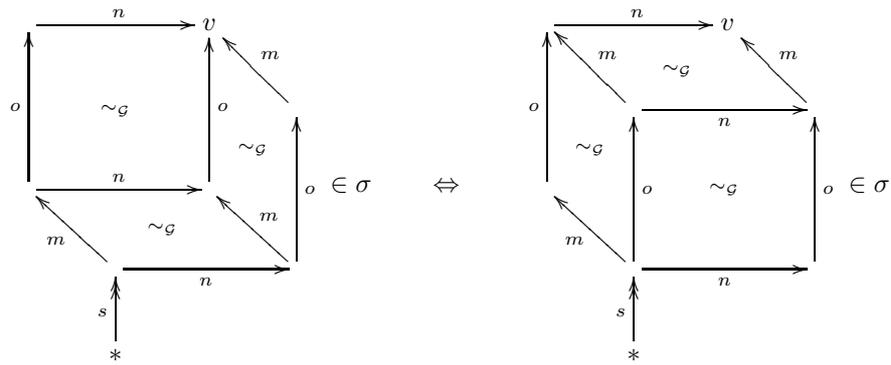
Remarquons au passage que tous les réseaux (au sens de la logique linéaire) ne correspondent pas à des preuves, ce qui sera aussi le cas pour les stratégies que nous définissons ici. Il nous faudra introduire un équivalent des critères de correction : les conditions de gain (cf. section 4.6).

Définition 26 (Stratégie innocente)

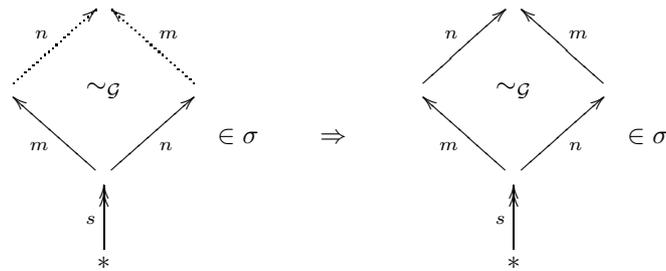
Une stratégie est dite innocente lorsque :

- elle vérifie la propriété du cube : $s \cdot m \cdot o \cdot n : * \rightarrow v, s \cdot m \cdot n \cdot o : * \rightarrow v, s \cdot n \cdot m \cdot o : * \rightarrow v$ et $s \cdot n \cdot o \cdot m : * \rightarrow v$ sont des parties de σ deux à deux homotopes si et seulement si $s \cdot m \cdot o \cdot n : * \rightarrow v, s \cdot o \cdot m \cdot n : * \rightarrow v, s \cdot o \cdot n \cdot m : * \rightarrow v$ et $s \cdot n \cdot o \cdot m : * \rightarrow v$

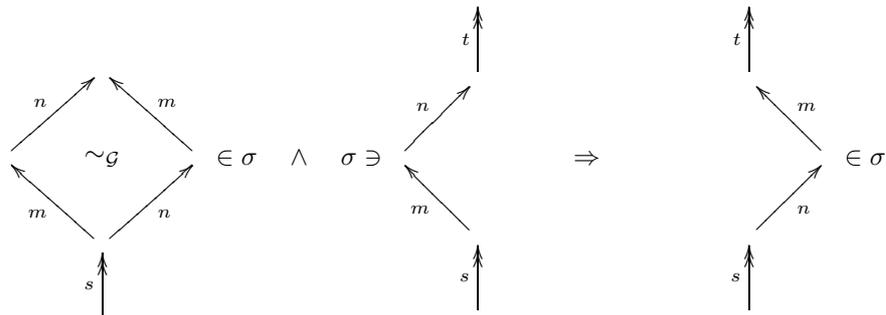
sont des parties de σ deux à deux homotopes.



– elle est close par union locale : si $s : * \rightarrow v$, $s \cdot m : * \rightarrow v'$ et $s \cdot n : * \rightarrow v''$ sont des parties de σ et s'il existe un sommet w de \mathcal{G} tel que les chemins $m \cdot n : v \rightarrow w$ et $n \cdot m : v \rightarrow w$ soient homotopes alors $s \cdot m \cdot n : * \rightarrow w$ et $s \cdot n \cdot m : * \rightarrow w$ soient des parties de σ homotopes.



– elle vérifie une propriété de cohérence : si $s \cdot m \cdot n : * \rightarrow v$ et $s \cdot n \cdot m : * \rightarrow v$ sont deux parties dans σ homotopes et $s \cdot m \cdot n \cdot t : * \rightarrow w$ est une partie dans σ alors $s \cdot n \cdot m \cdot t : * \rightarrow w$ est aussi une partie dans σ .



La relation de σ -homotopie est celle induite par $\sim_{\mathcal{G}}$ sur les parties dans σ .

Intuitivement, la dernière condition va nous permettre de nous assurer que cet ensemble de parties est l'ensemble des chemins partant de la racine d'un graphe pointé : le graphe

σ -positionnel, noté \mathcal{G}_σ (lemme 14). Grâce à la première condition, ce graphe vérifiera la propriété du cube (lemme 15). Enfin, la seconde condition imposera à la catégorie correspondant à \mathcal{G}_σ d'être une sous-catégorie pleine de $[\mathcal{G}]$ (lemme 17).

Définition 27 (σ -homotopie)

On définit une relation $\overset{1}{\sim}_\sigma$ sur les éléments d'une stratégie σ par

$$s \overset{1}{\sim}_\sigma t \quad \text{ssi} \quad s \overset{1}{\sim}_{\mathcal{G}} t$$

La relation de σ -homotopie, notée \sim_σ , est la plus petite relation d'équivalence qui contienne $\overset{1}{\sim}_\sigma$.

Intuitivement, si s et t sont σ -homotopes, cela signifie que l'on peut déformer continûment s en t tout en restant dans σ . En effet, si s et t sont deux parties d'une stratégie σ telles que $s \sim_{\mathcal{G}} t$, on n'a pas nécessairement $s \sim_\sigma t$.

De même que pour les graphes asynchrones, on peut définir le graphe positionnel associé à une stratégie σ .

Définition 28 (Graphe σ -positionnel)

À chaque stratégie σ , on peut associer un graphe σ -positionnel \mathcal{G}_σ dont les objets sont les classes de σ -homotopie des parties de σ , i.e. les éléments de

$$\{[s]_\sigma \mid s \in \sigma\}$$

Si s est une partie dans σ et m est un coup tel que $s \cdot m$ soit une partie dans σ alors m est une arête entre $[s]_\sigma$ et $[s \cdot m]_\sigma$.

Remarque 7

La destination d'une arête est déterminée de façon unique par la donnée de sa source.

Le lemme suivant montre que les parties dans une stratégie sont les chemins d'un sous-graphe de \mathcal{G} .

Lemme 14 (Positionnalité)

Si m est une arête entre deux sommets $[s]_\sigma$ et $[s \cdot m]_\sigma$ dans \mathcal{G}_σ alors $s \cdot m$ est dans σ (indépendamment du choix du représentant dans $[s]_\sigma$).

Démonstration : En utilisant la propriété de cohérence. □

Lemme 15

Si σ est une stratégie innocente alors \mathcal{G}_σ est un graphe asynchrone vérifiant la propriété

| du cube.

Démonstration : Nous devons montrer que \mathcal{G}_σ remplit toutes les conditions pour être un graphe asynchrone vérifiant la propriété du cube.

- Une partie de \mathcal{G}_σ étant un chemin dans \mathcal{G} , \mathcal{G}_σ est sans répétition.
- Montrons que \mathcal{G}_σ est stable. Soit $[s]$ un sommet de \mathcal{G}_σ et m, n et o des coups tels que $m \cdot o \cdot n, m \cdot n \cdot o, n \cdot m \cdot o$ et $n \cdot o \cdot m$ soient des chemins σ -homotopes de $[s]$ à $[s \cdot m \cdot n \cdot o]$ dans \mathcal{G}_σ . D'après le lemme 14, $s \cdot m \cdot o \cdot n, s \cdot m \cdot n \cdot o, s \cdot n \cdot m \cdot o$ et $s \cdot n \cdot o \cdot m$ sont donc des chemins σ -homotopes de σ et nous pouvons conclure par stabilité de σ .
- Par dualité, il est aussi costable.
- Il est déterministe. Si m est une arête de $[s]_\sigma$ à $[s']_\sigma$ alors nécessairement $[s']_\sigma = [s \cdot m]_\sigma$. Réciproquement, il existe une partie t dans σ telle que $[s]_\sigma = [t \cdot m]_\sigma$. Supposons qu'il existe une autre partie t' dans σ telle que $[s]_\sigma = [t' \cdot m]_\sigma$. On a $t \cdot m \sim_\sigma s \sim_\sigma t' \cdot m$. Notons \bar{t} pour chemin dual de t dans le dual $\bar{\sigma}$ du graphe asynchrone costable $\sigma -$ qui est un graphe asynchrone stable. On a $m \cdot \bar{t} = \overline{t \cdot m} \sim_{\bar{\sigma}} \overline{t' \cdot m} = m \cdot \bar{t}'$. D'où, d'après le lemme 2 (\mathcal{G}_σ étant costable), $\bar{t} \sim_{\bar{\sigma}} \bar{t}'$ et par dualité $t \sim_\sigma t'$. Ainsi, $[t]_\sigma = [t']_\sigma$. \square

Lemme 16

Si $s_1 : x \rightarrow y$ et $t : x \rightarrow z$ sont deux parties dans σ telles qu'il existe un chemin $s_2 : y \rightarrow z$ dans \mathcal{G} tel que $s_1 \cdot s_2 \sim_{\mathcal{G}} t$ alors il existe un chemin $t_2 : y \rightarrow z$ tel que $s_1 \cdot t_2 \in \sigma, s_2 \sim_{\mathcal{G}} t_2$ et $s_1 \cdot t_1 \sim_\sigma s_1 \cdot t_2$ (cet énoncé fait sens d'après le lemme 14).

Démonstration : Par induction, on peut se contenter de traiter le cas où s_1 est réduit à un seul coup m . Comme $m \in \chi_{\mathcal{G}}(s_1 \cdot s_2)$ et par hypothèse $s_1 \cdot s_2 \sim_{\mathcal{G}} t$, on a aussi $m \in \chi_{\mathcal{G}}(t)$ d'après le lemme 2, et $s_2 = (s_1 \cdot s_2)/m \sim_{\mathcal{G}} t/m$ (ce lemme peut être utilisé car \mathcal{G} est supposé être costable). En utilisant l'union locale de façon répétée, on peut montrer que $m \cdot (t/m) : x \rightarrow z$ est une partie dans \mathcal{G}_σ . \square

Remarque 8

Ceci implique en particulier que si s et t sont deux parties dans σ telles que $s \sim_{\mathcal{G}} t$ alors $s \sim_\sigma t$.

Lemme 17

Si $(\mathcal{G}, *)$ est un graphe asynchrone pointé vérifiant la propriété du cube tel que

$$\forall s, t : * \rightarrow v \in \mathcal{P}(\mathcal{G}), \quad s \sim_{\mathcal{G}} t$$

et σ est une stratégie innocente sur ce graphe alors \mathcal{G}_σ (vu comme une catégorie, avec la

(concaténation comme composition) est une sous-catégorie pleine de $[\mathcal{G}]$.

Dans la suite nous supposons que l'on a toujours

$$\forall s, t : * \rightarrow v \in \mathcal{P}(\mathcal{G}), \quad s \sim_{\mathcal{G}} t$$

dans les graphes asynchrones \mathcal{G} que nous considérerons, pour simplifier les définitions et les démonstrations, et parce que cette généralité ne nous est pas ici utile : nos positions seront simplement des ensembles de coups et non pas des classes d'homotopie. Le cadre général devrait cependant pouvoir être utilisé ultérieurement pour modéliser des constructions propres à la concurrence.

4.3 Jeux polarisés

Nous allons maintenant attribuer une polarité aux coups. Nos jeux ne seront pas nécessairement alternés comme c'est le cas dans la plupart des sémantiques de jeux.

Définition 29 (Polarisation)

Une polarisation d'un ensemble de coups M est une fonction de M dans $\{-1, +1\}$.

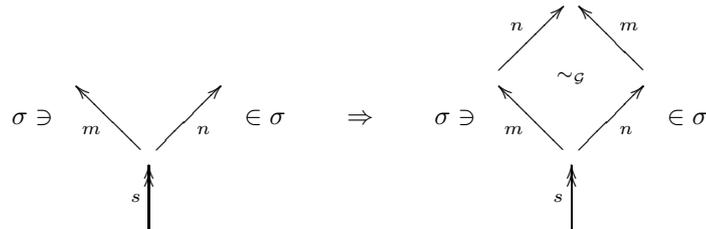
Un coup m est appelé coup Joueur (J) lorsque $\lambda(m) = +1$ et un coup Opposant (O) lorsque $\lambda(m) = -1$.

Dans la suite, nous supposons que l'ensemble de coups M est polarisé par λ . L'introduction de cette polarisation nous amène à modifier légèrement la définition des stratégies innocentes.

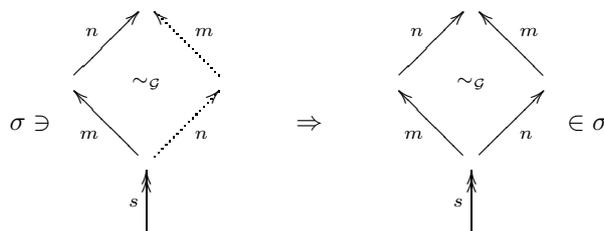
Définition 30 (Stratégie innocente)

Lorsque les coups sont polarisés, une stratégie innocente doit remplir les conditions supplémentaires suivantes.

- déterminisme. Si $s \cdot m : * \rightarrow x$ et $s \cdot n : * \rightarrow y$ sont deux parties dans σ telles que $\lambda(m) = +1$ alors $s \cdot m \cdot n : * \rightarrow z$ et $s \cdot n \cdot m : * \rightarrow z$ sont deux parties homotopes dans σ (en particulier ces chemins existent dans le jeu sous-jacent et sont homotopes).



- J-commutation. Si $s \cdot m \cdot n$ est une partie dans σ telle que $\lambda(m) = +1$ et $m \cdot n \sim_{\mathcal{G}} n \cdot m$ alors $s \cdot n \cdot m$ est aussi une partie dans σ .



- Un suffixe infini d'une partie dans σ ne contient pas que des coups joueurs.

Le déterminisme est la généralisation à notre cadre de la condition habituelle de déterminisme. La J-commutation permet quant à elle de s'assurer qu'un coup de l'Opposant sera justifié par le coup Joueur qui le précède. Enfin, la dernière condition est utilisée dans la caractérisation positionnelle des stratégies (lemme 18).

Définition 31 (Jeu)

Un jeu est un quadruple $A = (M_A, \mathcal{G}_A, *_A, \lambda_A)$ qui constitué d' :

- un ensemble de coups M_A ;
- un graphe asynchrone pointé $(\mathcal{G}_A, *_A)$ sur l'ensemble de coups M_A ;
- une polarisation λ_A de M_A .

Une partie sur le jeu A est un chemin de \mathcal{G}_A ayant $*_A$ pour source.

Nous écrirons $\sigma : A$ pour indiquer que σ est une stratégie sur le jeu A (i.e. un ensemble de parties sur A).

4.4 Positionnalité

Nous allons montrer qu'une stratégie innocente σ est caractérisée par l'ensemble des positions complètes σ° qu'elle atteint : on peut reconstruire σ à partir de la donnée de σ° étendant ainsi le résultat de Melliès dans [Mel05].

Définition 32 (Position)

Une position x d'un graphe asynchrone pointé $(\mathcal{G}, *)$ est un ensemble d'arêtes de \mathcal{G} correspondant à une partie : $\exists s \in \mathcal{P}_*(\mathcal{G}), \quad x = \partial(s)$.

Définition 33 (Position complète)

Si σ est une stratégie, l'ensemble des positions complètes atteintes par σ est défini par

$$\sigma^\circ = \{x \in \mathcal{G}_\sigma \mid \forall s : * \rightarrow x, \forall m \in M, \quad s \cdot m \in \sigma \Rightarrow \lambda(m) = -1\}$$

Une position complète d'une stratégie est une position dans laquelle la stratégie ne peut plus rien jouer (et attend un coup de l'Opposant, ou la position est finale).

Définition 34

À chaque ensemble de positions X on peut associer l'ensemble de chemins X^\dagger défini inductivement par

- $\varepsilon : * \rightarrow *$ appartient à X^\dagger ;
- $s \cdot m : * \rightarrow y$ est dans X^\dagger ssi $s : * \rightarrow x$ est dans X^\dagger et il existe une position $z \in X$ et un chemin $t : y \rightarrow z$ dans \mathcal{G} constitué uniquement de coups joueur.

Définition 35 (Stratégie purement positionnelle)

Une stratégie est dite purement positionnelle lorsqu'elle est caractérisée par l'ensemble de ses positions complètes, c'est à dire lorsque

$$\sigma = (\sigma^\circ)^\dagger \tag{1}$$

Lemme 18

Toute stratégie innocente est purement positionnelle.

Démonstration : Soit σ une stratégie innocente et s une partie dans $(\sigma^\circ)^\dagger$. Montrons que s est une partie dans la stratégie σ par induction sur la longueur de s . La proposition est immédiate lorsque s est vide. Dans le cas contraire, par définition de $(\sigma^\circ)^\dagger$, la partie $s : * \rightarrow x$ peut être factorisée en $s = t \cdot m$, où $t : * \rightarrow y$ est une partie dans $(\sigma^\circ)^\dagger$ et m est un coup. On sait par hypothèse d'induction que la partie $t \in (\sigma^\circ)^\dagger$ est un élément de la stratégie σ . De plus, par définition de $(\sigma^\circ)^\dagger$, il existe des coups joueur m_1, \dots, m_p et une position z dans σ° telle que $s \cdot m_1 \cdot \dots \cdot m_p : * \rightarrow z$ soit un chemin de \mathcal{G} . La position z étant un élément de σ° , il existe une partie $u \in \sigma$ avec z comme destination. La stratégie σ étant innocente, nous pouvons appliquer le lemme 16 et déduire que $t \cdot (u/t)$ est une partie de σ telle que $m \cdot m_1 \cdot \dots \cdot m_p \sim_{\mathcal{G}} u/t$. L'équivalence précédente implique $m \in \delta(u/t)$ et, par utilisation répétée de la J-commutation, on montre facilement que $u/t \sim_\sigma m \cdot m_1 \cdot \dots \cdot m_p$ et $t \cdot (u/t) \sim_\sigma t \cdot m \cdot m_1 \cdot \dots \cdot m_p$. Par suite, $t \cdot m \cdot m_1 \cdot \dots \cdot m_p : * \rightarrow z$ est une partie dans σ et, par clôture par préfixe, $s = t \cdot m : * \rightarrow x$ est aussi dans σ . □

Cette caractérisation positionnelle des stratégies devrait nous permettre de retrouver le modèle relationnel de la logique linéaire (cf. section 4.6).

4.5 Constructions sur les jeux

Dans cette partie, nous introduisons des constructions fondamentales sur nos jeux qui devraient nous permettre de construire une catégorie de jeux dont les objets seraient des jeux et les morphismes entre deux objets A et B des stratégies sur un jeu $A \multimap B$ défini à partir de A et B ; elles devraient aussi nous permettre de faire un modèle [d'un fragment] de logique linéaire à partir de cette catégorie.

Définition 36 (Négation)

Si $A = (M_A, \mathcal{G}_A, *_A, \lambda_A)$ est un jeu, nous noterons A^* le jeu opposé défini par

$$A^* = (M_A, \mathcal{G}_A, *_A, \lambda_{A^*})$$

où

$$\forall m \in M, \quad \lambda_{A^*}(m) = -\lambda_A(m)$$

Définition 37 (Produit tensoriel)

Si $A = (M_A, \mathcal{G}_A, *_A, \lambda_A)$ et $B = (M_B, \mathcal{G}_B, *_B, \lambda_B)$ sont deux jeux, nous noterons $A \otimes B$ leur produit tensoriel qui est défini par

$$A \otimes B = (M_A \uplus M_B, \mathcal{G}_A \times \mathcal{G}_B, (*_A, *_B), \lambda_{A \otimes B})$$

où

- $\mathcal{G}_A \times \mathcal{G}_B$ est le produit des graphes \mathcal{G}_A et \mathcal{G}_B : ses sommets sont des paires de sommets de \mathcal{G}_A et \mathcal{G}_B et il y a une arête étiquetée par m entre (a, b) et (a', b') si et seulement s'il y a une arête étiquetée par m entre a et a' dans \mathcal{G}_A et $b = b'$, ou entre b et b' dans \mathcal{G}_B et $a = a'$. L'homotopie $\sim_{\mathcal{G}_A \times \mathcal{G}_B}$ est la plus petite relation d'équivalence qui contienne $\sim_{\mathcal{G}_A}$ et $\sim_{\mathcal{G}_B}$ et telle que $s_1 \cdot m \cdot n \cdot s_2 \sim_{\mathcal{G}_A \times \mathcal{G}_B} s_1 \cdot n \cdot m \cdot s_2$ lorsque m est un coup de A et n un coup de B .
- $\lambda_{A \otimes B}$ est défini par

$$\lambda_{A \otimes B}(m) = \begin{cases} \lambda_A(m) & \text{si } m \in M_A \\ \lambda_B(m) & \text{si } m \in M_B \end{cases}$$

Une position d'une stratégie sur un jeu $A \otimes B$ est constituée d'une position x de A et d'une position y de B et sera notée $x \otimes y$.

Définition 38 (Par)

Si A et B sont deux jeux, on définit $A \wp B$ par $A \wp B = A \otimes B$. Une position sur un tel jeu sera notée $x \wp y$.

Les opérations \wp et \otimes seront distinguées par la suite par l'introduction de conditions de gains différentes.

Définition 39 (Flèche)

Si A et B sont deux jeux, on définit $A \multimap B = A^* \wp B$. Une position sur un tel jeu sera notée $x \multimap y$.

Définition 40 (Restriction)

Si s est une partie sur le jeu $A \otimes B$, nous noterons $s \upharpoonright_A$ pour la restriction de s à $A : s \upharpoonright_A$ est l'image de s par le morphisme de graphes φ défini par

$$- \varphi((a, b)) = a;$$

$$- \text{si } m \text{ est le label d'une arête entre deux sommets } (a, b) \text{ et } (a', b'), \text{ alors } \varphi(m) = m.$$

On définit de façon similaire la restriction $s \upharpoonright_B$ de s à B et on peut étendre simplement cette définition à une restriction $s \upharpoonright_{A_1, \dots, A_k}$ sur plusieurs jeux à la fois.

Remarque 9

Si s est une partie sur $A \otimes B$ alors $s \upharpoonright_A$ est une partie sur A .

La composition sur nos stratégies est définie comme habituellement (*parallel composition and hiding*) en faisant interagir deux stratégies puis en cachant le jeu où a eu lieu l'interaction.

Définition 41 (Interaction)

Une interaction s sur trois jeux A, B et C , notée $s \in \text{Int}(A, B, C)$, est une partie sur $(A \multimap B) \multimap C$ telle que $s \upharpoonright_{A, B}, s \upharpoonright_{B, C}$ and $s \upharpoonright_{A, C}$ soient respectivement des parties sur $A \multimap B, B \multimap C$ et $A \multimap C$.

Définition 42 (Composition)

Si $\sigma : A \multimap B$ et $\tau : B \multimap C$ sont deux stratégies, la composée de σ et τ , notée $\sigma; \tau$, est la stratégie définie par

$$\sigma; \tau = \{s \upharpoonright_{A, C} \mid s \in \text{Int}(A, B, C) \wedge s \upharpoonright_{A, B} \in \sigma \wedge s \upharpoonright_{B, C} \in \tau\}$$

Si $u \in \sigma; \tau$, il existe deux parties $s \in \sigma$ et $t \in \tau$, et $v \in \text{Int}(A, B, C)$ telles que $v \upharpoonright_{A, C} = u$, $v \upharpoonright_{A, B} = s$ et $v \upharpoonright_{B, C} = t$. Nous noterons alors cela $u = s; t$.

Nous montrons ici qu'il y a unicité, à homotopie près, de la composante interne d'une interaction donnant lieu à un comportement externe donné.

Lemme 19 (Zipping)

Soient $\sigma : A \multimap B$ et $\tau : B \multimap C$ deux stratégies innocentes, et u une partie dans $\sigma; \tau$.
 On suppose qu'il existe deux parties s_1 et s_2 dans σ et deux parties t_1 et t_2 dans τ telles que $u = s_1; t_1 = s_2; t_2$. Alors il existe deux parties s dans σ et t dans τ telles que $u = s; t$, $t_1 \upharpoonright_B \approx t \upharpoonright_B$ et $t_2 \upharpoonright_B \approx t \upharpoonright_B$ où $s \approx t$ signifie que s est un préfixe de t modulo homotopie ($\exists s', s \cdot s' \sim_{\mathcal{G}} t$).

Démonstration : Le résultat se montre par l'absurde en utilisant le déterminisme des stratégies. \square

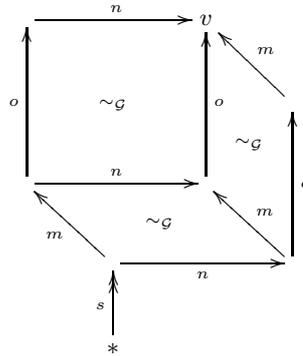
Lemme 20 (Composition)

La composition est bien définie :

1. la composée de deux stratégies est une stratégie ;
2. la composée de deux stratégies innocentes est une stratégie innocente.

Démonstration : La démonstration du premier point est presque immédiate.

Soient $\sigma : A \multimap B$ et $\tau : B \multimap C$ deux stratégies innocentes et supposons que $s \cdot m \cdot o \cdot n : * \rightarrow v, s \cdot m \cdot n \cdot o : * \rightarrow v, s \cdot n \cdot m \cdot o : * \rightarrow v$ et $s \cdot n \cdot o \cdot m : * \rightarrow v$ soient des parties deux à deux homotopes de $\sigma; \tau$.



Supposons que o soit un coup dans A (le cas où c'est un coup dans C est analogue). Si m et n sont aussi des coups de A alors $s \cdot o \cdot m \cdot n : * \rightarrow v$ et $s \cdot o \cdot n \cdot m : * \rightarrow v$ sont aussi des parties de $\sigma; \tau$ qui sont homotopes à $s \cdot m \cdot o \cdot n : * \rightarrow v$ et $s \cdot n \cdot o \cdot m : * \rightarrow v$ par stabilité globale de σ (on peut se ramener à la même composante de la position dans B en v en utilisant le lemme 19). Sinon, m ou n est un coup dans C . Si les deux sont des coups de C alors, par stabilité de C , on peut jouer dans B les coups qui ont engendré o dès la position $\partial(s)$ et donc $s \cdot o \cdot m \cdot n : * \rightarrow v$ et $s \cdot o \cdot n \cdot m : * \rightarrow v$ sont aussi des parties de $\sigma; \tau$ qui sont homotopes à $s \cdot m \cdot o \cdot n : * \rightarrow v$ et $s \cdot n \cdot o \cdot m : * \rightarrow v$. Enfin, supposons que m soit un coup dans C et n un coup dans A (l'inverse se traite de façon analogue). Dans ce cas n et o sont indépendants car $s \cdot m \cdot o \cdot n$ et $s \cdot m \cdot n \cdot o$ sont dans σ . Comme $s \cdot n \cdot o \cdot m$ est dans σ , $s \cdot o \cdot n \cdot m$ est donc aussi dans σ et lui est homotope. De plus $s \cdot o \cdot m \cdot n$ est aussi dans σ et est homotope à $s \cdot m \cdot o \cdot n$ car les coups dans B qui ont engendré m ne sont indépendants de o . $\sigma; \tau$ est donc stable.

La réciproque (la costabilité de $\sigma; \tau$) se montre par un raisonnement analogue. \square

Le but de ces constructions est de définir une catégorie des jeux et stratégies innocentes entre ces jeux. Pour construire une telle catégorie, il reste deux points à compléter que nous n'avons pas eu le temps de regarder en détail :

- il faut vérifier que la composition est associative ;
- il faut définir une stratégie identité id_A sur chaque jeu A et vérifier qu'elle agit bien comme une stratégie identité.

4.6 Gain

Dans cette partie, nous avons cherché à retrouver le modèle relationnel de la logique linéaire (dans lequel les formules sont interprétées par des relations). Dans ce modèle, l'élimination des coupures correspond à la composition des relations. Cette partie n'a pas été entièrement formalisée ; nous ne donnerons que des idées sur les preuves.

La condition de gain que nous donnons semble comparable aux critères de correction des réseaux de preuves en logique linéaire (en particulier au critère d'acyclicité imposé dans [FM05]) mais nous n'avons pas eu le temps d'établir précisément la correspondance.

Définition 43 (Composition relationnelle des positions)

Si $\sigma : A \multimap B$ et $\tau : B \multimap C$ sont deux stratégies alors $\sigma^\circ; \tau^\circ$ est la composée relationnelle de σ° et τ° , c'est-à-dire

$$\sigma^\circ; \tau^\circ = \{x \multimap z \mid \exists y, x \multimap y \in \sigma^\circ \wedge y \multimap z \in \tau^\circ\}$$

Nous voulons que la composition coïncide avec la composition relationnelle des positions complètes, i.e.

$$(\sigma; \tau)^\circ = \sigma^\circ; \tau^\circ$$

afin de retrouver le modèle relationnel de la logique linéaire : nous voulons un foncteur monoïdal de la catégorie de jeux que nous allons définir dans **Rel** (la catégorie des ensembles et relations avec sa structure symétrique monoïdale close habituelle). Pour arriver à ce résultat, nous allons utiliser des techniques similaires à celles introduites dans [Mel05] et ajouter des condition de gain à nos définitions.

Définition 44 (Gain)

Une fonction de gain κ sur un graphe asynchrone \mathcal{G} est une fonction de $\mathcal{P}(\mathcal{G})$ dans

$\{-\infty, -1, 0, 1, +\infty\}$ telle que :

- si $s \sim_{\mathcal{G}} t$ alors $\kappa(s) = \kappa(t)$;
- $|\kappa(s)| = +\infty$ si et seulement si s est un chemin infini.

Le gain d'une position x d'une stratégie σ est le gain $\kappa(s)$ d'un chemin $s : * \rightarrow x$ de σ (ce gain est indépendant du chemin choisi).

Une position est dite gagnante si $\kappa(s) \geq 0$.

Définition 45 (Stratégie innocente)

Une stratégie innocente (avec gain) est une stratégie innocente σ telle que :

- $\forall x \in \sigma^\circ, \quad \kappa(s) \geq 0,$
- $\forall s \in \sigma, \quad |\kappa(s)| = +\infty \Rightarrow \kappa(s) = +\infty,$
- $\forall s : * \rightarrow x \in \sigma, \forall t : x \rightarrow y \in \sigma, \quad \kappa(t) \geq 0 \Rightarrow \exists m \in M, \quad \lambda(m) = -1 \wedge m \in \chi_\sigma(t).$

Définition 46

Le gain sur un jeu composé est calculé grâce aux tables suivantes.

Le gain d'une partie $s \in A^*$ est $\kappa(s) = -\kappa(s_A)$ où s_A est la partie de A telle que $s = s_A$ (mais les polarités des coups sont inversées).

$p \backslash q$	$-\infty$	-1	0	$+1$	$+\infty$
$-\infty$	$-\infty$	$-\infty$	$-\infty$	$-\infty$	$-\infty$
-1	$-\infty$	-1	-1	-1	$+\infty$
0	$-\infty$	-1	0	$+1$	$+\infty$
$+1$	$-\infty$	-1	$+1$	$+1$	$+\infty$
$+\infty$	$-\infty$	$+\infty$	$+\infty$	$+\infty$	$+\infty$

FIG. 5 – Gain de $p \otimes q$.

$p \backslash q$	$-\infty$	< 0	0	> 0	$+\infty$
$-\infty$	$-\infty$	$-\infty$	$-\infty$	$-\infty$	$+\infty$
< 0	$-\infty$	-1	-1	$+1$	$+\infty$
0	$-\infty$	-1	0	$+1$	$+\infty$
> 0	$-\infty$	$+1$	$+1$	$+1$	$+\infty$
$+\infty$	$+\infty$	$+\infty$	$+\infty$	$+\infty$	$+\infty$

FIG. 6 – Gain de $p \wp q$.

Proposition 1

Si $\sigma : A \rightarrow B$ et $\tau : B \rightarrow C$ sont deux stratégies innocentes alors

$$(\sigma; \tau)^\circ = \sigma^\circ; \tau^\circ$$

Démonstration : Le résultat est montré par double inclusion.

- Dans le sens $(\sigma; \tau)^\circ \subseteq \sigma^\circ; \tau^\circ$, il se pourrait que lors d’une interaction entre $s \in \sigma$ et $t \in \tau$, s et t atteignent leurs positions finales respectivement dans A et C puis interagissent infiniment dans B uniquement. Les conditions de gain permettent d’éviter ces situations, assimilables à des *livelocks*. Supposons que $x \multimap z$ soit une position complète dans $(\sigma; \tau)^\circ$. On doit trouver une position complète y de B telle que $x \multimap y \in \sigma^\circ$ et $y \multimap z \in \tau^\circ$. Étant donné que $x \multimap z \in (\sigma; \tau)^\circ$, il existe deux parties $s \in \sigma$ et $t \in \tau$ telles que $u = s; t \in \sigma; \tau$ et $x \multimap z$ soit une position maximale de $s; t$. Si s ou t était infinie alors $s|_B$ et $t|_B$ seraient infinies (car les positions x et z sont par définition finies) et on aurait $\kappa(s|_B) = \pm\infty$ et $\kappa(t|_B) = -\kappa(s)$, et donc soit s soit t serait perdante. Il existe donc une position y de B telle que $x \multimap y \in \sigma^\circ$ et $y \multimap z \in \tau^\circ$ et ainsi, $x \multimap z \in \sigma^\circ; \tau^\circ$.
- Dans le sens $\sigma^\circ; \tau^\circ \subseteq (\sigma; \tau)^\circ$, il se pourrait qu’à un certain point de l’interaction entre deux parties $s \in \sigma$ et $t \in \tau$, s attende un coup Opposant (i.e. un coup de t) pour pouvoir continuer à jouer et réciproquement t attende un coup de s pour pouvoir continuer à jouer. Là encore, les conditions de gain permettent d’éviter ces *deadlocks* et de pouvoir ainsi montrer l’inclusion. □

Cette dernière proposition permet de montrer que l’on peut construire une catégorie des stratégies innocentes avec gain. On peut espérer montrer que cette catégorie est un modèle du fragment multiplicatif de la logique linéaire intuitionniste, en montrant que cette catégorie est symétrique monoïdale (avec \otimes comme loi) close (avec \multimap comme exponentiation). Ce modèle permettrait de reconstruire simplement le modèle relationnel de la logique linéaire.

5 Perspectives

Nous avons présenté un cadre asynchrone pour la sémantique des jeux dans lequel nous avons pu définir la notion d’innocence de façon diagrammatique et caractériser les stratégies innocentes par leurs positions. Nous avons enfin présenté une catégorie des jeux et stratégies innocentes. Il reste cependant de nombreuses pistes à explorer pour compléter l’étude de ces jeux.

Il serait intéressant de relier précisément notre modèle aux modèles de jeux existants. En particulier, on peut montrer que les stratégies asynchrones telles que définies dans [Mel04] sont des stratégies asynchrones concurrentes qui vérifient une propriété diagrammatique supplémentaire, la *séquentialité*, et dans lesquelles on impose de plus que les parties soient alternées. De même, on devrait pouvoir retrouver les L-nets [FM05] – qui sont des desseins qui permettent davantage de partage que les desseins usuels tels que définis dans [Gir01]

– en imposant aux stratégies d’être alternées. Mais la relation entre le critère d’acyclicité imposé aux L-nets et nos conditions de gain reste encore à établir.

Les constructions que nous avons données devraient permettre de donner un modèle du fragment multiplicatif de la logique linéaire intuitionniste. Nous aimerions définir les autres constructions de la logique linéaire (les additifs, les exponentielles) puis utiliser les techniques liées à la positionnalité de [Mel05] pour en faire un modèle pleinement complet de logique linéaire.

Enfin, comme nous l’avons expliqué en introduction, nous souhaiterions nous servir de l’homotopie pour étudier les mécanismes de la concurrence.

Remerciements

Je tiens à remercier Paul-André Melliès d’avoir accepté d’être mon maître de stage ainsi que pour son aide et ses conseils précieux, Claudia Faggian et Martin Hyland pour les longues et stimulantes discussions que nous avons eu ensemble, les gens sympathiques, et Caro la tortue.

Références

- [AJM00] S. Abramsky, R. Jagadeesan, and P. Malacaria. Full abstraction for PCF. *Information and Computation*, 163(2) :409–470, 2000.
- [AM97] S. Abramsky and G. McCusker. *Linearity, Sharing and State : a Fully Abstract Game Semantics for Idealized Algol with active expressions*. Birkhauser, 1997.
- [AM99] Samson Abramsky and Guy McCusker. Game Semantics. In *Computational logic*. Springer Verlag, 1999.
- [FM05] C. Faggian and F. Maurel. Ludics Nets, a model of concurrent interaction. In *Proceedings of the 21th Conference on Logic in Computer Science, LICS, 2005*.
- [Fos04] Luca Fossati. Playful Asynchronous Circuits. Master’s thesis, Università di Torino, 2004.
- [Gir01] J.-Y. Girard. Locus solum : from the rules of logic to the logic of rules. *Math. Structures Comput. Sci.*, 11(3) :301–506, 2001.
- [GLM92] G. Gonthier, J.-J. Lévy, and P.-A. Melliès. An abstract standardisation theorem. In *Proceedings of the 8th Annual Symposium on Logic in Computer Science, LICS, 1992*.

- [Gou00] E. Goubault. Geometry and Concurrency : A User's Guide. *Mathematical Structures in Computer Science*, 10(4), August 2000.
- [Har99] R. Harmer. *Games and Full Abstraction for Nondeterministic Languages*. PhD thesis, University of London, 1999.
- [HO00] M. Hyland and L. Ong. On Full Abstraction for PCF : I, II and III. *Information and Computation*, 163(2) :285–408, December 2000.
- [Lau04] O. Laurent. *Sémantique des jeux*, 2004. Notes de cours de DEA de Programmation.
- [Mel04] P.-A. Melliès. Asynchronous games 2 : the true concurrency of innocence. In P. Gardner and N. Yoshida, editors, *Proceedings of the 15th International Conference on Concurrency Theory (CONCUR 2004)*, number 3170 in LNCS. Springer Verlag, 2004.
- [Mel05] P.-A. Melliès. Asynchronous games 4 : a fully complete model of propositional linear logic. Available at <http://www.pps.jussieu.fr/~mellies/papers.html>, 2005.
- [PSS90] P. Panangaden, V. Shanbhogue, and E. W. Stark. Stability and sequentiality in data flow networks. In A. Nerode and Yu. V. Matiyasevich, editors, *International Conference on Automates, Languages and Programming*, volume 443 of *Lecture Notes in Computer Science*, pages 253–264. Springer Verlag, 1990.