DOCTORAT

ès sciences

19

M. TAMARI

MEMBRES DU JURY

MM.

MINISTÈRE DE L'ÉDUCATION NATIONALE

Faculté des Sciences de l'Université de Paris

RAPPORT

sur la Thèse de M Dov TAMARI

Monoïdes préordonnés et chaînes de Malcev

Les problèmes étudiés par M. Tamari se rattachent à d'importants résultats de Malcev: celui-ci fit connaître en 1937 le premier exemple de semi-groupe non immersible dans un groupe et donna, en 1939, des conditions nécessaires et suffisantes pour l'immersibilité d'un demi-groupe avec élément-unité dans un groupe. Dans la première partie de son travail, M. Tamari étend largement le résultat fondamental de Malcev, tout en lui donnant une forme plus intuitive et plus claire. Dans la seconde partie, il étudie d'une façon systématique les chaînes de Malcev et obtient tout un ensemble de résultats sur les cas de non-immersibilité.

Première partie.

Le premier chapitre est consacré à une étude générale des monoïdes. Dans la terminologie de l'Auteur (qu'il faut ici distinguer de celle de Bourbaki) un monoïde est un ensemble ou l'on considère une opération qui n'est pas nécessairement toujours définie, mais est uniforme au sens large (le résultat de l'opération est unique quand il existe). Le monoïde est dit relié s'il est muni de relations compatibles avec l'opération. Deux types importants de monoïdes sont les demi-groupoïdes et les groupoïdes, introduits par R. Croisot 1 (Une interprétation des relations d'équivalence dans un ensemble, C.R. Acad. Sc. Paris, 226,

1 sous les noms de demi-groupes partiels et groupes partiels

1948, p. 616). Un groupoïde G est donc ici un ensemble avec une opération vérifiant les axiomes

$I\alpha$ (ab)c et a(bc) existent en même temps ;

$I\beta$ Quand (ab)c et a(bc) existent on a (ab)c = a(bc) ;

II_d G possède au moins un sous-ensemble U_d non vide tel que

1° Si $a \in G$ est composable avec $e \in U_d$, on a $ae = a$;

2° pour tout $e \in U_d$, il existe au moins un $a \in G$ composable avec e ;

3° tout $a \in G$ est composable au plus avec un $e \in U_d$;

III_d Pour tout $a \in G$, il existe au moins un $\bar{a} \in G$ tel que $a\bar{a} \in U_d$.

Un demi-groupoïde est caractérisé par les axiomes $I\alpha$, $I\beta$ et ...

M. Tamari développe ~~xxx~~ l'étude des propriétés suivantes: règle de simplification, éléments neutres, conditions de Malcev (ca = cb entraîne xa = xb pour tout x ; ax = by, cx = dy au = bv entraînent cu = dv ; etc....), éléments inversibles et met en évidence les liens qui existent entre elles. Après quelques généralités sur les familles de relations binaires, il étudie les liens existant entre les propriétés possibles d'une relation dans un monoïde: homogénéité, simplifiabilité, etc... puis les représentations isomorphes par des familles de relations, les relations canoniques et notamment la relation de composabilité, enfin les propriétés d'associabilité, plus faibles que l'associativité, et se rattachant à des notions introduites par R. Baer et Hanna Neumann (groupe incomplet).

Le chapitre II semble être le plus important, par l'intérêt et la difficulté du problème traité. Il commence par l'introduction d'une représentation graphique, constituée par les "modèles de courants", et permettant de suivre facilement les transformations effectuées sur les "mots", c'est à dire sur les monômes. Ces transformations sont de deux sortes: 1) apparition ou disparition d'un couple $\bar{L}_i L_i$ ou $l_j \bar{l}_j$, 2) substitution d'un couple de lettres non barrées à un autre: les lettres non barrées représentent les éléments du semi-groupoïde préordonné S_p donné, les lettres barrées leurs inverses dans le groupoïde cherché. Une "chaîne spéciale" représente une suite commençant par un mot formé de deux éléments de S_p, continuant par un nombre fini de mots identiques au premier dans le groupoïde cherché G_p et se terminant par un mot formé de nouveau de deux éléments de S_p : l'identité des mots extrêmes dans toute chaîne de ce type est une condition nécessaire pour que S_p puisse être plongé dans un G_p. Il faut d'autre part aussi que S soit un semi-groupoïde rectangulaire (associativité stricte simplifiabilité du préordre, composabilité rectangulaire).

Pour établir le théorème fondamental d'immersibilité, on considère le produit libre $A * \bar{A}$ du semi-groupoïde rectangulaire préordonné A par son image anti-isomorphe $\bar{A}$; à partir de ce produit libre, on construit le groupoïde préordonné G_p par

a) introduction de nouveaux éléments neutres $x\bar{x}$, $\bar{x}x$,

b) réduction des substitutions (par exemple ab = c, c → d, d = fg peut être remplacé par ab → fg);

c) identifications de deux mots liés par une chaîne monotone dans laquelle deux mots consécutifs sont toujours identiques

Les chaînes sont alors étudiées d'une façon plus approfondie en utilisant le rôle spécial qu'y jouent les lettres barrées. L'élimination de certains cas, qui étaient a priori possibles, amène une simplification notable: toute lettre barrée peut être considérée comme gauche ou droite, c'est à dire comme apparaissant et disparaissant du même côté, gauche ou droit (par l'intervention d'un élément neutre du type $\bar{x} \cdot x$ ou $x\bar{x}$). De plus, une lettre gauche par exemple est normale dans la chaîne si, pendant son existence dans la chaîne, aucune transformation n'est effectuée à sa gauche; une chaîne est normale si toutes ses lettres barrées sont normales dans la chaîne. Un mot est normal dans une chaîne si tous ses éléments gauches se trouvent à gauche de ses éléments droits.

Le théorème fondamental peut s'énoncer: "une chaîne liant deux mots normaux est équivalente à une chaîne normale" . Cet énoncé contient le théorème de Malcev généralisé: "chaque chaîne commençant et finissant dans un associatif est équivalente à une chaîne normale"

La démonstration repose sur les lemmes suivants, dont les énoncés ont une remarquable simplicité:

1. Dans une chaîne normale, tous les mots sont normaux;

2. Une lettre barrée quelconque dans une chaîne peut toujours être normalisée;

3. La normalisation d'une lettre dans une chaîne dont les extrémités sont des mots normaux, ne détruit pas la normalité éventuelle d'autres lettres barrées de la chaîne.

Finalement, les chaînes quèlconques de transformations élémentaires intervenant dans la construction de G à partir de A se réduisent au type standard des chaînes normales et celles-ci coïncident avec les chaînes de Malcev définies au moyen de la représentation par les courants: ainsi apparaît clairement la signification du théorème de Malcev généralisé.

La première partie se termine par l'étude des cas particuliers les plus remarquables (liaison avec les résultats de Malcev, de Ore, et de Doss).

Deuxième partie.

M. Tamari s'est proposé ici d'étudier systématiquement les chaînes de Malcev, de les énumérer complètement en fonction de leur longueur n , en distinguant éventuellement entre chaînes connexes et chaînes disconnexes (chap. II, § 1). Le nombre k_n des chaînes unilatères de longueur n (n courants situés du même côté de l'axe des t) est le nombre de Catalan

$$k_n = \frac{1}{n+1}\binom{2n}{n}$$

(déjà rencontré par Euler), dont la factorisation est étudiée. Le nombre M_n des chaînes de Malcev de longueur n est

$$M_n = k_n k_{n+1}$$

Les nombres C_n, D_n des chaînes connexes et disconnexes peuvent être calculés de proche en proche.

Un dernier chapitre est consacré à l'étude des <u>prototypes</u>: chacun d'eux, défini comme classe d'équivalence dans l'ensemble des chaines Σ détermine un semi-groupe libre préordonné non immersible dans un groupe préordonné. Inversement, chaque demi-groupoïde préordonné non immersible contient des images homomorphes de tels prototypes sans contenir leur fermeture de groupe. La longueur minimale m d'un tel prototype sans fermeture donne une mesure de l'immersibilité.

<u>Conclusion</u>.

M. Tamari a fourni depuis son arrivée en France un effort intense qui lui a permis de réunir un vaste ensemble de résultats, et aussi d'améliorer d'une façon très nette ses méthodes de travail et ses qualités d'exposition.

Les problèmes d'immersion présentent une difficulté bien connue des algébristes: c'est donc un réel mérite d'en avoir si nettement amélioré et étendu les solutions, en ouvrant d'ailleurs les voies à de nouvelles recherches (problèmes mentionnés à la fin de l'introduction). M. Tamari a fait preuve d'une grande puissance de réflexion, d'une bonne aptitude à analyser un ensemble complexe de propriétés et à dégager les phénomènes essentiels. Il mérite sans aucun doute le grade de Docteur ès Sciences, avec la mention très honorable.

P. Dubreil