

L3 S1 Logique

Dédution naturelle

Matteo Manighetti

14 décembre 2023

Pour plus d'exercices avec résolution : <https://users.ox.ac.uk/~logicman/carr/NDpack.pdf>

1. $(A \rightarrow (B \rightarrow C)) \rightarrow ((A \wedge B) \rightarrow C)$

Solution :

$$\begin{array}{c}
 \frac{\frac{[A \wedge B]^{(2)}}{B} \wedge_e \quad \frac{\frac{[A \wedge B]^{(2)}}{A} \wedge_e \quad [A \rightarrow (B \rightarrow C)]^{(1)}}{B \rightarrow C} \rightarrow_e}{C} \rightarrow_i (2)}{(A \wedge B) \rightarrow C} \rightarrow_i (1)}{(A \rightarrow (B \rightarrow C)) \rightarrow ((A \wedge B) \rightarrow C)} \rightarrow_i (1)
 \end{array}$$

2. $(A \wedge B) \rightarrow \neg(\neg A \vee \neg B)$

Solution :

$$\begin{array}{c}
 \frac{\frac{[A \wedge B]^{(1)}}{A} \wedge_e \quad [\neg A]_{(3)} \neg_e \quad \frac{\frac{[A \wedge B]^{(1)}}{B} \wedge_e \quad [\neg B]_{(3)} \neg_e}{\perp} \vee_e (3)}{\perp} \neg_e}{\neg(\neg A \vee \neg B)} \neg_i (2)}{(A \wedge B) \rightarrow \neg(\neg A \vee \neg B)} \rightarrow_i (1)
 \end{array}$$

3. $\forall x(Ax \wedge Bx) \rightarrow (\forall xAx \wedge \forall xBx)$

Solution : Pour plus de clareté, les *eigenvariables* introduites avec la règle \forall_i sont indiquées par le mot *var*, et les termes utilisés avec la règle \forall_e sont indiqués par le mot *term*.

$$\frac{\frac{\frac{[\forall x(Ax \wedge Bx)]^{(1)}}{Aw \wedge Bw} \forall_e, term : w}{\frac{Aw}{\forall x Ax} \forall_i, var : w} \wedge_e}{(\forall x Ax \wedge \forall x Bx)} \frac{\frac{[\forall x(Ax \wedge Bx)]^{(1)}}{Aw \wedge Bw} \forall_e, term : w}{\frac{Bw}{\forall x Bx} \forall_i, var : w} \wedge_e}{\forall x(Ax \wedge Bx) \rightarrow (\forall x Ax \wedge \forall x Bx)} \rightarrow_i (1)$$

4. $\forall x Rxx, \forall x \forall y \forall z (Rxy \wedge Rxz \rightarrow Ryz) \vdash \forall x \forall y (Rxy \rightarrow Ryx)$

Solution :

$$\frac{\frac{\frac{[\forall x \forall y \forall z (Rxy \wedge Rxz \rightarrow Ryz)]^{(hyp2)}}{\forall y \forall z (Rwy \wedge R wz \rightarrow Ryz)} \forall_e, term : w}{\frac{\forall z (Rvw \wedge R wz \rightarrow Rvz)}{Rvw \wedge Rvw \rightarrow Rvw} \forall_e, term : w} \forall_e, term : w}{\frac{Rvw}{Rvw \rightarrow Rvw} \rightarrow_i (2)} \frac{\frac{[\forall x Rxx]^{(hyp1)}}{Rww} \forall_e, term : w}{\frac{[Rvw]^{(2)}}{Rvw \wedge Rvw} \wedge_i} \wedge_e}{\frac{\forall y (Rwy \rightarrow Ryw)}{\forall x \forall y (Rxy \rightarrow Ryx)} \forall_i, var : v} \forall_i, var : w$$

5. $\exists x (Px \wedge \forall y (Qxy)) \vdash \forall y \exists x (Px \wedge Qxy)$

Solution :

$$\frac{\frac{\frac{[\exists x (Px \wedge \forall y Qx)]^{(hyp1)}}{\frac{Px \wedge \forall y Qvy}{} \wedge_e} \wedge_e}{\frac{Px \wedge Qvw}{\exists x (Px \wedge Qxw)} \exists_i, term : v} \exists_i, term : v}{\frac{\exists x (Px \wedge Qxw)}{\forall y \exists x (Px \wedge Qxy)} \forall_i, var : w} \forall_i, var : w$$

6. $\exists x \forall y (P(x) \wedge (R(y) \rightarrow T(x, y))) \rightarrow \forall x \forall y ((\neg P(x) \vee \neg S(y)) \vee \neg T(x, y)) \rightarrow \forall x (\neg R(x) \vee \neg S(x))$