L3 S1 Logique
Épreuve 1 : Langages formels et théorie des ensembles

Matteo Manighetti

14 décembre 2023

Exercices

1. (2 points) Traduire les frases suivantes dans le calcul des prédicats, en spécifiant le langage utilisé.

   (a) Les sages se taisent.

   Solution : $\mathcal{L} = \{S^1, T^1\}, \forall x(Sx \to Tx)$

   (b) Les philosophes lisent, mais ce ne sont pas les seuls.

   Solution : $\mathcal{L} = \{L^1, P^1\}, \forall x(Px \to Lx) \wedge \exists x(\neg Px \wedge Lx)$

   (c) Seuls les sages sont heureux et les envieux ne sont pas sages.

   Solution : $\mathcal{L} = \{S^1, H^1, E^1\}, \forall x((Hx \to Sx) \wedge (Ex \to \neg Sx))$

   (d) Tout le monde qui possède un chat l'aime.

   Solution : $\mathcal{L} = \{C^1, P^2, A^2\}, \forall x \forall y((Cy \wedge Pxy) \to Axy)$

2. (4 points) Pour chaque formule, indiquer : i) si c'est une négation, une conjonction, une disjonction, une implication, une formule universelle ou une formule existentielle ; ii) la portée des quantificateurs ; iii) les variables libres

   (a) $\exists x(Axy \wedge Bx)$

   (b) $\exists x Axy \wedge Bx$

   (c) $\exists x(\exists y Axy \to Bx)$

   (d) $\neg \exists x \exists y Axy \to Bx$

   (e) $\neg Bx \to (\neg \forall y(\neg Axy \vee Bx) \to Cy)$

   (a) **Existentielle ;** $(Axy \wedge Bx)$**;** y

   (b) **Conjonction ;** Axy**;** y, x **(dans** Bx**)**

   (c) **Existentielle ;** $\exists y Axy \to Bx$ **et** Axy**;Aucune**

   (d) **Implication ;** $\exists y Axy$ **et** Axy**;** x **dans** Bx

   (e) **Implication ;** $\neg Axy \vee Bx$**;** x **dans** Bx**,** y **dans** Cy

(f) $\exists x(\exists y Axy \lor By)$

(f) **Existentielle ;** $\exists y Axy \lor By$ **et** Axy**;** y **dans** By

(g) $\forall x \forall y((Axy \land By) \to \exists w Cxw)$

(g) **Universelle ;** $\forall y((Axy \land By) \to \exists w Cxw)$**,**

(g) $(Axy \land By) \to \exists w Cxw$ **et** Cxw**; Aucune**

(h) $\forall x \forall y Ayy \to Bx$

(h) **Implication ;** $\forall y Ayy$**,** Ayy**;** x **dans** Bx

3. (2 points) Pour chaque formule φ, écrire $\varphi[c/x]$. Pour rappel, la substitution d'un terme à une variable revient à remplacer les occurrences libres de la variable par ce terme.
   (a) Axy

   (a) **Acy**

   (b) $\forall x Bxx$

   (b) $\forall x Bxx$

   (c) $\exists x \exists y Axy \to Bx$

   (c) $\exists x \exists y Axy \to Bc$

   (d) $\forall x \forall y Ayy \to Bx$

   (d) $\forall x \forall y Ayy \to Bc$

4. (4 points) Soient $A = \{1, 2, 5, \emptyset\}$ et $B = \{5, 7, 1\}$. Écrire les ensembles suivants :
   (a) $A \cup B$

   (a) $\{1, 2, 5, 7, \emptyset\}$

   (b) $A \cap B$

   (b) $\{1, 5\}$

   (c) $\mathcal{P}(A)$

   (c) $\{\emptyset, \{1\}, \{2\}, \{5\}, \{\emptyset\}, \{1, 2\}, \{1, 5\}, \{1, \emptyset\}, \{2, \emptyset\}, \{2, 5\},$

   (c) $\{5, \emptyset\}, \{1, 5, \emptyset\}, \{2, 5, \emptyset\}, \{1, 2, \emptyset\}, \{1, 2, 5\}, \{1, 2, 5, \emptyset\}\}$

   (d) $\mathcal{P}(A) \cap \mathcal{P}(B)$

   (d) $\{\emptyset, \{1\}, \{5\}, \{1, 5\}\}$

5. (4 points) Prouver que deux ensembles x et y sont égaux si chacun est sous-ensemble de l'autre : $x = y$ ssi $x \subseteq y \land y \subseteq x$

Solution :

$$
\begin{aligned}
x \subseteq y \land y \subseteq x &\iff \forall z(z \in x \to z \in y) \land \forall z(z \in y \to z \in x) \\
&\iff \forall z(z \in x \leftrightarrow z \in y) \\
&\iff x = y
\end{aligned}
$$

6. (4 points) Démontrer que $A \cap B \subseteq A \cup B$, et expliquer pourquoi l'inclusion réciproque est fausse.

> **Solution :** Soit $x \in A \cap B$. Alors $x \in A$ et $x \in B$. Généralisant, on a $x \in A$ ou $x \in B$. Donc $x \in A \cup B$.
>
> L'inclusion réciproque est fausse car $A \cup B$ peut contenir des éléments qui ne sont pas dans A et B en même temps. Prénons par exemple $A = \{1, 2\}$ et $B = \{1\}$.

7. (4 points (bonus)) On remplace l'axiome de l'ensemble vide par un axiome qui nous assure l'existence d'un ensemble non vide.

   En utilisant les autres axiomes de la théorie des ensembles, prouver l'existence de l'ensemble vide.

> **Solution :** Soit E un ensemble non vide, dont on connait l'existence. On peut par exemple utiliser l'axiome de séparation pour construire l'ensemble vide à partir de E, la propriété étant $x \neq x : \emptyset = \{x \in E | x \neq x\}$.
>
> Alternativement, on peut utiliser l'axiome des parties pour construire l'ensemble l'ensemble $\mathcal{P}(E)$, et ensuite on montre qu'aucun element appartient simultanément à tous les ensembles de $\mathcal{P}(E)$. L'intersection de tous les ensembles de $\mathcal{P}(E)$ est donc vide, et donc l'ensemble vide existe.

Question :	1	2	3	4	5	6	7	Total
Points :	2	4	2	4	4	4	0	20
Résultat :								