THALES

Séminaire Ethics, Law & New applications of AI
Ecole Polytechnique

Apprentissage nonsupervisé sur des variétés homogènes, des groupes de Lie et des matrices structurées basé sur la Géométrie de l'Information et la Thermodynamique des Groupes de Lie de Souriau

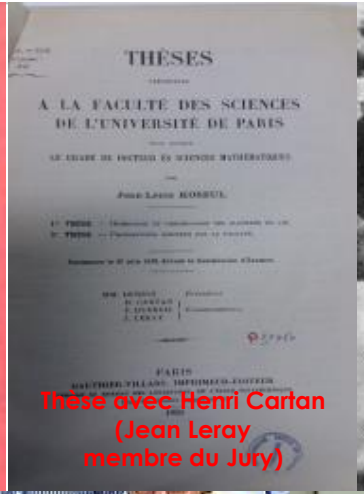
Frédéric Barbaresco, Expert Radar
Représentant du segment technologique « traitements, commandes et cognition » des systèmes terrestres et aériens
Groupe THALES
www.thalesgroup.com

à Jean-Louis Koszul
1921-2018

ALEAE GEOMETRIA
Géométrie du hasard

Blaise Pascal

En mémoire à Jean-Louis Koszul 1921-2018



Thèse avec Henri Cartan
(Jean Leray
membre du Jury)

Groupe Bourbaki

Professeur à
Strasbourg et à
Grenoble

Jean-Louis Koszul à GSI'13 aux Mines de Paris

En mémoire à Jean-Louis Koszul 1921-2018

[A] Barbaresco, F. Jean-Louis Koszul and the elementary structures of Information Geometry. In Geometric Structures of Information Geometry; Nielsen, F.; Ed.; Springer: Berlin, Germany, 2018
[B] Barbaresco, F. Koszul Contemporaneous Lectures: Elementary Structures of Information Geometry and Geometric Heat Theory. In Introduction to Symplectic Geometry; Koszul, J.L., Ed.; Springer: Berlin, Germany, 2018.
[C] Barbaresco, F. Jean-Louis Koszul et les Structures Elémentaires de la Géométrie de l'Information; Revue SMAI Matapli; SMAI Editor; Volume 116, pp.71-84, Novembre 2018
[D] Barbaresco, F. Les densités de probabilité « distinguées » et l'équation d'Alexis Clairaut: regards croisés de Maurice Fréchet et de Jean-Louis Koszul, Conférence Histoire de la discipline, GRETSI'17 , Juan-Les-Pins, Septembre 2017

Jean-Louis Koszul au colloque « Topologie différentielle », Strasbourg 1953 avec Chern, de Rham, Eckmann, Ehresmann, Godeaux, Hopf, Lichnerowicz, Malgrange, Milnor, Reeb, Schwartz, Süss, Thom, Libermann et Weil.

This document may not be reproduced, modified, adapted, published, translated, in any way, in whole or in part or disclosed to a third party without the prior written consent of Thales - © Thales 2015 All rights reserved.

THALES

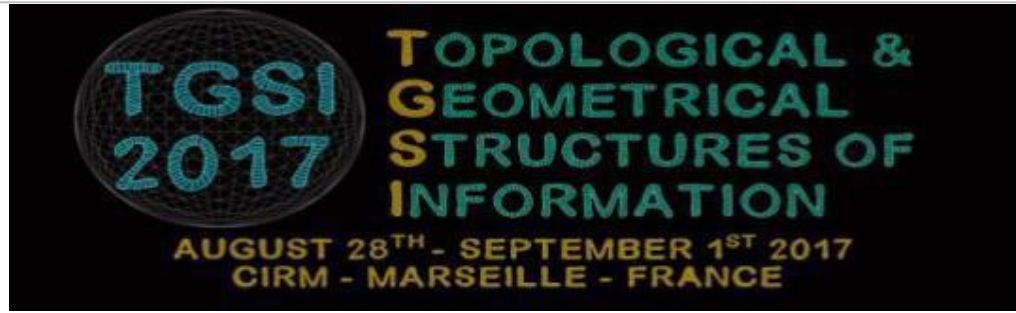
CIRM Seminar, August 2017
TGSI'17 « Topological & Geometrical Structures of Information »

TGSI'17 videos & slides
http://forum.cs-dc.org/category/94/tgsi2017

Special Issue "**Topological and Geometrical Structure of Information**", Selected Papers from CIRM conferences 2017"

http://www.mdpi.com/journal/entropy/special_issues/topological_geometrical_info

entropy
an open access journal by MDPI



Talk on Koszul-Souriau Characteristic Function:
https://www.youtube.com/watch?v=VXxiMCn-tsE&feature=youtu.be

This document may not be reproduced, modified, adapted, published, translated, in any way, in whole or in part or disclosed to a third party without the prior written consent of Thales - © Thales 2015 All rights reserved

THALES

FGSI'19 Cartan-Koszul-Souriau « Foundations of Geometric Structure of Information », 4-6 Février 2019, IMAG Montpellier

FGSI'19 Cartan-Koszul-Souriau

- Site web: https://fgsi2019.sciencesconf.org
- Workshop on the influence of the Triumvirate **Elie Cartan (ENS, 1888), Jean-Louis Koszul (ENS, 1940) and Jean-Marie Souriau (ENS, 1942)** on Foundation of Geometric Structure of Information.
- For the 50th birthday of Jean-Marie Souriau Book "Structure des systèmes dynamiques" published in 1969, and Jean-Louis Koszul Book Translation by Springer "Introduction to Symplectic Geometry
- Both Koszul and Souriau were influenced by Elie Cartan works on symmetric homogeneous spaces.
  - Jean-Louis Koszul has developed theory of hessian geometry introducing Koszul forms that are fundamental structures in Information Geometry.
  - Jean-Marie Souriau has developed in the framework of Geometrical Mechanics applied for Statistical Mechanics, a Lie Group Thermodynamics in Homogeneous Symplectic Manifold. Based on Souriau cocycle, this thermodynamics defines a generalized Fisher metric where the Gibbs Maximum Entropy is covariant with respect to dynamic groups of Physics.
- Elie Cartan started his carreer at Montpellier, where he was appointed in 1894 as lecturer in mathematics

This document may not be reproduced, modified, adapted, published, translated, in any way, in whole or in part or disclosed to a third party without the prior written consent of Thales - © Thales 2015 All rights reserved.

This document may not be reproduced, modified, adapted, published, translated, in any way, in whole or in part or disclosed to a third party without the prior written consent of Thales - © Thales 2015 All rights reserved.

SOURIAU 2019

- Site web: http://souriau2019.fr
- In 1969, the groundbreaking book of Jean-Marie Souriau appeared "**Structure des Systèmes Dynamiques**". We will celebrate, in 2019, the jubilee of its publication, with a conference in honour of the work of this great scientist.
- Topics: Symplectic Mechanics, Geometric Quantization, Relativity & General Covariance, Thermodynamics, Cosmology, Diffeology, Philosophy
- Panel on Thermodynamics (including "Lie Groups Thermodynamics, Souriau-Fisher Metric")

Geometric Science of Information: GSI

GSI'13
Mines ParisTech

Slides:
https://www.see.asso.fr/gsi2013

GSI'15
Ecole Polytechnique

Videos:
https://www.youtube.com/channel/UC5HHo1jbQXusNQzU1iekaGA
UNITWIN website (slides & videos):
http://forum.cs-dc.org/category/90/gsi2015

This document may not be reproduced, modified, adapted, published, translated, in any way, in whole or in part or disclosed to a third party without the prior written consent of Thales - © Thales 2015 All rights reserved.

GSI'17: Mines ParisTech
150 attendees from 38 countries

Videos:
https://www.youtube.com/channel/UCnE9-LbfFRqtaes49cN2DVg/videos
Website: www.gsi2017.org

This document may not be reproduced, modified, adapted, published, translated, in any way, in whole or in part or disclosed to a third party without the prior written consent of Thales - © Thales 2015 All rights reserved.

THALES

GSI'19 Geometric Science of Information
27-29 Aout 2019, Toulouse, ENAC

GSI'19 (4ème édition)

- Probability on Riemannian Manifolds
- Optimization on Manifold
- Shape Space
- Statistics on non-linear data
- Lie Group Machine Learning
- Harmonic Analysis on Lie Groups
- Statistical Manifold & Hessian Information Geometry
- Monotone Embedding in Information Geometry
- Non-parametric Information Geometry
- Computational Information Geometry
- Divergence Geometry
- Optimal Transport
- Geometric Deep Learning
- Geometry of Hamiltonian Monte Carlo
- Information Topology
- Geometric & (Poly)Symplectic Integrators
- Geometric structures in thermodynamics and statistical physics

Site: www.gsi2019.org

- Contact Geometry & Hamiltonian Control
- Geometric and structure preserving discretizations
- Geometry of Quantum States
- Geodesic Methods with Constraints
- Probability Density Estimation & Sampling in High Dimension
- Geometry of Graphs and Networks
- Distance Geometry
- Geometry of Tensor-Valued Data
- Geometric Mechanics
- Geometric Robotics & Learning
- Geometry in Neuroscience & Cognitive Sciences

A special session will deal with:

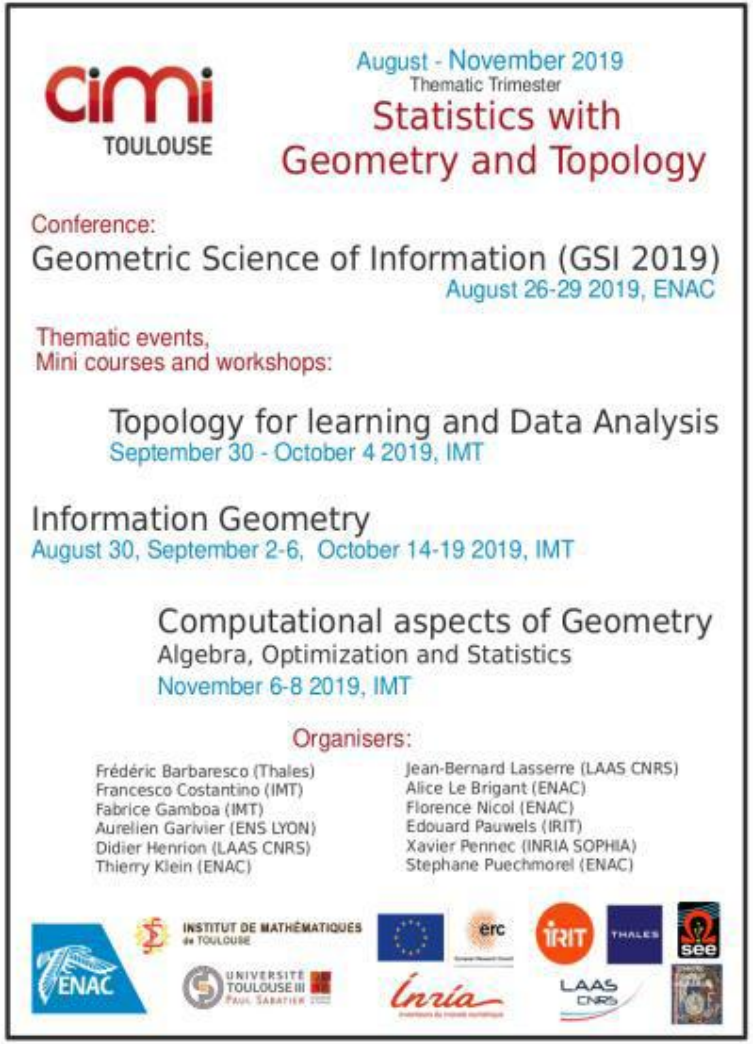
- Geometric Science of Information Libraries (geomstats, pyRiemann , …)

This document may not be reproduced, modified, adapted, published, translated, in any way, in whole or in part or disclosed to a third party without the prior written consent of Thales - © Thales 2015 All rights reserved.

Trimestre 2019 Labex CIMI, Toulouse « Statistics with Geometry & Topology »

Trimestre « Statistics with Geometry & Topology », Toulouse, Aout-Sept. 2019

- Opening Event: **Geometric Science of Information** (GSI 19), 25-27 Septembre 2019, ENAC
- **Information Geometry**, 30 Aout au 6 Septembre & 14 au 19 Octobre 2019, IMT
- **Topology for Learning and Data Analysis**, 29 Septembre-4 Octobre 2019, IMT
- **Computational Aspects of Geometry**, 6-8 Novembre 2019, IMT

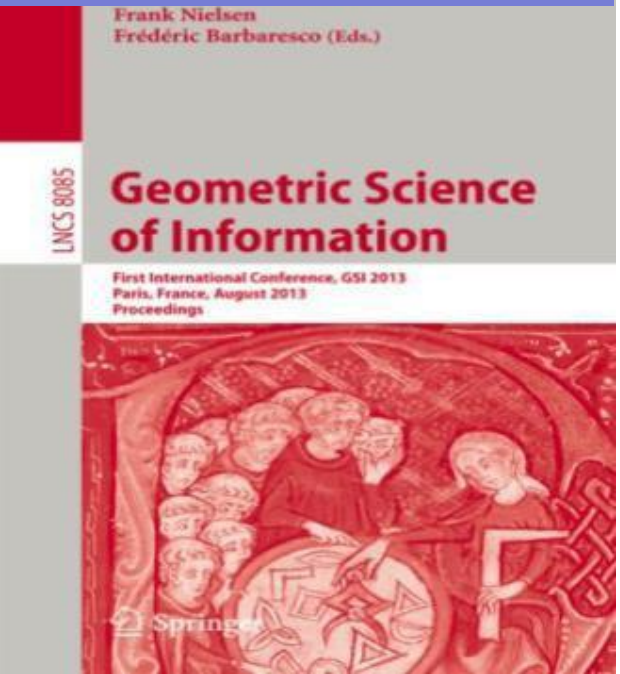


This document may not be reproduced, modified, adapted, published, translated, in any way, in whole or in part or disclosed to a third party without the prior written consent of Thales - © Thales 2015 All rights reserved.

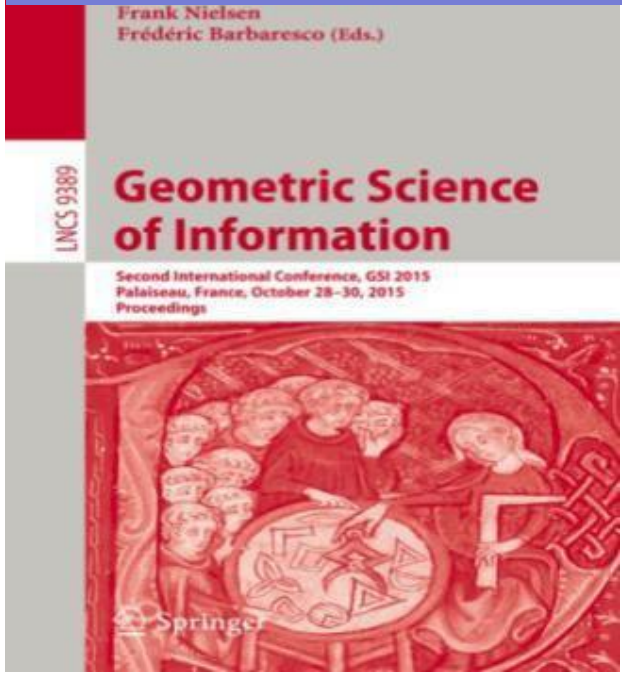
GSI SPRINGER PROCEEDINGS
LECTURE NOTES IN COMPUTER SCIENCE

n whole or in
ghts reserved.

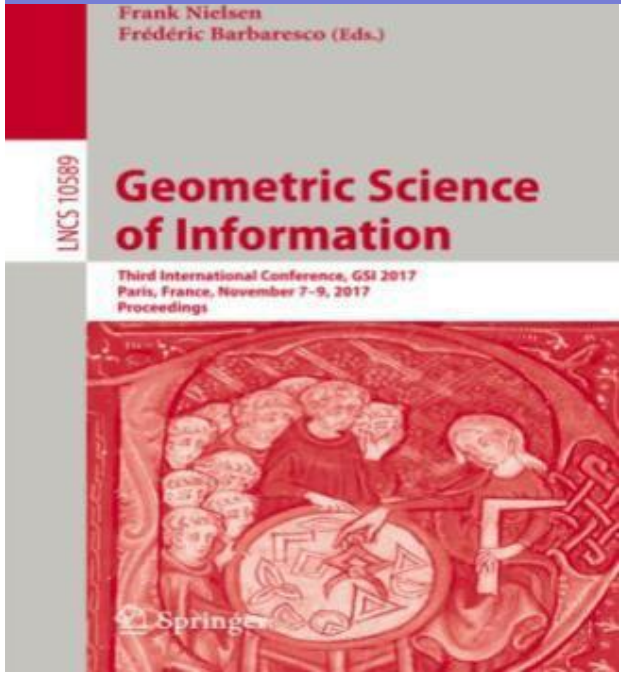
GSI'13 Springer Proceedings:
http://www.springer.com/us/book/9783642400193



GSI'15 Springer Proceedings:
http://www.springer.com/la/book/9783319250397



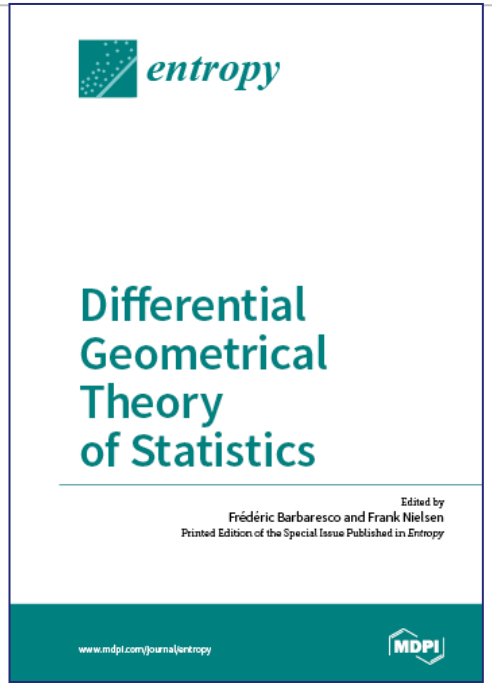
GSI'17 Springer Proceedings:
http://www.springer.com/cn/book/9783319684444



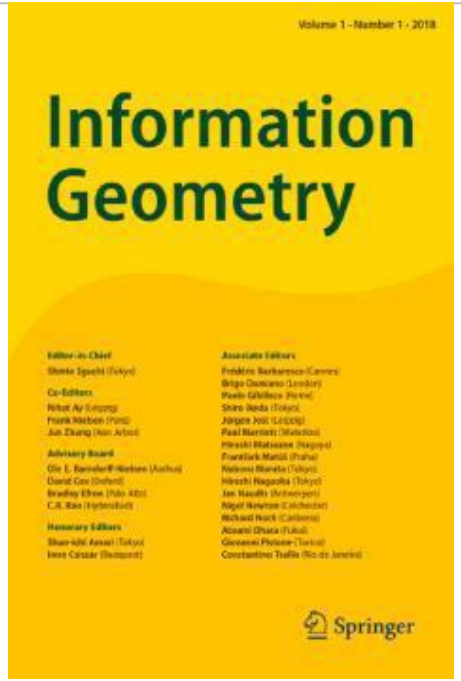
THALES

Dernières parutions

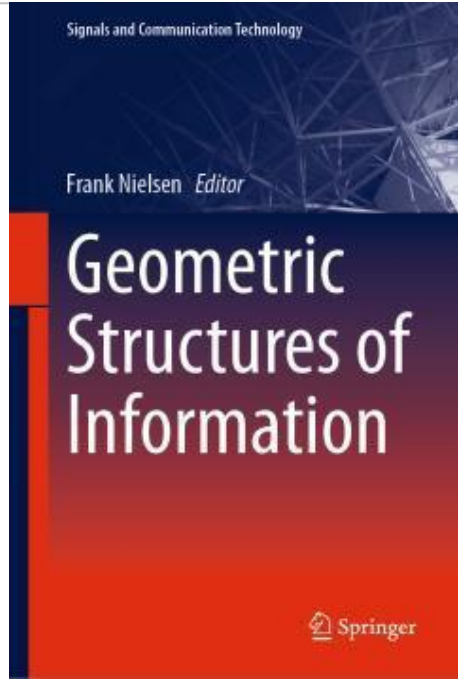
https://www.mdpi.com/books/pdfview/book/127



https://www.mdpi.com/books/pdfview/book/313



https://www.springer.com/mathematics/geometry/journal/41884



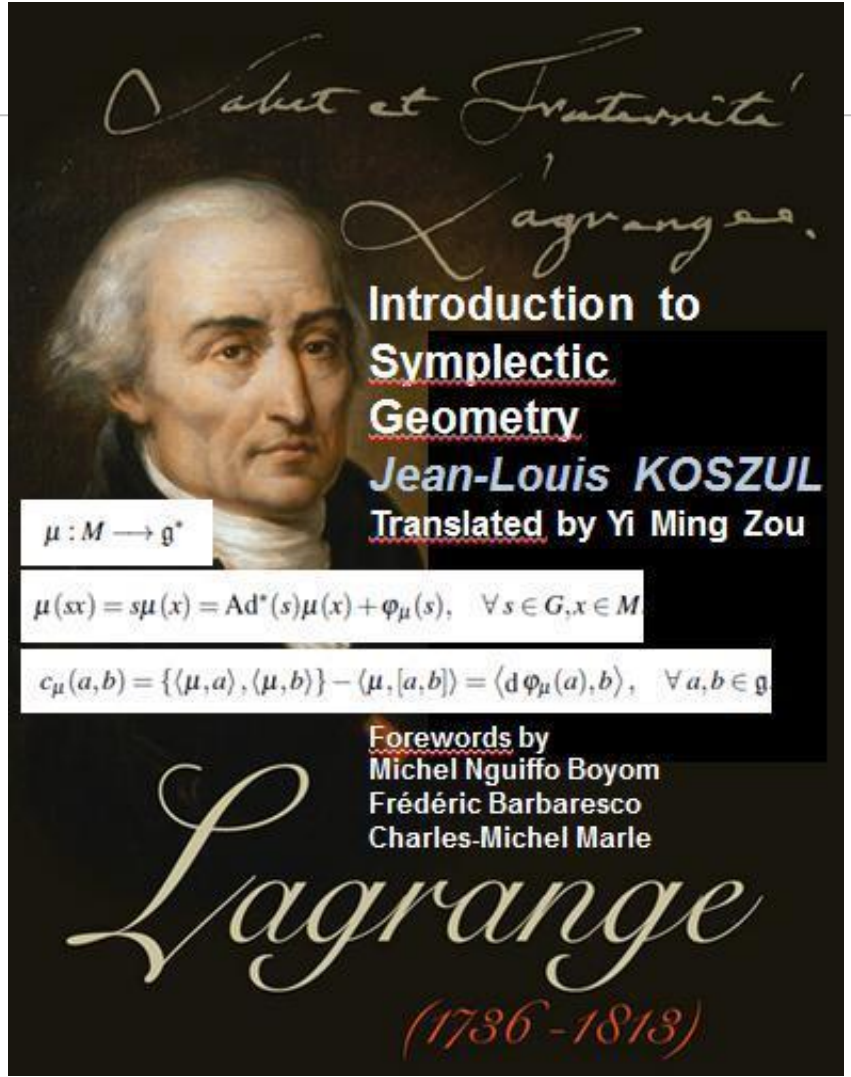
https://www.springer.com/us/book/9783030025199

Autres publications : voir sur UNITWIN « GEOMETRIC SCIENCE OF INFORMATION »

This document may not be
part or disclosed

THALES

Livre inédit de Koszul traduit par Springer



This document may not be reproduced, modified, adapted, published, translated, in any way, in whole or in part or disclosed to a third party without the prior written consent of Thales - © Thales 2015 All rights reserved.

THALES

Koszul Book « Introduction to Symplectic Geometry » traduction par SPRINGER, préfaces Koszul, Marle, Boyom, Barbaresco

This document may not be reproduced, modified, adapted, published, translated, in any way, in whole or in part or disclosed to a third party without the prior written consent of Thales - © Thales 2015 All rights reserved.

Table of Contents

1 Some Algebra Basics 1
- 1.1 Skew-symmetric forms 1
- 1.2 Symplectic vector spaces, symplectic bases 8
- 1.3 The canonical linear representation of $sl(2,k)$ in the algebra of the skew-symmetric forms on a symplectic vector space 10
- 1.4 Symplectic groups 15
- 1.5 Symplectic complex structures 21

2 Symplectic Manifolds 25
- 2.1 Symplectic structures on manifolds 26
- 2.2 Operators of the algebra of differential forms on a symplectic manifold 31
- 2.3 Symplectic coordinates 37
- 2.4 Hamiltonian vector fields and symplectic vector fields 43
- 2.5 Poisson brackets under symplectic coordinates 54
- 2.6 Submanifolds of symplectic manifolds 59

3 Cotangent Bundles 69
- 3.1 Liouville forms and canonical symplectic structures on cotangent bundles 69
- 3.2 Symplectic vector fields on a cotangent bundle 74
- 3.3 Lagrangian submanifolds of a cotangent bundle 83

4 Symplectic G-spaces 91
- 4.1 Definations and examples 93
- 4.2 Hamiltonian $\mathfrak{g}$-spaces and moment maps 97
- 4.3 Equivariance of moment maps 108

5 Poisson Manifolds 113
- 5.1 The structure of a Poisson manifold 113
- 5.2 The leaves of a Poisson manifold 119
- 5.3 Poisson structures on the dual of a Lie algebra 124

6 A Graded Case 138
- 6.1 $(0,n)$-dimensional supermanifolds 138
- 6.2 $(0,n)$-dimensional symplectic supermanifolds 144

Bibliography 148

Index 151

Notation 154

Foreword

I was invited to give lectures at Nankai University in the spring of 1983. This book is based on the lecture note, translated and written (with minor modifications) by Yi Ming Zou. We hope to introduce symplectic manifold theory to the readers through this introductory book.

The development of analytical mechanics provided the basic concepts of symplectic structures. The term symplectic structure is due largely to analytical mechanics. But in this book, the applications of symplectic structure theory to mechanics is not discussed in any detail; and some of the important parts of the theory, especially the application in analysis, are not discussed at all. For those topics, we refer the readers to the references [1, 2, 7, 26]. The emphasis of this book is on the differential properties of manifolds with symplectic structures.

Chapter 4 discusses symplectic G-spaces, that is, symplectic manifolds with symplectic structures that are invariant under the actions of some Lie group G. For these symplectic manifolds, certain maps we call moment maps provide with us an effective study tool. The study of symplectic G-spaces is a rich topic in symplectic manifold theory, there are still many problems that deserve further study. The study of the symplectic G-spaces leads us to the study of the dual structures of Lie algebras and the geometry properties of the so-called coadjoint representations. We will discuss these subjects in section 4.3, which will last until chapter 5.

THALES

THALES

Motivation

ALEAE GEOMETRIA

Géométrie du hasard

Blaise Pascal

Motivation: Information Geometry & Machine Learning

Information Geometry & Natural Gradient

- Information geometry has been derived from invariant geometrical structure involved in statistical inference. The Fisher metric defines a Riemannian metric as the Hessian of two dual potential functions, linked to dually coupled affine connections in a manifold of probability distributions. With the Souriau model, this structure is extended preserving the Legendre transform between two dual potential function parametrized in Lie algebra of the group acting transentively on the homogeneous manifold.
- Classically, to optimize the parameter θ of a probabilistic model, based on a sequence of observations y_t , is an online gradient descent with learning rate η_t , and the loss function $l_t = -\log p\left(y_t / \hat{y}_t\right)$:

$$\theta_t \leftarrow \theta_{t-1} - \eta_t \frac{\partial l_t\left(y_t\right)^T}{\partial \theta}$$

This document may not be reproduced, modified, adapted, published, translated, in any way, in whole or in part or disclosed to a third party without the prior written consent of Thales - © Thales 2015 All rights reserved.

THALES

Motivation: Information Geometry & Machine Learning

Information Geometry & Natural Gradient

- This simple gradient descent has a first drawback of using the same non-adaptive learning rate for all parameter components, and a second drawback of non invariance with respect to parameter re-encoding inducing different learning rates. Amari has introduced the natural gradient to preserve this invariance to be insensitive to the characteristic scale of each parameter direction. The gradient descent could be corrected by $I(\theta)^{-1}$ where I is the Fisher information matrix with respect to parameter θ, given by:

$$\theta_t \leftarrow \theta_{t-1} - \eta_t I(\theta)^{-1} \frac{\partial l_t(y_t)^T}{\partial \theta}$$

$$I(\theta) = \left[g_{ij} \right]$$

$$\text{with } g_{ij} = \left[-E_{y \sim p(y/\theta)} \left[\frac{\partial^2 \log p(y/\theta)}{\partial \theta_i \partial \theta_j} \right] \right]_{ij} = \left[E_{y \sim p(y/\theta)} \left[\frac{\partial \log p(y/\theta)}{\partial \theta_i} \frac{\partial \log p(y/\theta)}{\partial \theta_j} \right] \right]_{ij}$$

This document may not be reproduced, modified, adapted, published, translated, in any way, in whole or in part or disclosed to a third party without the prior written consent of Thales - © Thales 2015 All rights reserved.

THALES

Motivation: Information Geometry & Machine Learning

Information Geometry, Dual Potentials & Fisher Metric

- Amari has proved that the Riemannian metric in an exponential family is the Fisher information matrix defined by:

$$g_{ij} = -\left[\frac{\partial^2 \Phi}{\partial \theta_i \partial \theta_j}\right]_{ij} \quad \text{with} \quad \Phi(\theta) = -\log \int_{\mathbb{R}} e^{-\langle \theta, y \rangle} dy$$

- and the dual potential, the Shannon entropy, is given by the Legendre transform:

$$S(\eta) = \langle \theta, \eta \rangle - \Phi(\theta) \quad \text{with} \quad \eta_i = \frac{\partial \Phi(\theta)}{\partial \theta_i} \quad \text{and} \quad \theta_i = \frac{\partial S(\eta)}{\partial \eta_i}$$

This document may not be reproduced, modified, adapted, published, translated, in any way, in whole or in part or disclosed to a third party without the prior written consent of Thales - © Thales 2015 All rights reserved.

THALES

Motivation: Information Geometry & Machine Learning

Statistical Mechanics, Dual Potentials & Fisher Metric

- In geometric statistical mechanics, Souriau has developed a "Lie groups thermodynamics" of dynamical systems where the (maximum entropy) Gibbs density is covariant with respect to the action of the Lie group. In the Souriau model, previous structures of information geometry are preserved:

$$I(\beta) = -\frac{\partial^2 \Phi}{\partial \beta^2} \text{ with } \Phi(\beta) = -\log \int_M e^{-\langle \beta, U(\xi) \rangle} d\lambda$$

$$S(Q) = \langle \beta, Q \rangle - \Phi(\beta) \text{ with } Q = \frac{\partial \Phi(\beta)}{\partial \beta} \in \mathfrak{g}^* \text{ and } \beta = \frac{\partial S(Q)}{\partial Q} \in \mathfrak{g}$$

- In the Souriau Lie groups thermodynamics model, β is a "geometric" (Planck) temperature, element of Lie algebra $\mathfrak{g}$ of the group, and Q is a "geometric" heat, element of dual Lie algebra $\mathfrak{g}^*$ of the group.

This document may not be reproduced, modified, adapted, published, translated, in any way, in whole or in part or disclosed to a third party without the prior written consent of Thales - © Thales 2015 All rights reserved.

THALES

Motivation: Information Geometry & Machine Learning

Statistical Mechanics & Fisher Metric

- Souriau has proposed a Riemannian metric that we have identified as a generalization of the Fisher metric:

$$I(\beta)=\left[g_\beta\right] \text{ with } g_\beta\left([\beta,Z_1],[\beta,Z_2]\right)=\tilde{\Theta}_\beta\left(Z_1,[\beta,Z_2]\right)$$

$$\text{with } \tilde{\Theta}_\beta\left(Z_1,Z_2\right)=\tilde{\Theta}\left(Z_1,Z_2\right)+\left\langle Q, ad_{Z_1}(Z_2)\right\rangle \text{ where } ad_{Z_1}(Z_2)=\left[Z_1,Z_2\right]$$

- The tensor $\tilde{\Theta}$ used to define this extended Fisher metric is defined by the moment map $J(x)$, from M (homogeneous symplectic manifold) to the dual Lie algebra $\mathfrak{g}^*$, given by:

$$\tilde{\Theta}(X,Y)=J_{[X,Y]}-\left\{J_X,J_Y\right\} \text{ with } J(x):M\rightarrow\mathfrak{g}^* \text{ such that } J_X(x)=\left\langle J(x),X\right\rangle, X\in\mathfrak{g}$$

- This tensor $\tilde{\Theta}$ is also defined in tangent space of the cocycle $\theta(g)\in\mathfrak{g}^*$ (this cocycle appears due to the non-equivariance of the coadjoint operator Ad_g^*, action of the group on the dual lie algebra): $Q\left(Ad_g(\beta)\right)=Ad_g^*(Q)+\theta(g)$

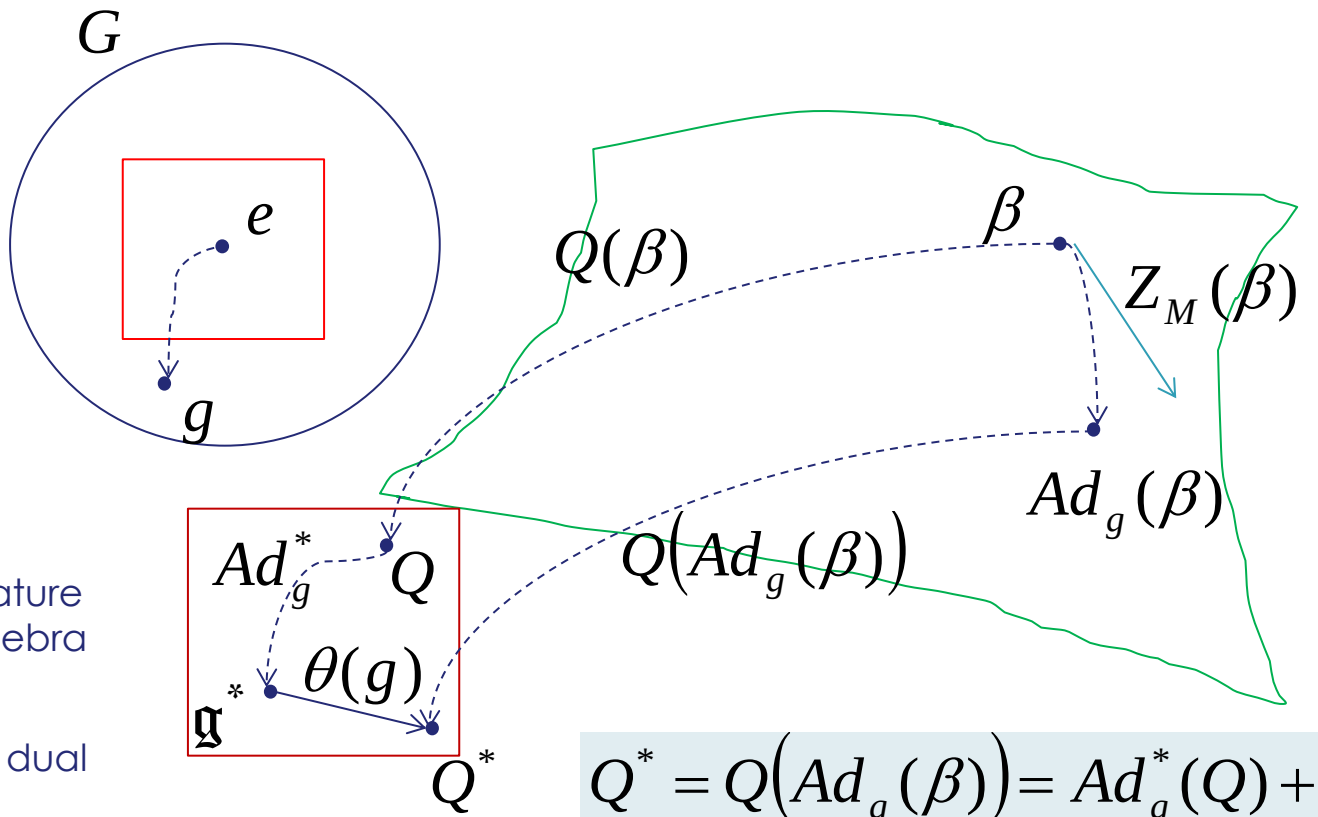
$$\tilde{\Theta}\left(X,Y\right):\mathfrak{g}\times\mathfrak{g}\rightarrow\Re \qquad \text{with } \Theta(X)=T_e\theta\left(X(e)\right)$$

$$X,Y\mapsto\left\langle\Theta(X),Y\right\rangle$$

This document may not be reproduced, modified, adapted, published, translated, in any way, in whole or in part or disclosed to a third party without the prior written consent of Thales - © Thales 2015 All rights reserved.

THALES

Fundamental Souriau Theorem



β : (Planck) température element of Lie algebra

Q : Heat, element of dual Lie Algebra

$$Q^* = Q(Ad_g(\beta)) = Ad_g^*(Q) + \theta(g)$$

This document may not be reproduced, modified, adapted, published, translated, in any way, in whole or in part or disclosed to a third party without the prior written consent of Thales - © Thales 2015 All rights reserved.

THALES

Motivation: Information Geometry & Machine Learning

Statistical Mechanics & Invariant Souriau-Fisher Metric

- In Souriau's Lie groups thermodynamics, the invariance by re-parameterization in information geometry has been replaced by invariance with respect to the action of the group. When an element of the group g acts on the element $\beta \in \mathfrak{g}$ of the Lie algebra, given by adjoint operator Ad_g . Under the action of the group , $Ad_g(\beta)$, the entropy $S(Q)$ and the Fisher metric $I(\beta)$ are invariant:

$$\beta \in \mathfrak{g} \rightarrow Ad_g(\beta) \Rightarrow \begin{cases} S\left[Q\left(Ad_g(\beta)\right)\right] = S(Q) \\ I\left[Ad_g(\beta)\right] = I(\beta) \end{cases}$$

$$I(\beta) = -\frac{\partial^2 \Phi}{\partial \beta^2} \text{ with } \Phi(\beta) = -\int_M e^{-\langle \beta, U(\xi) \rangle} d\lambda$$

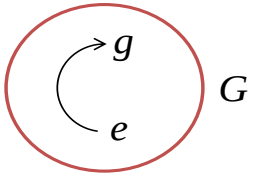
$$S(Q) = \langle \beta, Q \rangle - \Phi(\beta) \text{ with } Q = \frac{\partial \Phi(\beta)}{\partial \beta} \in \mathfrak{g}^* \text{ and } \beta = \frac{\partial S(Q)}{\partial Q} \in \mathfrak{g}$$

This document may not be reproduced, modified, adapted, published, translated, in any way, in whole or in part or disclosed to a third party without the prior written consent of Thales - © Thales 2015 All rights reserved.

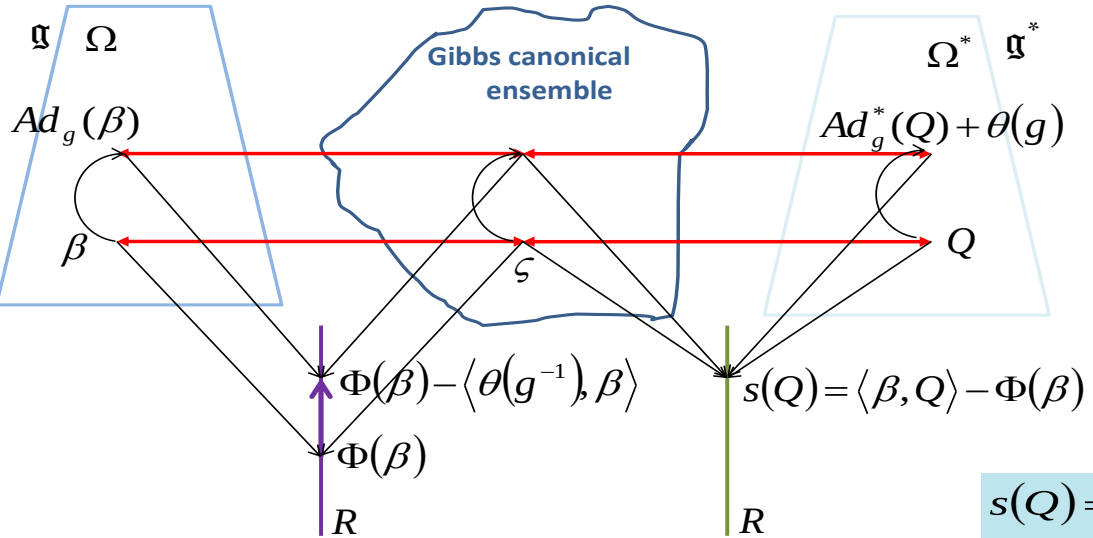
THALES

Souriau-Fisher Metric & Souriau Lie Groups Thermodynamics: Bedrock for Lie Group Machine Learning

TEMPERATURE
In Lie Algebra



HEAT
In Dual Lie Algebra



Logarithm of Partition Function (Massieu Characteristic Function)

Entropy

Fisher Metric

$$g_\beta([\beta,Z_1],[\beta,Z_2])=\tilde{\Theta}_\beta(Z_1,[\beta,Z_2])\geq 0$$

$$I(\beta)=I\left(Ad_g(\beta)\right)=-\frac{\partial^2\Phi}{\partial\beta^2}=\frac{\partial^2\log\int_M e^{-\langle\beta,U(\xi)\rangle}d\lambda}{\partial\beta^2}$$

Entropy invariant under the action of the group

Legendre Clairaut

$$s(Q)=\langle\beta,Q\rangle-\Phi(\beta)=\left\langle\Theta^{-1}(Q),Q\right\rangle-\Phi\left(\Theta^{-1}(Q)\right)$$

$$Q=\Theta(\beta)=\frac{\partial\Phi}{\partial\beta}\in\mathfrak{g}^*$$

$$\beta=\Theta^{-1}(Q)\in\mathfrak{g}$$

THALES

Motivation: Information Geometry & Machine Learning

Higher Order Souriau Lie Group Thermodynamics based on Poly-Symplectic Model of Christian Günther

- In the case of small data analytics, we propose to parameterized the (maximum entropy) Gibbs density with higher order "geometric" temperature β_k and higher order heat Q_k, that parameterized higher order entropy $S(Q_1,...,Q_n)$ and dual potential function $\Phi(\beta_1,...,\beta_n)$:

$$S(Q_1,...,Q_n) = \sum_{k=1}^{n} \langle \beta_k, Q_k \rangle - \Phi(\beta_1,...,\beta_n)$$

$$\text{with } \beta_k = \frac{\partial S(Q_1,...,Q_n)}{\partial Q_k} \text{ and } Q_k = \frac{\partial \Phi(\beta_1,...,\beta_n)}{\partial \beta_k}$$

$$\text{where } \Phi(\beta_1,...,\beta_n) = -\log \int_M e^{-\sum_{k=1}^{n} \langle \beta_k, U^k(\xi) \rangle} d\omega$$

This document may not be reproduced, modified, adapted, published, translated, in any way, in whole or in part or disclosed to a third party without the prior written consent of Thales - © Thales 2015 All rights reserved.

THALES

Motivation de la Géométrie de l'Information: travaux de Yann Ollivier
Natural Gradient & Natural Langevin Dynamics

GSI'17 Best paper Winners are:

Yann Ollivier (FACEBOOK IA Lab, Paris) & Gaétan Marceau-Caron (MILA Lab, Montreal)

Natural Langevin Dynamics for Neural Networks

Gaétan Marceau-Caron[1](✉) and Yann Ollivier[2](✉)

[1] MILA, Université de Montréal, Montréal, Canada
gaetan.marceau.caron@umontreal.ca
[2] CNRS, Université Paris-Saclay, Paris, France
contact@yann-ollivier.org

Preconditioned Stochastic Gradient Langevin Dynamics

$$\theta \leftarrow \theta - \eta\, C\, \hat{\mathbb{E}}_{(x,y)\in\mathcal{D}}\, \partial_\theta \left(\ell_\theta(y|x) - \frac{1}{N} \ln \alpha(\theta) \right) + \sqrt{\frac{2\eta}{N}}\, C^{1/2} \mathcal{N}(0, \mathrm{Id})$$

Natural Langevin Dynamics (use of Fisher Matrix as in Natural Gradient from Information Geometry)

$$C \propto J(\theta^*)^{-1}$$

$$J(\theta) := \mathbb{E}_{(x,y)\in\mathcal{D}}\, \mathbb{E}_{\tilde{y}\sim p_\theta(\tilde{y}|x)} \left[(\partial_\theta \ln p_\theta(\tilde{y}|x))\, (\partial_\theta \ln p_\theta(\tilde{y}|x))^\top \right]$$

The resulting natural Langevin dynamics combines the advantages of Amari's natural gradient descent and Fisher-preconditioned Langevin dynamics for large neural networks

Yann Ollivier

This document may not be reproduced, modified, adapted, published, translated, in any way, in whole or in part or disclosed to a third party without the prior written consent of Thales - © Thales 2015 All rights reserved.

Gradient naturel de la géométrie de l'information & son dual le gradient entropique

Gradient Naturel

$$\boxed{\theta^{k+1} = \theta^k - \eta\, M(\theta)^{-1} \frac{\partial L(\theta^k)}{\partial \theta}}$$

$$\theta^{k+1} = \theta^k - \eta\,(\mathrm{Hess}\, L)^{-1} \frac{\partial L(\theta^k)}{\partial \theta}$$

(Natural gradient: $M(\theta) =$ Fisher information matrix.)

Gradient Entropique Dual (Mirror Descent, Gradient de Balian)

$$\theta_{t+1} = \theta_t - \alpha_t \nabla f_t(\theta_t) \qquad \theta_{t+1} = \arg\min_{\theta \in \Theta} \left\{ \langle \theta, \nabla f_t(\theta_t) \rangle + \frac{1}{2\alpha_t} \|\theta - \theta_t\|_2^2 \right\}$$

$$\theta_{t+1} = \arg\min_{\theta \in \Theta} \{ \langle \theta, \nabla f_t(\theta_t) \rangle + \Psi(\theta, \theta_t) \} \qquad \Psi(\theta, \theta') = \frac{1}{2} \|\theta - \theta'\|_2^2$$

$$B_G(\theta, \theta') = G(\theta) - G(\theta') - \langle \nabla G(\theta'), \theta - \theta' \rangle \qquad \theta_{t+1} = \arg\min_{\theta} \left\{ \langle \theta, \nabla f_t(\theta_t) \rangle + \frac{1}{\alpha_t} B_G(\theta, \theta_t) \right\}$$

$$H(\eta) := \sup_{\theta \in \Theta} \{ \langle \theta, \eta \rangle - G(\theta) \}$$

$$h = \nabla H, \; g = h^{-1}$$

$$\eta = g(\theta)$$

$G(\theta)$	$H(\eta)$	$B_H(\eta, \eta')$
$\frac{1}{2}\|\theta\|_2^2$	$\frac{1}{2}\|\eta\|_2^2$	$\frac{1}{2}\|\eta - \eta'\|_2^2$
$\exp(\theta)$	$\langle \eta, \log \eta \rangle - \eta$	$\eta \log \frac{\eta}{\eta'}$
$\log(1 + \exp(\theta))$	$\eta \log \eta + (1 - \eta) \log(1 - \eta)$	$(1 - \eta) \log \left(\frac{1-\eta}{1-\eta'} \right) + \eta \log \frac{\eta}{\eta'}$

$$B_H(\eta, \eta') = H(\eta) - H(\eta') - \langle \nabla H(\eta'), \eta - \eta' \rangle$$

This document may not be reproduced, modified, adapted, published, translated, in part or disclosed to a third party without the prior written consent of Thales - © Thales

THALES

Gradient naturel de la géométrie de l'information & son dual le gradient entropique

Gradient Entropique Dual

$$\theta_{t+1} = \arg\min_{\theta} \left\{ \langle \theta, \nabla f_t(\theta_t) \rangle + \frac{1}{\alpha_t} B_G(\theta, \theta_t) \right\}$$

$$\boxed{g(\theta_{t+1}) = g(\theta_t) - \alpha_t \nabla_\theta f_t(\theta_t)}$$

Gradient Naturel

$$\eta = g(\theta) = \nabla G \qquad \theta = h(\eta) = \nabla H(\eta)$$

$$\eta_{t+1} = \eta_t - \alpha_t \nabla_\theta f_t(h(\eta_t))$$

$$\nabla_\eta f_t(h(\eta)) = \nabla_\eta h(\eta) \nabla_\theta f_t(h(\eta))$$

$$\nabla_\theta f_t(h(\eta_t)) = [\nabla_\eta h(\eta_t)]^{-1} \nabla_\eta f_t(h(\eta_t))$$

$$\boxed{\eta_{t+1} = \eta_t - \alpha_t [\nabla^2 H(\eta_t)]^{-1} \nabla_\eta f_t(h(\eta_t))}$$

Gradient entropique dual

***H*: Shannon Entropy**

This document may not be reproduced, modified, adapted, published, translated, in any way, in whole or in part or disclosed to a third party without the prior written consent of Thales - © Thales 2015 All rights reserved.

THALES

Métrique de Fisher par Misha Gromov (IHES)

M. Gromov, In a Search for a Structure, Part 1: On Entropy. July 6, 2012

- http://www.ihes.fr/~gromov/PDF/structre-serch-entropy-july5-2012.pdf

Gromov Six Lectures on Probability, Symmetry, Linearity. October 2014, Jussieu, November 6th , 2014

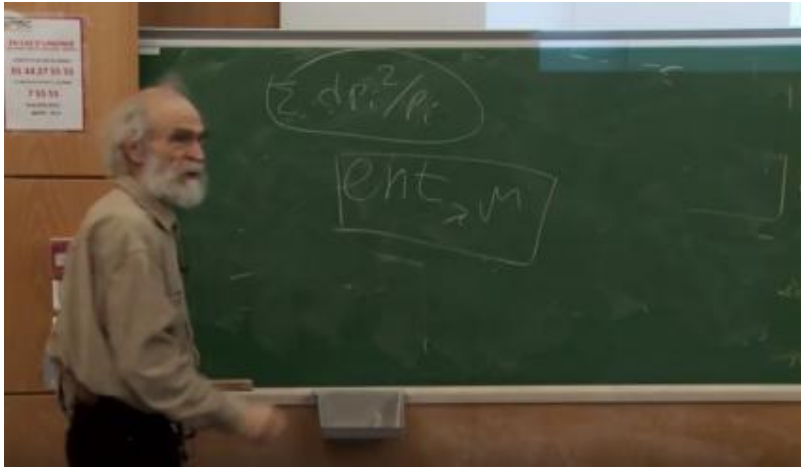
- Lecture Slides & video:

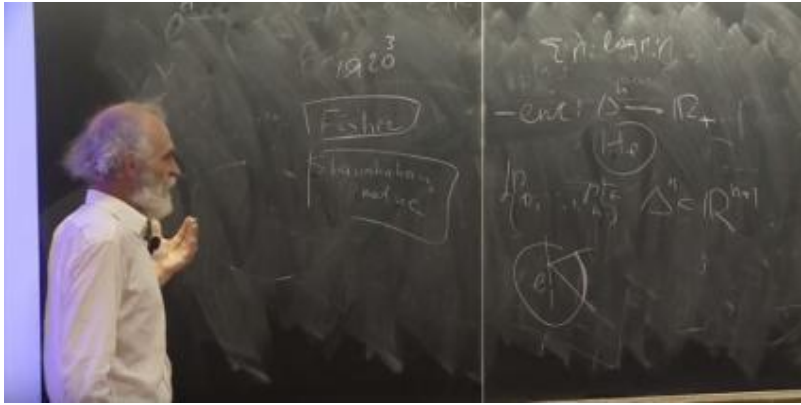
http://www.ihes.fr/~gromov/PDF/probability-huge-Lecture-Nov-2014.pdf

https://www.youtube.com/watch?v=hb4D8yMdov4

Gromov Four Lectures on Mathematical Structures arising from Genetics and Molecular Biology, IHES, October 2013

https://www.youtube.com/watch?v=v7QuYuoyLQc&t=5935s
(at time 01h35min)





This document may not be reproduced, modified, adapted, published, translated, in any way, in whole or in part or disclosed to a third party without the prior written consent of Thales - © Thales 2015 All rights reserved.

THALES

Question de Gromov : Are there « entropies » associated to moment maps

Bernoulli Lecture - What is Probability?

- 27 March 2018 - CIB - EPFL - Switzerland
- Lecturer: Mikhail Gromov
- https://bernoulli.epfl.ch/images/website/What_is_Probability_v2(2).mp4
- http://forum.cs-dc.org/uploads/files/1525172771489-alternative-probabilities-2018.pdf

Fisher Metric. Recall (Archimedes, 287-212 BCE) the *real moment map* from the unit sphere $S^n \subset \mathbb{R}^{n+1}$ to the probability simplex $\Delta^n \subset \mathbb{R}^{n+1}$ for

$$(x_0, \ldots, x_n) \mapsto (p_0 = x_0^2, \ldots, p_n = x_n^2)$$

and observe following R. Fisher that the spherical metric (with constant curvature +1) thus transported to Δ^n, call it ds^2 on Δ^n, is equal, up to a scalar multiple, to the *Hessian of the entropy*

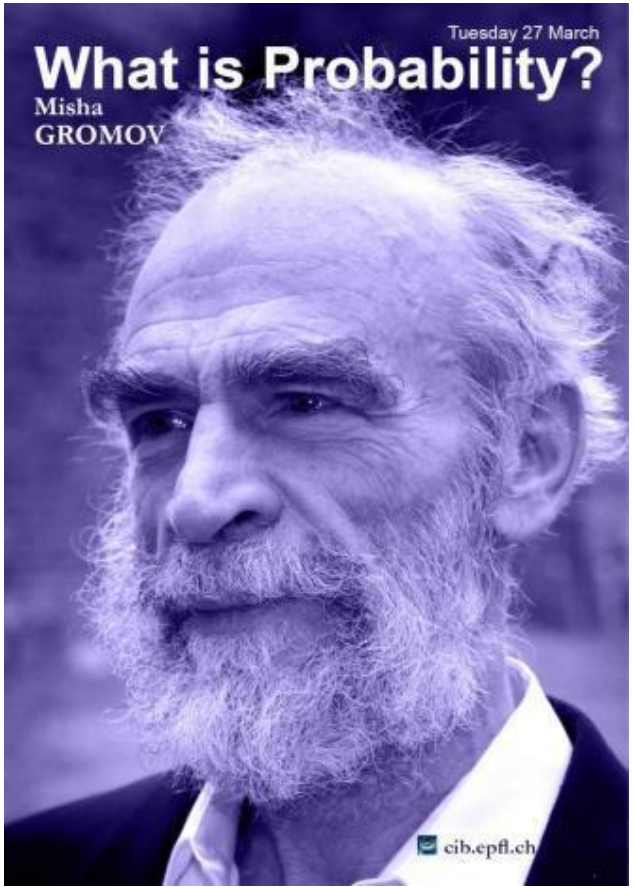
$$ent\{p_0, \ldots, p_n\} = -\sum_i p_i \log p_i.$$

$$ds^2 = const \frac{\partial^2 ent(p_i)}{dp_i dp_j}.$$

If, accordingly, we take the "inverse Hessian" – a kind of double integral "$\int\int ds^2$" for the *definition* of entropy – we arrive at

Question 2. Are there *interesting* "entropies" associated to (real and complex) moment maps of general toric varieties? Is there a *meaningful* concept of "generalised probability" grounded in positivity encountered in algebraic geometry?

****



This document may not be reproduced, modified, adapted, published, translated, in any way, in whole or in part or disclosed to a third party without the prior written consent of Thales - © Thales 2015 All rights reserved.

THALES

THALES

Préambule

ALEAE GEOMETRIA

Géométrie du hasard

Blaise Pascal

Préambule: des statistiques dans les espaces abstraits

- L'extension des statistiques dans les espaces abstraits a été introduite par Maurice Fréchet à travers la notion « d'espace distancié ».

- L'approche par les espaces métriques permet de définir la moyenne ou la médiane d'éléments dans un espace distancié par le barycentre géodésique de Fréchet calculé par le flot de gradient de Hermann Karcher.

- Pour définir ces espaces distanciés, il nous faut au préalable introduire une distance entre ces éléments. La métrique de Fisher et le hessien de l'entropie de la « Géométrie de l'Information » fournissent une distance disposant des qualités d'invariances souhaitées.

- La métrique de Fisher peut être généralisée dans des espaces plus abstraits à partir de la fonction caractéristique de Koszul-Vinberg et la 2-forme de Koszul.

- L'étape suivante consiste à généraliser la notion de densité gaussienne, en généralisant la notion de densités à maximum d'entropie, ce qui nous oblige à généraliser la définition de l'entropie. Partant des fonctions caractéristiques de François Massieu, cette généralisation nous est donnée par Jean-Marie Souriau via « la thermodynamique des groupes de Lie », dont on déduit une métrique de Fisher-Souriau.

This document may not be reproduced, modified, adapted, published, translated, in any way, in whole or in part or disclosed to a third party without the prior written consent of Thales - © Thales 2015 All rights reserved.

Plan de l'exposé (1/2)

- 1) Motivation : caractérisation statistique de la mesure digitale des fluctuations de l'onde électromagnétique radar (idée de Henri Poincaré)

- 2) Approche de Maurice Fréchet : Les éléments aléatoires de nature quelconque dans un espace distancié de Maurice Fréchet

- 3) La géométrie de l'information pour les familles de densité exponentielles

- 4) Approche de Jean-Louis Koszul: Les structures élémentaires de la géométrie de l'information liées à l'étude des domaines bornés homogènes

This document may not be reproduced, modified, adapted, published, translated, in any way, in whole or in part or disclosed to a third party without the prior written consent of Thales - © Thales 2015 All rights reserved.

THALES

Plan de l'exposé (2/2)

- 5) Les fonctions caractéristiques de François Massieu en physique statistique et les fonctions potentielles de la géométrie de l'information

- 6) Approche de Jean-Marie Souriau: géométrisation de la physique statistique et théorie géométrique de la chaleur (la Thermodynamique des groupes de Lie)

- 7) Extension de la notion d'Entropie et des densités à maximum d'entropie (maximum d'Entropie d'ordre supérieure)

This document may not be reproduced, modified, adapted, published, translated, in any way, in whole or in part or disclosed to a third party without the prior written consent of Thales - © Thales 2015 All rights reserved.

THALES

THALES

Préambule : Interdisciplinarité des Sciences Géométriques de l'Information

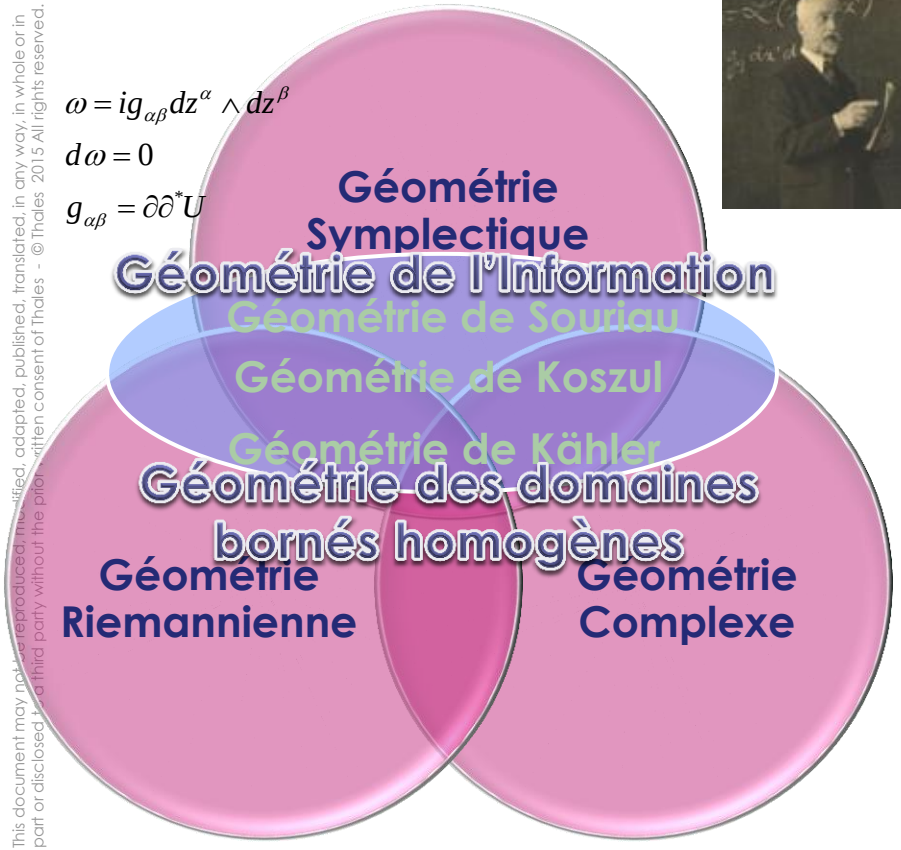
ALEAE GEOMETRIA

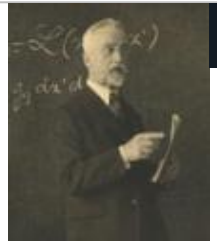
Géométrie du hasard

Blaise Pascal

Géométrie de l'Information: Géométrie d'Elie Cartan

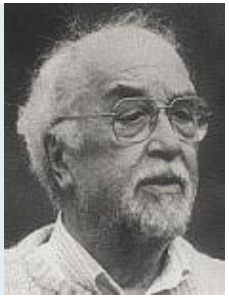
$$\omega = i g_{\alpha\beta} dz^{\alpha} \wedge dz^{\beta}$$
$$d\omega = 0$$
$$g_{\alpha\beta} = \partial\partial^{*} U$$





Une inspiration commune: Elie Cartan

Géométrie de Jean-Marie Souriau
Etude de la géométrie des variétés symplectiques **homogènes** sous l'action des groupes dynamiques. Introduction de la Thermodynamique des groupes de Lie en mécanique statistique.



Géométrie de Jean-Louis Koszul
Etude de la géométrie des domaines bornés **homogènes**, des espaces **homogènes** symétriques et des cônes convexes saillants. Introduction d'une 2-forme invariante.

Géométrie de Erich Kähler
Etude de la géométrie des variétés différentielles équipées d'une structure unitaire satisfaisant une condition d'intégrabilité. Le cas **Kähler homogène** étudié par André André Lichnerowicz.

This document may not be reproduced, modified, adapted, published, translated, in any way, in whole or in part or disclosed to a third party without the prior written consent of Thales - © Thales 2015 All rights reserved.

Interdisciplinarité des Sciences Géométriques de l'Information

Physique Statistique

J.M. Souriau

Thermodynamique des systèmes dynamiques

Roger Balian

Métrique de Balian quantique (qbit)

Physique Quantique

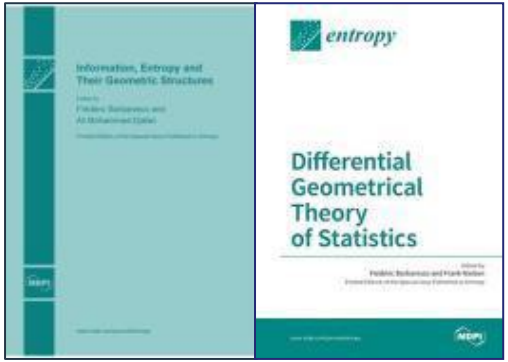
Géométrie de l'Information

Mesures des ondes (EM, acoustiques)

Statistiques & apprentissage sur l'espace des formes

M. Fréchet

Statistique dans les espaces métriques



THALES

This document may not be reproduced, modified, adapted, published, translated, in any way, in whole or in part or disclosed to a third party without the prior written consent of Thales - © Thales 2015 All rights reserved.

THALES

Géométrie de l'Information et Transformée de Legendre

Métriques de la Géométrie de l'Information

$$g^* = d^2\Psi^* = d^2 S$$

$$g = -d^2 \log \Phi = d^2 \Psi$$

ds²=d²ENTROPY

ds²=-d²LOG[LAPLACE]

Transformée de Legendre

$$\Psi^*(x^*) = \langle x, x^* \rangle - \Psi(x)$$

$$\Psi^* = -\int_{\Omega^*} p_x(\xi) \log p_x(\xi) d\xi$$

$$p_x(\xi) = e^{-\langle \xi, x \rangle} / \int_{\Omega^*} e^{-\langle \xi, x \rangle} d\xi = e^{-\langle x, \xi \rangle + \Phi(x)}$$

$$x^* = \frac{d\Psi(x)}{dx} \ , \ x = \frac{d\Psi^*(x^*)}{dx^*}$$

$$x^* = \int_{\Omega^*} \xi . p_x(\xi) d\xi$$

Transformée de Laplace/Fourier

$$\Psi(x) = -\log \Phi(x) = -\log \int_{\Omega^*} e^{-\langle x, y \rangle} dy$$

ENTROPIE= LEGENDRE(- LOG[LAPLACE])

ENTROPIE= FOURIER$_{(Min,+)}$(- LOG[FOURIER$_{(+,x)}$])

This document may not be reproduced, modified, adapted, published, translated, in any way, in whole or in part nor disclosed to a third party without the prior written consent of Thales - © Thales 2015 All rights reserved.

THALES

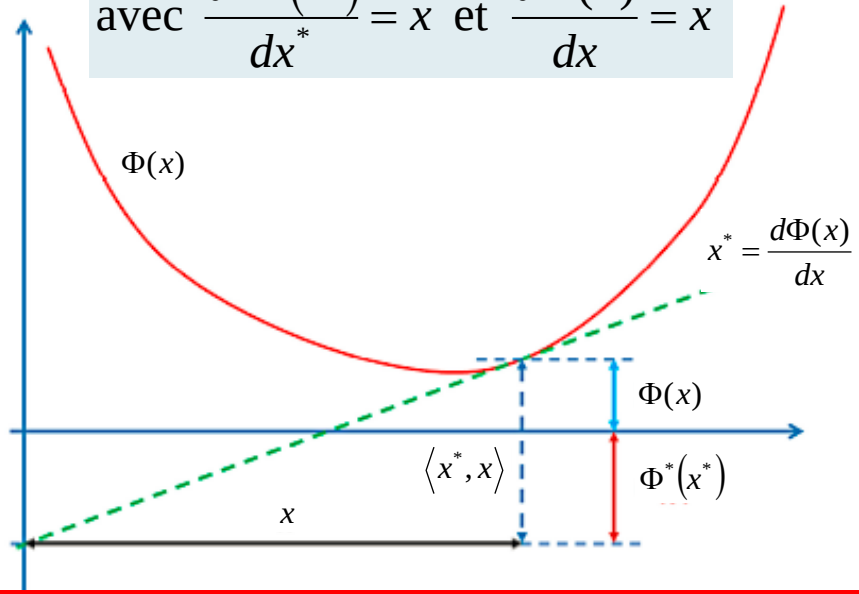
Signification intuitive de la transformée de Legendre

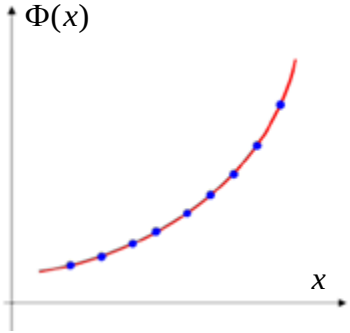
Transformée de Legendre

- La transformée de Legendre transforme une fonction définie par sa valeur en un point en une fonction définie par sa tangente.
- se rencontre en thermodynamique et en mécanique lagrangienne

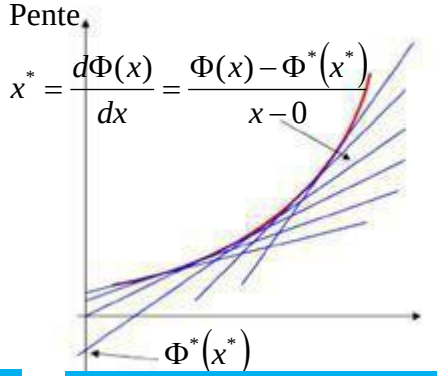
$$\Phi^*(x^*) = \langle x^*, x \rangle - \Phi(x)$$

$$\text{avec } \frac{d\Phi^*(x^*)}{dx^*} = x \text{ et } \frac{d\Phi(x)}{dx} = x^*$$





Géométrie classique
(la courbe est représentée par un continuum de points)



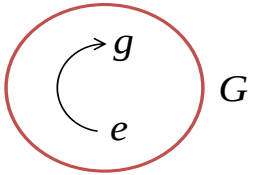
Géométrie de Plücker
(la courbe est définie par l'enveloppe de ses tangentes)

Transformée de Legendre est l'équivalent d'une transformée de Fourier pour les fonctions convexes (elle met en dualité)
Brenier, Yann. Un algorithme rapide pour le calcul de transformées de Legendre-Fenchel discrètes, C. R. Acad. Sci. Paris Sér. I Math. 308 (1989), no. 20, 587–589.

This document may not be reproduced, modified, adapted, published, translated, in any way, in whole or in part or disclosed to a third party without the prior written consent of Thales - © Thales 2015 All rights reserved.

Modèle de Souriau de la Thermodynamique des groupes de Lie

TEMPERATURE dans l'Algèbre de Lie

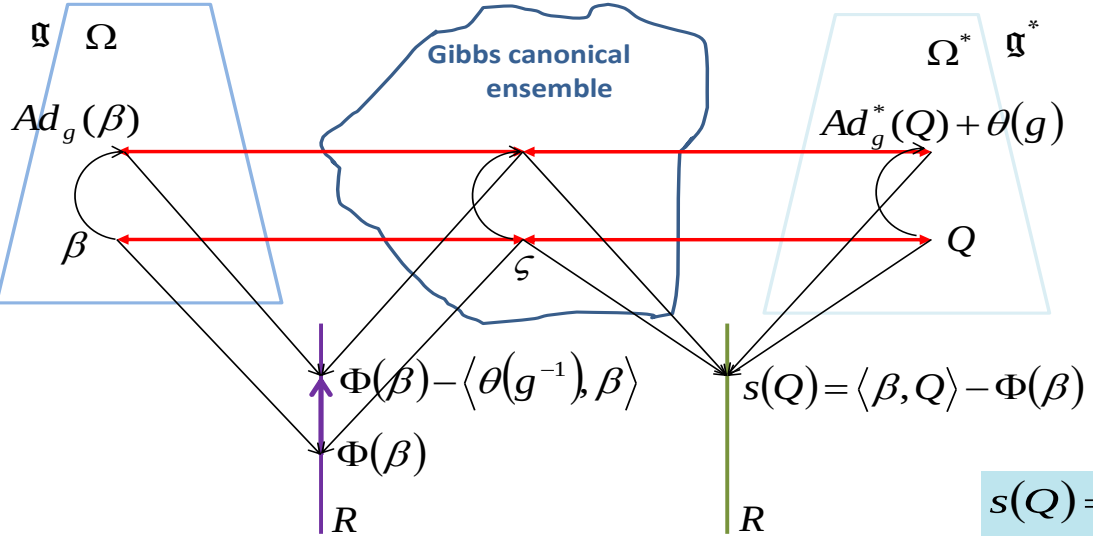


CHALEUR Dans le dual de l'algèbre de Lie

Métrique de Fisher

$$g_\beta([\beta,Z_1],[\beta,Z_2]) = \tilde{\Theta}_\beta(Z_1,[\beta,Z_2]) \geq 0$$

$$I(\beta) = I(Ad_g(\beta)) = -\frac{\partial^2 \Phi}{\partial \beta^2} = \frac{\partial^2 \log \int_M e^{-\langle \beta, U(\xi)\rangle} d\lambda}{\partial \beta^2}$$



Logarithme de la fonction de Partition (fonction caractéristique)

Entropie

L'Entropie est invariant sous l'action du groupe

Legendre Clairaut

$$s(Q) = \langle \beta, Q\rangle - \Phi(\beta) = \langle \Theta^{-1}(Q), Q\rangle - \Phi(\Theta^{-1}(Q))$$

$$Q = \Theta(\beta) = \frac{\partial \Phi}{\partial \beta} \in \mathfrak{g}^*$$

$$\beta = \Theta^{-1}(Q) \in \mathfrak{g}$$

This par

THALES

Potentiel de Massieu versus Potentiel de Gibbs-Duhem

Potentiel de GIBBS-DUHEM: Energie Libre

$$\cancel{F = E - TS}$$

Every mathematician knows it is impossible to understand any elementary course in thermodynamics.
Vladimir Arnold

Potentiel de MASSIEU (fonction caractéristique)

$$\frac{F}{T} = \frac{1}{T}E - S \underset{\beta = \frac{1}{T}}{\Rightarrow} \Psi = \langle \beta, E \rangle - S$$

Préservation de la dualité de Legendre

This document may not be reproduced, modified, adapted, published, translated, in any way, in whole or in part or disclosed to a third party without the prior written consent of Thales - © Thales 2015 All rights reserved.

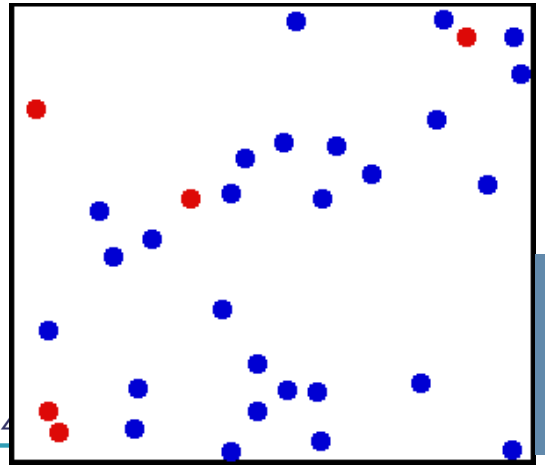
THALES

Définition Géométrique et Ontologique de la notion de température par Jean-Marie Souriau: La Thermodynamique des Groupes de Lie

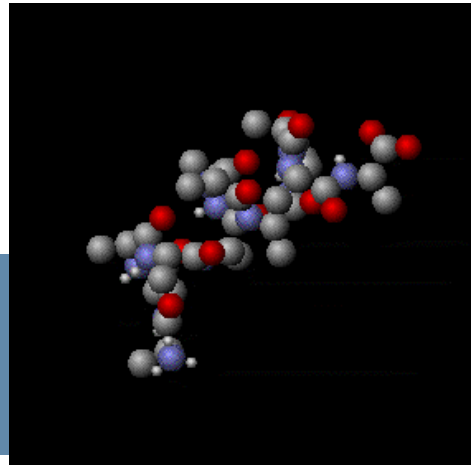
- La température (de Planck) géométrique de Souriau est **un élément de l'algèbre de Lie** du groupe dynamique (groupes de Gallilé ou Poincaré) agissant sur le système

- L'Entropie généralisée est **la transformée de Legendre de l'opposée du logarithme de la transformée de Laplace (fonction caractéristique de Massieu)**

- La métrique de Fisher-Souriau est une **Capacité Calorifique Géométrique (hessien du potentiel de Massieu)**



Le formalisme de Souriau est totalement **covariant**, et ne nécessite aucun système de coordonnées arbitraires (**covariance de la densité de Gibbs sous l'action du groupe**)



This document may not be reproduced, modified, adapted, published, translated, in any way, in whole or in part or disclosed to a third party without the prior written consent of Thales - © Thales 2015 All rights reserved.

Travaux précurseurs de Muriel Casalis

International Statistical Review (1991), 59, 2, pp. 241–262. Printed in Great Britain
© International Statistical Institute

Familles Exponentielles Naturelles sur $\mathbb{R}^d$ Invariantes par un Groupe

Muriel Casalis

Laboratoire de Statistique, Université Paul Sabatier, 118, route de Narbonne, 31062 Toulouse Cedex, France

Résumé

La caractérisation des familles exponentielles naturelles de $\mathbb{R}^d$ préservées par un groupe d'affinités donné est faite dans trois cas: celui d'un groupe compact, en particulier du groupe des rotations, celui du groupe hyperbolique et enfin celui d'un groupe quelconque de translations. La démarche adoptée consiste à traduire la propriété d'invariance de la famille par une propriété portant sur les mesures qui l'engendrent puis à rechercher ces dernières en conséquence.

1 Introduction

Il est courant en statistique d'envisager un modèle $(\Omega, \mathcal{A}, (P_\theta)_{\theta\in\Theta})$ tel qu'il existe un groupe G de permutations de Ω préservant globalement la famille de probabilités $F = \{P_\theta, \theta \in \Theta\}$, c'est-à-dire que pour tout (θ, g) de $\Theta \times G$, l'image $g(P_\theta)$ de P_θ par g est encore dans F (Barndorff-Nielsen parle alors de modèle de transformations). On pourra consulter Barndorff-Nielsen et al. (1982) et plus récemment le livre de Barndorff-Nielsen (1988).

Un exemple célèbre est celui des distributions de Fisher–Von-Mises pour lequel Ω est la sphère unité de l'espace euclidien E,

$$P_\theta(dx) = L(\theta)^{-1} \exp\langle\theta, x\rangle \sigma(dx),$$

σ désignant la probabilité uniforme sur Ω et $L(\theta)$ le coefficient de normalisation, et pour lequel G est le groupe des rotations $\mathbb{O}(E)$ de E.

Dans cet exemple, $\{P_\theta, \theta \in \Theta\}$ est une famille exponentielle naturelle au sens suivant.

Soit E un espace vectoriel de dimension finie, E^* son dual et si (θ, x) est dans $E^* \times E$, $\langle\theta, x\rangle$ désigne le crochet de dualité; soit, de plus, μ une mesure de Radon positive sur E; on note alors L_μ la transformée de Laplace de μ définie par:

$$L_\mu : E^* \to [0, \infty] : \theta \to \int_E \exp\langle\theta, x\rangle \mu(dx);$$

D_μ est l'ensemble $\{\theta \in E^*, L_\mu(\theta) < \infty\}$, $\Theta(\mu)$ son intérieur et k_μ la fonction définie sur $\Theta(\mu)$ par:

$$k_\mu(\theta) = \operatorname{Log} L_\mu(\theta). \tag{1.1}$$

On désigne aussi par $\mathcal{M}(E)$ l'ensemble des mesures de Radon μ positives telles que:

(i) μ n'est pas concentrée sur un sous-espace affine strict de E;
(ii) $\Theta(\mu)$ est non vide.

N° d'ordre 679

THESE

présentée à

L'UNIVERSITE PAUL SABATIER DE TOULOUSE (SCIENCES)

pour obtenir

DOCTORAT DE L'UNIVERSITE PAUL SABATIER

Spécialité : MATHEMATIQUES APPLIQUEES

par

Muriel BONNEFOY - CASALIS

—

FAMILLES EXPONENTIELLES NATURELLES

INVARIANTES PAR UN GROUPE

———

Soutenue le 11 Juin 1990, devant la Commission d'Examen :

MM.	H. CAUSSINUS	Professeur à l'Université Paul Sabatier
	D. BAKRY	Professeur à l'Université Paul Sabatier
	J. FARAUT	Professeur à l'Université PARIS VI
	Y. GUIVARC'H	Professeur à l'Université PARIS VI
	G. LETAC	Professeur à l'Université Paul Sabatier

Laboratoire de Statistique et Probabilités
UNIVERSITE PAUL SABATIER

This document may not be reproduced, modified, adapted, published, translated, in any way, in whole or in part or disclosed to a third party without the prior written consent of Thales - © Thales 2015 All rights reserved.

THALES

Des groupes omniprésents

- Géométrie de l'Information (lois gaussiennes)

$$\begin{bmatrix} Y \\ 1 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} R^{1/2} & m \\ 0 & 1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} X \\ 1 \end{bmatrix} \quad , \quad \begin{cases} R^{1/2} \in T_n^+ \\ (R^{1/2} : \text{ Cholesky de } R) \\ m \in R^n \end{cases}$$

+
groupe affine pour lois exponentielles

- Thermodynamique des groupes de Lie (groupe de Galilée)

$$\begin{bmatrix} \vec{x}' \\ t' \\ 1 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} R & \vec{u} & \vec{w} \\ 0 & 1 & e \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \vec{x} \\ t \\ 1 \end{bmatrix} \quad , R \in SO(3), \ \vec{u}, \vec{w} \in R^3, e \in R$$

+
groupe de Poincaré en relativité

- Système mobiles / robotiques (Pistage en Radar) (Groupe SE(3))

$$\begin{bmatrix} Z' \\ 1 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \Omega & t \\ 0 & 1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} Z \\ 1 \end{bmatrix} \quad , \quad \begin{cases} \Omega \in SO(3) \\ t \in R^3 \end{cases}$$

+
groupe SIM(3)

- Demi-Plan de Poincaré

$$\begin{bmatrix} X' \\ 1 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} a & b \\ 0 & 1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} X \\ 1 \end{bmatrix} \quad , \quad a \in R_+^* \ \text{ et } \ b \in R$$

This document may not be reproduced, modified, adapted, published, translated, in any way, in whole or in part or disclosed to a third party without the prior written consent of Thales - © Thales 2015 All rights reserved.

THALES

Groupe SE(3)

- Groupe de Lie SE(3)

$$Z' = RZ + t \Rightarrow \begin{bmatrix} Z' \\ 1 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} R & t \\ 0 & 1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} Z \\ 1 \end{bmatrix} \quad , \quad \begin{cases} R \in SO(3) \\ t \in R^3 \end{cases} \Rightarrow \begin{bmatrix} R & t \\ 0 & 1 \end{bmatrix} \in SE(3) \quad , \quad G = SE(3)$$

- Algèbre de Lie de SE(3): se(3)

$$\begin{bmatrix} j(\alpha) & \gamma \\ 0 & 0 \end{bmatrix} \in se(3) \quad , \quad Z = \left(j(\alpha), \gamma \right) \in R^6 \quad , \quad se(3) \in \mathfrak{g} \cong R^6$$

- Dual de l'algèbre de Lie

$$x = (l, p) \in R^6 \quad , \quad x \in \mathfrak{g}^*$$

- Crochet de dualité

$$\begin{cases} Z = (\alpha, \gamma) \in \mathfrak{g} \\ x = (l, p) \in \mathfrak{g}^* \end{cases} \Rightarrow \langle x, Z \rangle = \langle l, \alpha \rangle + \langle p, \gamma \rangle$$

This document may not be reproduced, modified, adapted, published, translated, in any way, in whole or in part or disclosed to a third party without the prior written consent of Thales - © Thales 2015 All rights reserved.

THALES

Groupe SE(3)

- Opérateur Adjoint

$$g \in SE(3) \Rightarrow g = \begin{pmatrix} I & c \\ 0 & 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} A & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}$$

  - 1er terme:

$$\left\langle \begin{pmatrix} I & c \\ 0 & 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} l \\ p \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} j(\alpha) & \gamma \\ 0 & 0 \end{pmatrix} \right\rangle = \left\langle \begin{pmatrix} l \\ p \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} I & -c \\ 0 & 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} j(\alpha) & \gamma \\ 0 & 0 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} I & c \\ 0 & 1 \end{pmatrix} \right\rangle = \left\langle \begin{pmatrix} l \\ p \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} j(\alpha) & \alpha \times c + \gamma \\ 0 & 0 \end{pmatrix} \right\rangle$$

$$= \langle l, \alpha \rangle + \langle p, \alpha \times c + \gamma \rangle = \langle l, \alpha \rangle + \langle c \times p, \alpha \rangle + \langle p, \gamma \rangle = \langle l + c \times p, \alpha \rangle + \langle p, \gamma$$

  - 2ème terme:

$$\left\langle \begin{pmatrix} A & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} l \\ p \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} j(\alpha) & \gamma \\ 0 & 0 \end{pmatrix} \right\rangle = \left\langle \begin{pmatrix} l \\ p \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} A^T & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} j(\alpha) & \gamma \\ 0 & 0 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} A & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix} \right\rangle = \left\langle \begin{pmatrix} l \\ p \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} A^T j(\alpha) A & A^T \gamma \\ 0 & 0 \end{pmatrix} \right\rangle$$

$$= \left\langle \begin{pmatrix} l \\ p \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} j(A^T \alpha) & A^T \gamma \\ 0 & 0 \end{pmatrix} \right\rangle = \langle l, A^T \alpha \rangle + \langle p, A^T \gamma \rangle$$

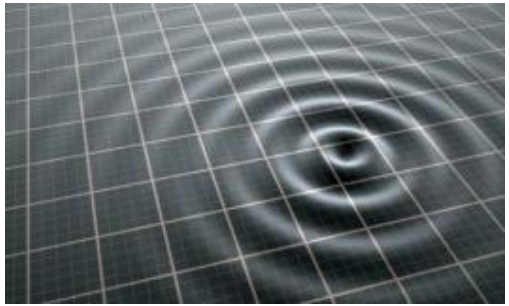
$$= \langle Al, \alpha \rangle + \langle Ap, \gamma \rangle$$

- Opérateur Adjoint: $(A, c).(l, p) = (Al + c \times Ap, Ap)$

This document may not be reproduced, modified, adapted, published, translated, in any way, in whole or in part or disclosed to a third party without the prior written consent of Thales - © Thales 2015 All rights reserved.

THALES

THALES



ALEAE GEOMETRIA

Géométrie du hasard

1) Motivation : caractérisation statistique de la mesure digitale des fluctuations de l'onde électromagnétique radar (première idée de Henri Poincaré)

Mesure digitale des fluctuations de l'onde électromagnétique radar

- L'idée est de « coder » l'état stationnaire d'une mesure digitale de l'onde électromagnétique (Direction, Doppler et Polarimétrie) par un point dans un espace métrique.

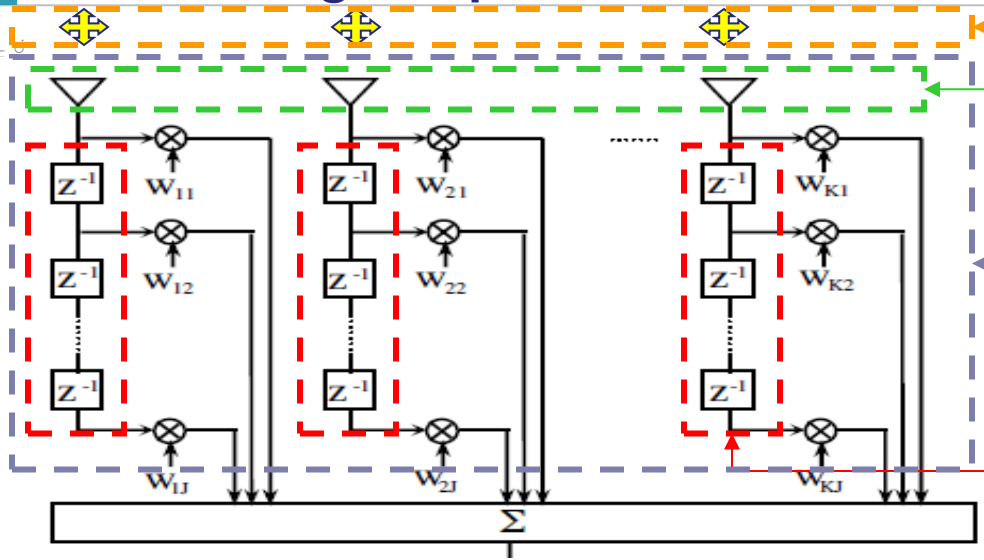
- Comme il s'agit d'une mesure statistique, la métrique naturelle est donnée en géométrie de l'information par le hessien de l'Entropie du processus stationnaire (métrique, potentiels et système de coordonnées duaux de la métrique de Fisher via la transformée de Legendre).

- En utilisant, les structures Toeplitz (respectivement Bloc-Toeplitz) des matrices de covariance du signal temporel [Doppler] ou spatial [direction] (respectivement spatio-temporelle), on démontre que la métrique naturelle est Kählérienne dans l'espace produit du polydisque de Poincaré (info. Doppler) et du polydisque de Siegel (info . spatio-temporel)

This document may not be reproduced, modified, adapted, published, translated, in any way, in whole or in part or disclosed to a third party without the prior written consent of Thales - © Thales 2015 All rights reserved.

THALES

Mesure Digitale Spatio-Temporelle (et Polarimétrique) de l'Onde Electromagnétique Radar



Mesure digitale polarimétrique
(Matrice de covariance polarimétrique)

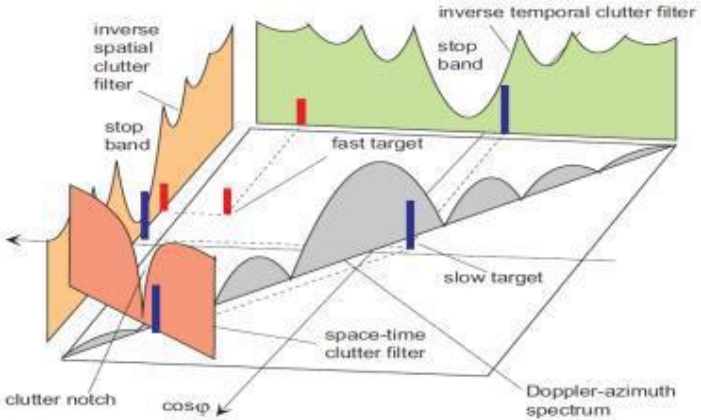
Mesures digitale spatio-temporelle
(Matrice de covariance spatio-temporelle)

Mesure digitale spatiale
(Matrice de covariance spatiale)

Mesure digitale temporelle
(Matrice de covariance Doppler)

Mesure digitale de l'onde EM

- Mesure polarimétrique
- Mesure temporelle => information Doppler
- Mesure spatiale => Direction du front d'onde
- Mesure spatio-temporelle



This document may not be repr

Approche historique de Henri Poincaré de 1891 pour la polarisation

Géométrie des états de polarisation

- Henri Poincaré montre qu'il est possible de représenter une vibration lumineuse polarisée elliptiquement, par l'affixe d'un nombre complexe: chaque état de polarisation de l'onde est représentée par un point sur le plan complexe
- La projection stéréographique du plan complexe sur une sphère de diamètre unité permet de représenter tous les états de polarisation d'une onde par un point et un seul sur une sphère
- ½ siècle plus tard, Jones et Muller proposèrent des méthodes de calcul matriciel, mais le modèle de Poincaré reste le plus élégant et efficace.

COURS DE PHYSIQUE MATHÉMATIQUE

THÉORIE MATHÉMATIQUE

LA LUMIÈRE

II

Nouvelles études sur la Diffraction. — Théorie de la dispersion de Helmholtz

Leçons professées pendant le premier semestre 1886-1887

par

H. POINCARÉ, MEMBRE DE L'INSTITUT

rédigées par

M. LAMOTTE et H. HURMUZESCU

PARIS

GEORGES CARRÉ, ÉDITEUR

1888

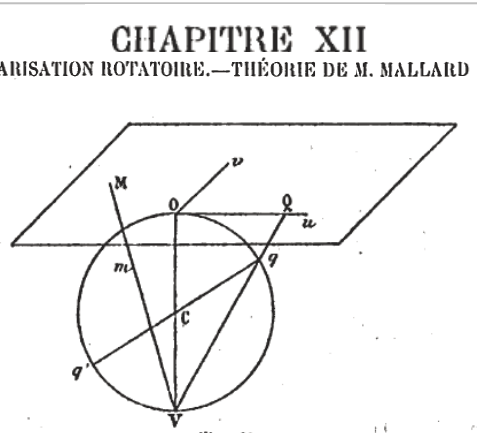


Fig. 42.

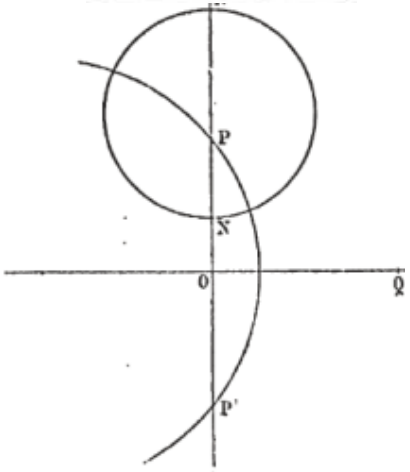


Fig. 41.

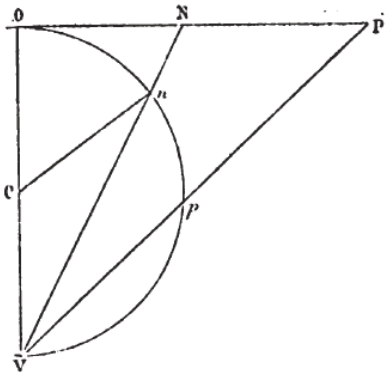


Fig. 43

This document may not be reproduced, modified, adapted, published, translated, in any way, in whole or in part or disclosed to a third party without the prior written consent of Thales - © Thales 2015 All rights reserved.

THALES

Modélisation géométrique de Poincaré des états de polarisation

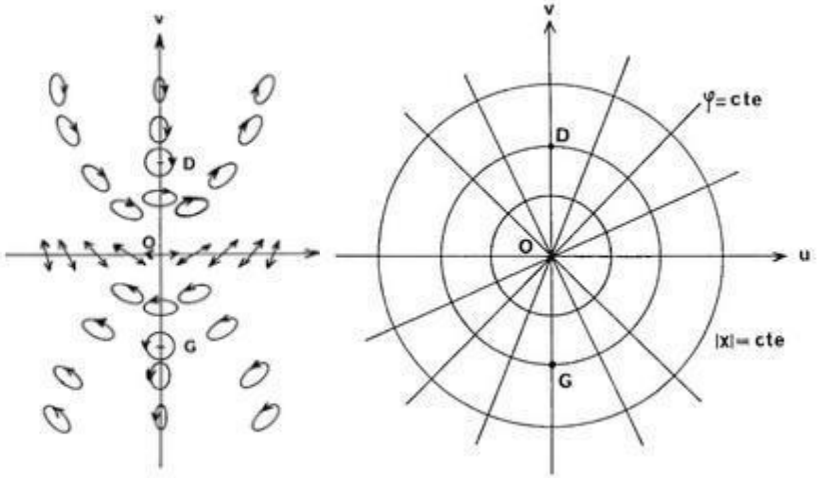
Représentation de l'état de polarisation par un point du plan complexe

- Champ Electromagnétique E est décrit par:

$$E(z,t) = \mathrm{Re}\left[Ae^{i(kz-\omega t)}\right] = E_x\vec{i} + E_y\vec{j}$$

$$\text{avec} \quad A = A_x e^{i\varphi_x}\vec{i} + A_y e^{i\varphi_y}\vec{j}$$

$$\chi = \frac{A_y e^{i\varphi_y}}{A_x e^{i\varphi_x}} = \frac{A_y}{A_x} e^{i(\varphi_y - \varphi_x)} = u + iv$$



- La valeur de ce rapport nous fait connaître la forme de l'ellipse τ et son orientation ϕ décrite par le vecteur électromagnétique dans le plan perpendiculaire à l'axe de propagation et décrivant l'état polarimétrique de l'onde:

$$|\chi| = \frac{A_y}{A_x} = \tan\tau \quad \text{et} \quad \arg\chi = \varphi = \varphi_y - \varphi_x \qquad \chi = \frac{\tan\phi + i\tan\tau}{1 - i\tan\phi\tan\tau}$$

This document may not be reproduced, modified, adapted, published, translated, in any way, in whole or in part or disclosed to a third party without the prior written consent of Thales - © Thales 2015 All rights reserved.

THALES

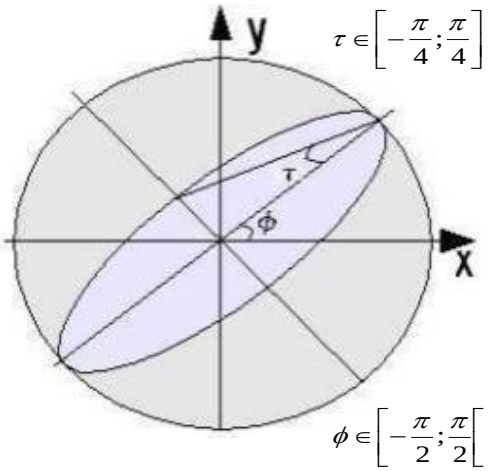
Modélisation géométrique de Poincaré des états de polarisation

Représentation de l'état de polarisation par un point du plan complexe

- Ellipse de polarisation

$$E_M = \begin{bmatrix} E_{M,x}(t) \\ E_{M,y}(t) \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} A_x(t).e^{i\varphi_x(t)} \\ A_y(t).e^{i\varphi_y(t)} \end{bmatrix} = pe^{i\varphi} \begin{bmatrix} \cos\phi & -\sin\phi \\ \sin\phi & \cos\phi \end{bmatrix} . \begin{bmatrix} \cos\tau \\ i\sin\tau \end{bmatrix}$$

- τ : angle d'éllipticité caractérisant l'élongation (la forme)
- ϕ : caractérise l'inclinaison de l'ellipse



- Matrice de cohérence de Jones:

$$J = E\left(E_M.E_M^+\right) = \begin{bmatrix} E\left(\left|E_{M,x}\right|^2\right) & E\left(E_{M,y}E_{M,x}^*\right) \\ E\left(E_{M,x}E_{M,y}^*\right) & E\left(\left|E_{M,y}\right|^2\right) \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} J_{11} & J_{21} \\ J_{12} & J_{22} \end{bmatrix}$$

- Vecteurs de Stokes:

$$\vec{S} = \begin{bmatrix} s_0 \\ s_1 \\ s_2 \\ s_3 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} J_{11}+J_{22} \\ J_{11}-J_{22} \\ 2\,\mathrm{Re}(J_{21}) \\ -2\,\mathrm{Im}(J_{12}) \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} s_0 \\ s_0\cos 2\tau\cos 2\phi \\ s_0\cos 2\tau\sin 2\phi \\ s_0\sin 2\tau \end{bmatrix}$$

$$\phi = \frac{1}{2}\arctan\left(\frac{s_2}{s_1}\right)$$

$$\tau = \frac{1}{2}\arctan\left(\frac{s_3}{\sqrt{s_1^2+s_2^2}}\right)$$

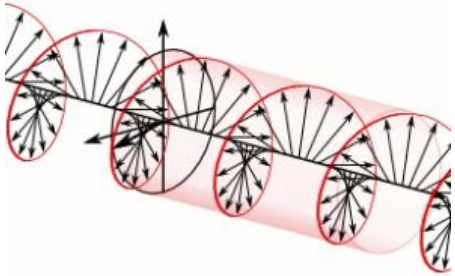
$$s_0^2 \geq s_1^2 + s_2^2 + s_3^2$$

This document may not be reproduced, modified, adapted, published, translated, in any way, in whole or in part or disclosed to a third party without the prior written consent of Thales - © Thales 2015 All rights reserved.

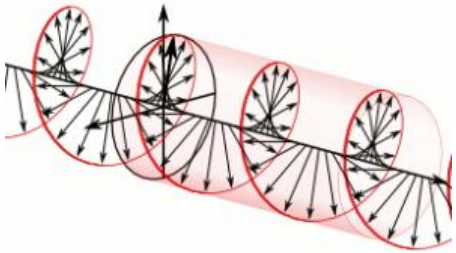
Information polarimétrique: réprésentée par un point sur la sphère

Coordonnées sphériques

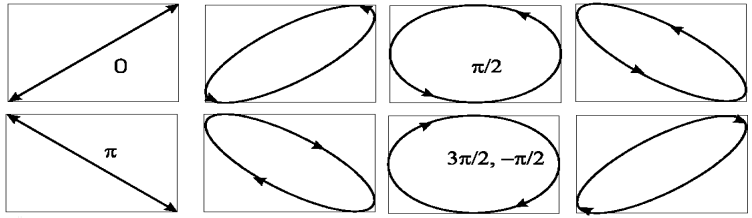
- Sur la sphère: $(2\phi, 2\tau)$
- Hémisphère Nord: polarisation droite
- Hémisphère Sud: polarisation gauche

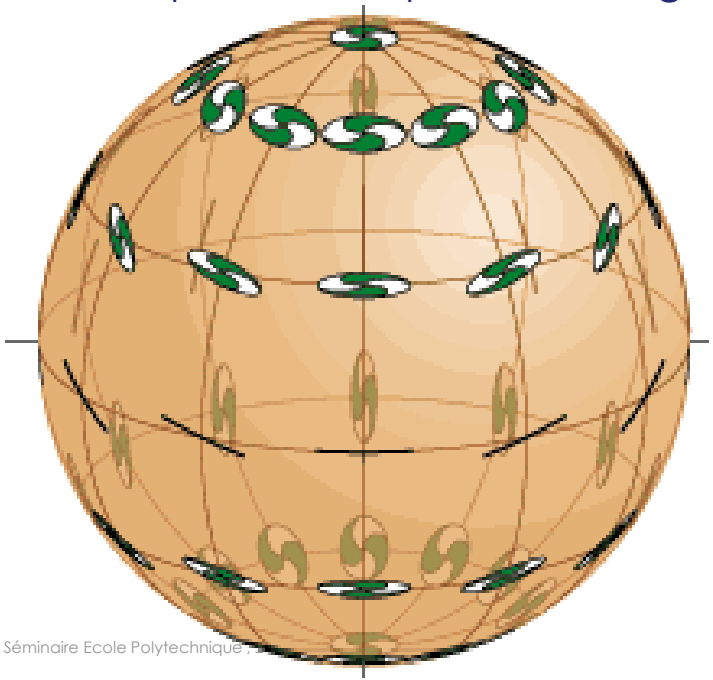


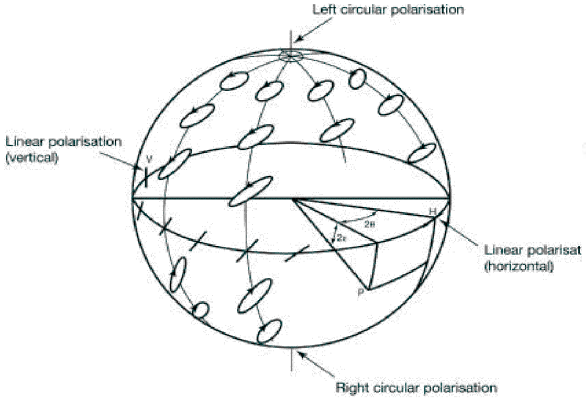
Polarisation circulaire gauche

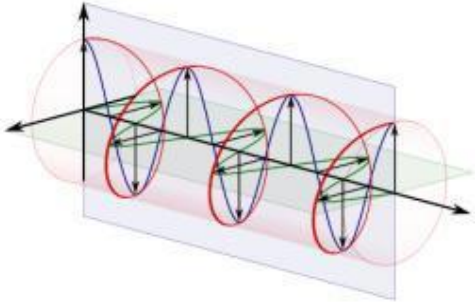


Polarisation circulaire droite









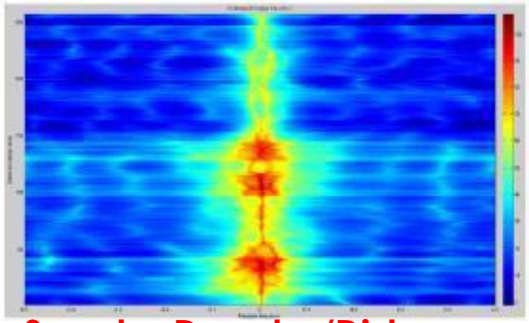
This document may not be reproduced, modified, adapted, published, translated, in any way, in whole or in part or disclosed to a third party without the prior written consent of Thales - © Thales 2015 All rights reserved.

THALES

Les éléments aléatoires de nature quelconque dans un espace distancié pour caractériser la fluctuation du signal électromagnétique

Dans la mesure digitale de l'onde électromagnétique, il s'agit de caractériser les fluctuations :

- **En amplitude**: variation du signal en puissance
- **Sur la polarimétrie**: variation de la polarisation de l'onde
- **Spatialement**: variation de la direction d'arrivée du front d'onde
- **Temporellement**: Variation du spectre Doppler



Spectre Doppler/Distance

Exemple du signal radar Doppler relatif à la série temporelle de mesures

Mesure de la série temporelle du signal digitalisé (pour une direction donnée)

$$Z = \begin{bmatrix} z_1 \\ \vdots \\ z_n \end{bmatrix} \quad \text{avec} \quad z_i \in C$$

$$R_n = E\left[ZZ^+\right] = \begin{bmatrix} r_0 & r_1^* & \cdots & r_{n-1}^* \\ r_1 & r_0 & \ddots & \vdots \\ \vdots & \ddots & \ddots & r_1^* \\ r_{n-1} & \cdots & r_1 & r_0 \end{bmatrix} \quad \text{avec } r_k = E\left[z_m z_{m-k}^*\right]$$

Stationnaire ⟶ *R* Toeplitz

avec r_k : *coefficient de corrélation dont on déduit le spectre Doppler*

$$\left|S_Z(f)\right|^2 = \left|\sum_{k=-(n-1)}^{n-1} r_k e^{-j2\pi fk}\right|^2$$

This document may not be reproduced, modified, adapted, published, translated, in any way, in whole or in part or disclosed to a third party without the prior written consent of Thales - © Thales 2015 All rights reserved.

THALES

Etude du cas le plus simple: matrice THDP de taille 2x2

Exemple sur matrice 2x2 Toeplitz Hermitienne définie positive:

- **1 matrice** de covariance d'un signal stationnaire 2x2 peut être représentée par « **1 point** » sur une variété dans R_+*xD (avec D le disque de Poincaré unité)

$$\Omega = \begin{bmatrix} h & a-ib \\ a+ib & h \end{bmatrix}$$

avec $a, b \in R$ et $h \in R_+^*$

$$\det(\Omega) = h^2 - (a+ib)(a-ib)$$

$$\det(\Omega) = h^2 - (a^2+b^2) > 0$$

$$h^2 > a^2 + b^2$$

$$\Omega^+ = \Omega$$

$$\Omega = h.\begin{bmatrix} 1 & \mu^* \\ \mu & 1 \end{bmatrix} \quad \text{avec} \quad \mu = \frac{a+ib}{h}$$

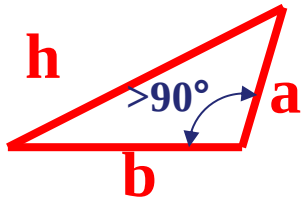
$$|\mu|^2 = \frac{a^2+b^2}{h^2} < 1 \text{ car } h^2 > a^2 + b^2$$

$$\mu \in D = \{z / |z| < 1\}$$

Doppler moyen

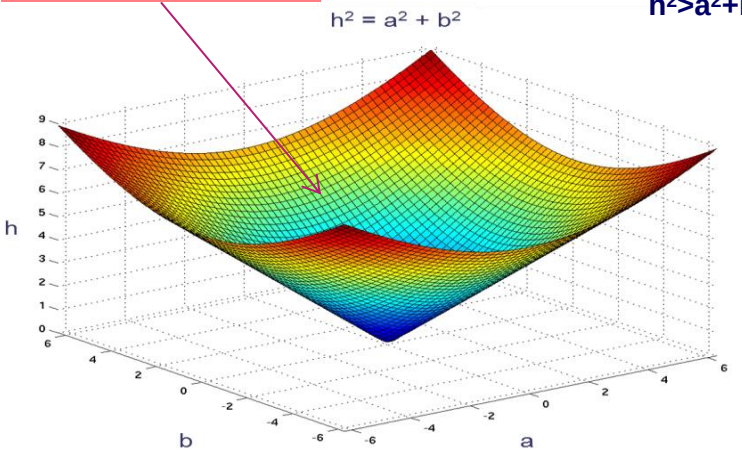
$$\varphi_{Doppler} : \text{phase de } \mu$$

$$\varphi_{Doppler} = \arctan\left(\frac{b}{a}\right)$$



Triangle ambligone $h^2>a^2+b^2$

$$h^2 > a^2 + b^2$$



This document may not be reproduced, modified, adapted, published, translated, in any way, in whole or in part or disclosed to a third party without the prior written consent of Thales - © Thales 2015 All rights reserved.

Quelles sont les contraintes entre les paramètres de la matrice de covariance d'un signal complexe (circulaire) stationnaire

Les paramètres d'une matrice de covariance d'une série temporelle d'un signal complexe (circulaire) stationnaire sont contraints par :

- Structure Toeplitz (éléments égaux sur la diagonale) : $\forall n, \quad E\left[z_n z_{n-k}^*\right] = r_k$

$$R_n = \begin{bmatrix} r_0 & r_1^* & r_2^* & \cdots & r_{n-1}^* \\ r_1 & r_0 & r_1^* & \ddots & \vdots \\ r_2 & r_1 & \ddots & \ddots & r_2^* \\ \vdots & \ddots & \ddots & r_0 & r_1^* \\ r_{n-1} & \cdots & r_2 & r_1 & r_0 \end{bmatrix} = \left[\begin{array}{c|c} R_{n-1} & \begin{matrix} r_{n-1}^* \\ \vdots \\ r_2^* \\ r_1^* \end{matrix} \\ \hline \begin{matrix} r_{n-1} & \cdots & r_2 & r_1 \end{matrix} & r_0 \end{array}\right]$$

Otto Toeplitz

- Structure Hermitienne :

$$R_n^+ = R_n \quad \text{avec } + : \text{transposée et conjuguée}$$

- Structure définie positive (valeurs propres positives) :

$$\forall Z \in C^n \;,\; Z^+ R_n Z > 0 \quad \text{et} \quad \lambda_i > 0 \quad i = 1,\ldots,n \;\text{ avec } \det\left(R_n - \lambda I\right) > 0$$

This document may not be reproduced, modified, adapted, published, translated, in any way, in whole or in part or disclosed to a third party without the prior written consent of Thales - © Thales 2015 All rights reserved.

THALES

Théorème de Trench/Verblunsky (décomposition d'Iwasawa partielle) pour les matrices Toeplitz Hermitiennes Définies Positives

Structure: matrice de covariance Toeplitz Hermitienne Définie Positive THDP

- Toute matricel THDP est difféomorphe à l'espace produit $(P_0, \mu_1, \ldots, \mu_n) \in R^+ x D_n$:
  - P_0 est un paramètre d'échelle (puissance du signal)
  - μ_k sont des paramètres de forme (forme du spectre) appelés coefficients de réflection/Verblunsky

$$\varphi : THDP(n) \to R_+^* \times D^{n-1}$$
$$R_n \mapsto (P_0, \mu_1, \ldots, \mu_n)$$
$$\text{avec} \quad D = \{ z \in C / |z| < 1 \}$$

- Cette décomposition par bloc est lié à la décomposition d'Iwasawa partielle:

$$R_n^{-1} = \begin{bmatrix} \alpha_{n-1} & \alpha_{n-1} A_{n-1}^+ \\ \alpha_{n-1} A_{n-1} & R_{n-1}^{-1} + \alpha_{n-1} A_{n-1} A_{n-1}^+ \end{bmatrix}$$

$$A_n = \begin{bmatrix} A_{n-1} \\ 0 \end{bmatrix} + \mu_n \begin{bmatrix} A_{n-1}^{(-)} \\ 1 \end{bmatrix}$$

$$\alpha_n^{-1} = \left[1 - |\mu_n|^2 \right] \alpha_{n-1}^{-1} \qquad P_0 = \alpha_0^{-1} \qquad V^{(-)} = J.V^*$$

This document may not be reproduced, modified, adapted, published, translated, in any way, in whole or in part or disclosed to a third party without the prior written consent of Thales - © Thales 2015 All rights reserved.

THALES

Théorème de Trench/Verblunsky et décomposition de Cholesky

L'itération de la structure bloc de la matrice:

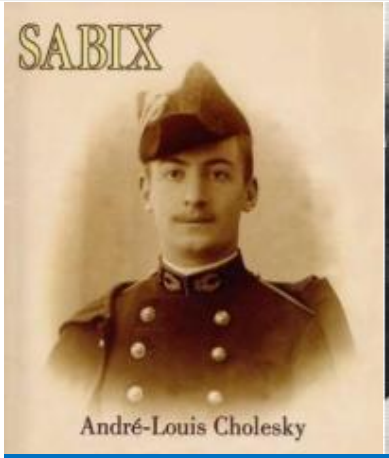
$$R_n^{-1} = \begin{bmatrix} \alpha_{n-1} & \alpha_{n-1} A_{n-1}^{+} \\ \alpha_{n-1} A_{n-1} & R_{n-1}^{-1} + \alpha_{n-1} A_{n-1} A_{n-1}^{+} \end{bmatrix}$$

Génère la décomposition de (André-Louis) Cholesky:

$$\Omega_n = (\alpha_n R_n)^{-1} = \Omega_n^{1/2} . \Omega_n^{1/2+}$$

$$\Omega_n^{1/2} = \sqrt{1 - |\mu_n|^2} \begin{bmatrix} 1 & 0_{n-1}^{+} \\ A_{n-1} & \Omega_{n-1}^{1/2} \end{bmatrix}$$

A. Cholesky, Sur la résolution numérique des systèmes d'équations linéaires, Manuscrit, Fonds A. Cholesky, Archives de l'´Ecole Polytechnique, Palaiseau.



A.L. Cholesky
(Commandant d'Artillerie Cholesky tué pendant la grande guerre)

Machine à calculer
Dactyle

This document may not be reproduced, modified, adapted, published, translated, in any way, in whole or in part or disclosed to a third party without the prior written consent of Thales - © Thales 2015 All rights reserved.

THALES

Métrique de Fisher de la géométrie de l'Information

Nous considérons comme métrique, le hessien de l'Entropie:

- Entropie: $S(\overline{R}_n) = \log\left(\det \overline{R}_n^{-1}\right) - \log(\pi.e)$
- Développement de l'entropie en utilisant sa matrice blocs et

$$\det\begin{bmatrix} p & q^+ \\ q & Q \end{bmatrix} = p.\det\left(Q - qq^+\right)$$

$$\overline{R}_n^{-1} = \begin{bmatrix} \overline{\alpha}_{n-1} & \overline{\alpha}_{n-1}\overline{A}_{n-1}^+ \\ \overline{\alpha}_{n-1}\overline{A}_{n-1} & \overline{R}_{n-1}^{-1} + \overline{\alpha}_{n-1}\overline{A}_{n-1}\overline{A}_{n-1}^+ \end{bmatrix} \qquad \begin{aligned} \overline{\alpha}_n^{-1} &= \left[1 - \left|\overline{\mu}_n\right|^2\right]\overline{\alpha}_{n-1}^{-1} \\ \overline{P}_0 &= \overline{\alpha}_0^{-1} \end{aligned}$$

$$S(\overline{R}_n) = -\sum_{k=1}^{n-1}(n-k)\log\left[1 - \left|\overline{\mu}_k\right|^2\right] - n\log\left[\pi.e.\overline{P}_0\right]$$

$$U = \sum_{i=1}^{n} k_i \log\left(1 - x_i \bar{x}_i\right) \qquad (k_i \text{ Konstanten})$$

Exemple de l'article de 1932 de E. Kähler et appelé cas hyper-abélien

E. Kähler

La paramétrisation est donnée par:

$$\theta^{(n)} = \left[\overline{P}_0 \quad \overline{\mu}_1 \quad \cdots \quad \overline{\mu}_{n-1}\right]^T = E\left[\left[P_0 \quad \mu_1 \quad \ldots \quad \mu_{n-1}\right]^T\right]$$

La métrique au sens de la géométrie de l'information est donné par le hessien de l'Entropie:

$$g_{ij} = \frac{\partial^2 S}{\partial\theta_i \partial\theta_j^*}$$

$$ds_{dual}^2 = \sum_{i,j} g_{ij}^{dual} d\overline{\theta}_i^{(n)} d\overline{\theta}_j^{(n)*} = n.\left(\frac{d\overline{P}_0}{\overline{P}_0}\right)^2 + \sum_{i=1}^{n-1}(n-i)\frac{\left|d\overline{\mu}_i\right|^2}{\left(1 - \left|\overline{\mu}_i\right|^2\right)^2}$$

This document may not be reproduced, modified, adapted, published, translated, in any way, in whole or in part or disclosed to a third party without the prior written consent of Thales - © Thales 2015 All rights reserved.

Moyenner les matrices de covariance structurées

- La distance entre 2 matrices de covariance est donné par la distance dans l'espace produit $R^+ x D_n$ (via la distance de Poincaré dans le disque):

$$d^2\left[\left(\overline{P}_{0,1},\left\{\overline{\mu}_{i,1}\right\}_{i=1}^{N-1}\right),\left(\overline{P}_{0,2},\left\{\overline{\mu}_{i,2}\right\}_{i=1}^{N-1}\right)\right]=N\log^2\left(\frac{\overline{P}_{0,2}}{\overline{P}_{0,1}}\right)+\sum_{i=1}^{N-1}(N-i)\left(\frac{1}{2}\log\left(\frac{1+\delta_i}{1-\delta_i}\right)\right)^2$$

avec $\delta_i=\left|\frac{\overline{\mu}_{i,1}-\overline{\mu}_{i,2}}{1-\overline{\mu}_{i,1}\overline{\mu}_{i,2}^*}\right|$

- La moyenne est alors définie comme le barycentre géodésique de Fréchet qui minise la somme des carrés des distances géodésiques:

$$\left(P_{0,barycenter},\left\{\mu_{i,barycenter}\right\}_{i=1}^{N-1}\right)=$$

$$\underset{P_{0,median},\left\{\mu_{i,median}\right\}_{i=1}^{N-1}}{ArgMin}\sum_{k=1}^{M}d^p\left[\left(P_{0,barycenter},\left\{\mu_{i,barycenter}\right\}_{i=1}^{N-1}\right),\left(\overline{P}_{0,k},\left\{\overline{\mu}_{i,k}\right\}_{i=1}^{N-1}\right)\right]$$

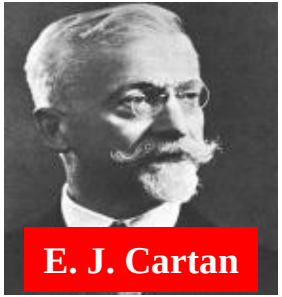
- Le calcul du barycentre de Fréchet est calculé par le flot de Hermann Karcher

This document may not be reproduced, modified, adapted, published, translated, in any way, in whole or in part or disclosed to a third party without the prior written consent of Thales - © Thales 2015 All rights reserved.

THALES

Unicité du centre de masse: de Elie Cartan à Hermann Karcher

Centre de Masse de Cartan



- Elie Cartan a prouvé que la fonctionnelle suivante:

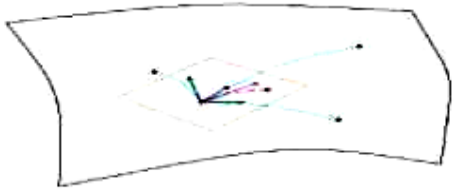
$$f : m \in M \mapsto \int_A d^2(m,a)da$$

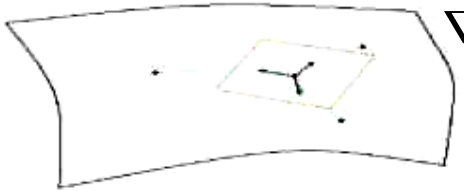
est strictement convexe et possède un unique minimum (centre de masse de *A* pour la distribution *da*) pour les variétés à courbure négative.

Flot de Karcher

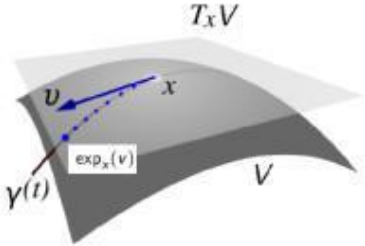
- Hermann Karcher a prouvé la convergence du flot suivant vers le centre de masse:

$$m_{n+1} = \gamma_n(t_n) = \exp_{m_n}(-t_n.\nabla f(m_n)) \quad \text{avec} \quad \dot{\gamma}_n(0) = -\nabla f(m_n)$$





$$\nabla f = -\int_A \exp_m^{-1}(a)da$$



not be reproduced, modified, adapted, published, translated, in any way, in whole or in part, a third party without the prior written consent of Thales - © Thales 2015 All rights reserved.

Flot de Karcher pour calculer la moyenne ou la médiane géodésique

hed, translated, in any way, in whole or in
f Thales - © Thales 2015 All rights reserved.

Flot de Karcher

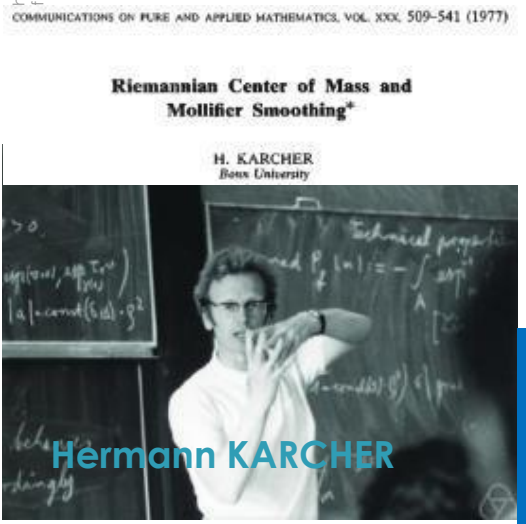
- Passage de l'Euclidien à la variété via la carte exponentielle pour le médian

$$m_{n+1} = t\sum_k \frac{x_k - m_n}{\|x_k - m_n\|}$$

Euclidien

$$m_{n+1} = \exp_{m_n}\left(t\sum_k \frac{\exp_{m_n}^{-1}(x_k)}{\left\|\exp_{m_n}^{-1}(x_k)\right\|} \right)$$

Riemannien



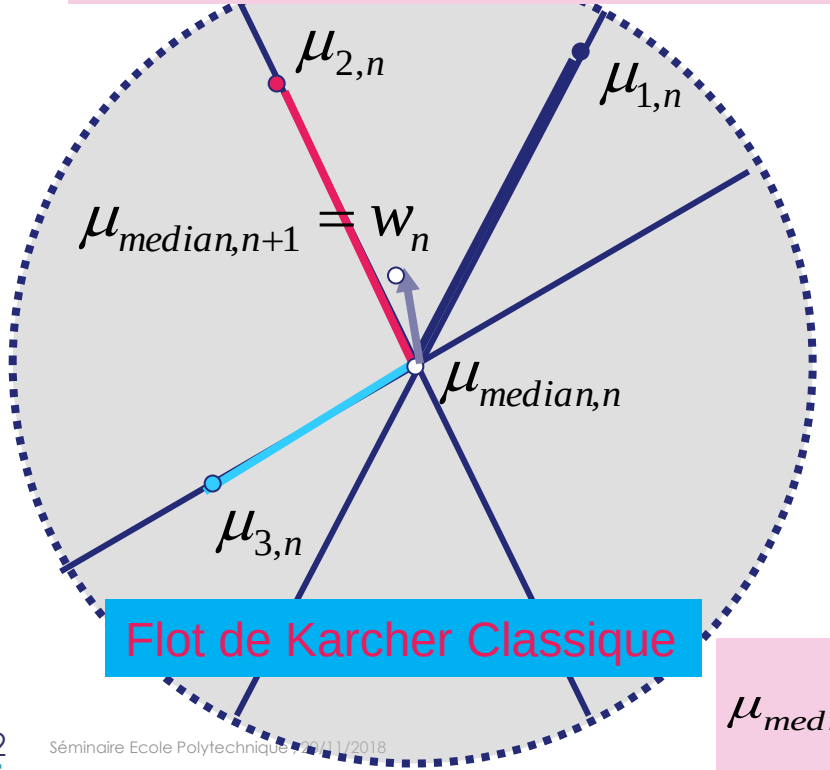
Les vecteurs tangents aux géodésiques sont normalisés dans le cas du médian

- Partir d'un point arbitraire sur la variété
- Calculer les géodésiques de de ce point aux N points et les vecteurs tangents (normalisés)
- Sommer les vecteurs tangents (normalisés)
- Déplacer le point sur la variété dans la direction de ce vecteur somme (via la carte exponentielle)

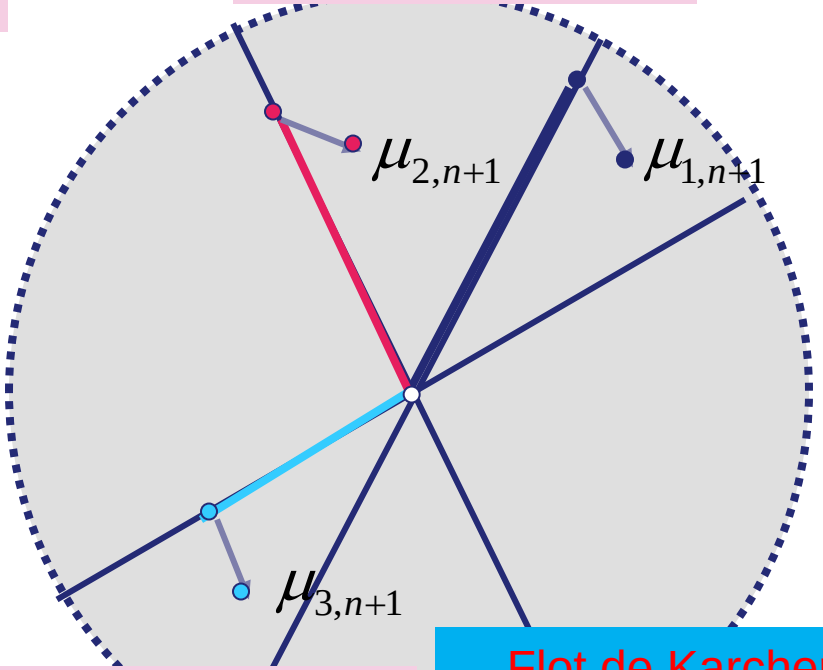
Flot de Karcher pour le barycentre de Fréchet dans le disque unité de Poincaré: calcul des coefficients de réflexions/Verblunsky

$$w_n = \gamma_n \sum_{\substack{k=1 \\ k \neq l}}^{m} \frac{\mu_{k,n}}{|\mu_{k,n}|} \quad avec \quad \{l / |\mu_{l,n}| < \varepsilon\}$$

$$\mu_{k,n+1} = \frac{\mu_{k,n} - w_n}{1 - \mu_{k,n} . w_n^*}$$



Flot de Karcher Classique

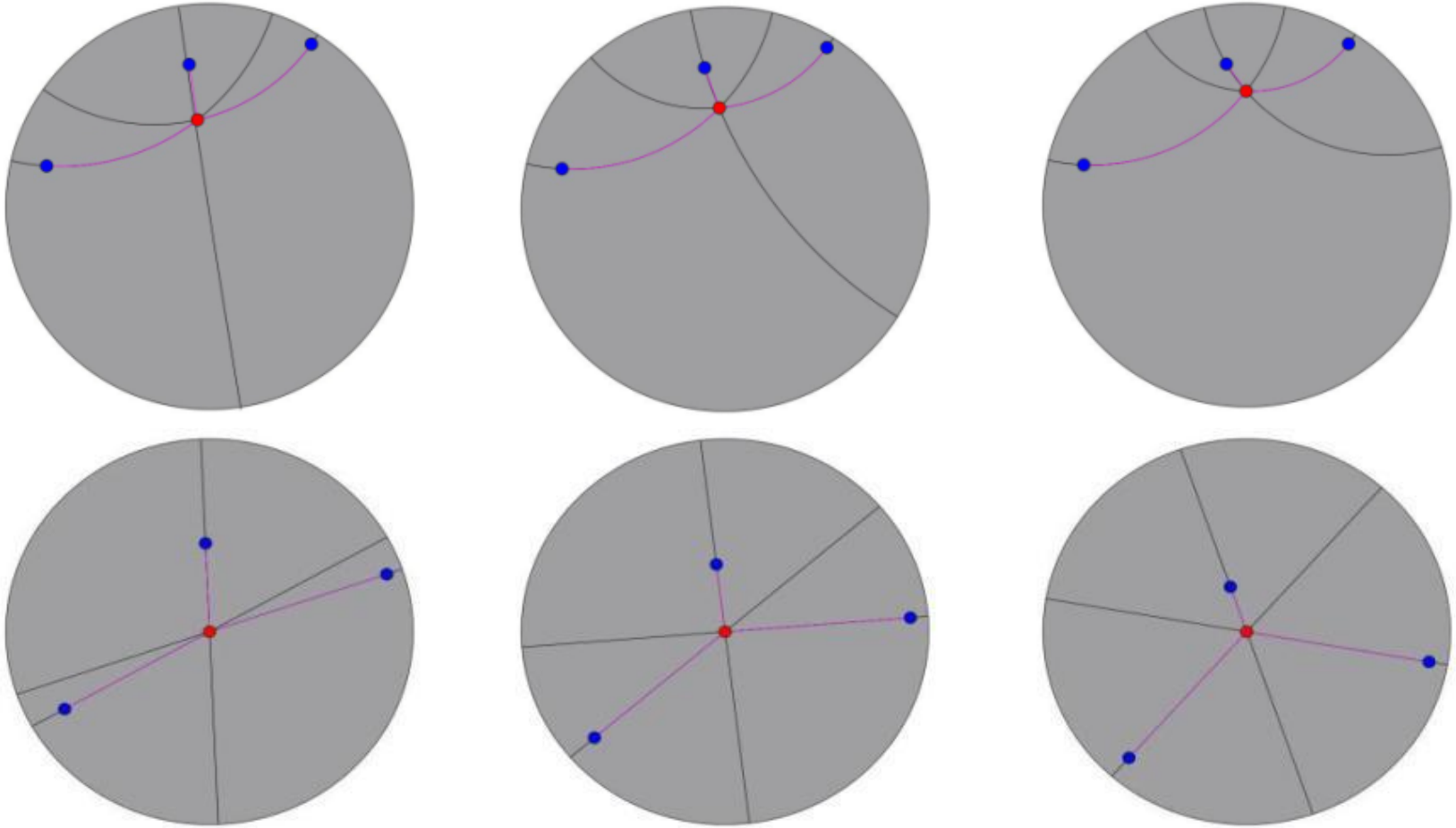


$$\mu_{median,n+1} = \frac{\mu_{median,n} + w_n}{1 + \mu_{median,n} w_n^*}$$

Flot de Karcher centré sur le point soumis au flot

This document may not be reproduced, modified, adapted, published, translated, in any way, in whole or in part or disclosed to a third party without the prior written consent of Thales - © Thales 2015 All rights reserved.

Flot de Karcher pour le barycentre de Fréchet dans le disque unité de Poincaré: calcul des coefficients de réflexions/Verblunsky



This document may not be reproduced, modified, adapted, published, translated, in any way, in whole or in part or disclosed to a third party without the consent of Thales - © Thales 2015 All rights reserved.

Barycentre de Fréchet médian = Barycentre de Busemann

Cas du disque de Poincaré

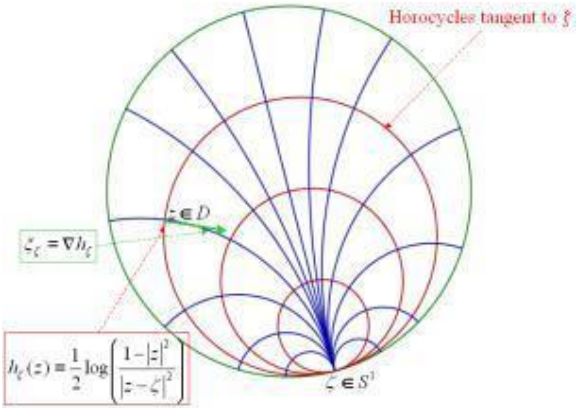
- $\xi_\mu(z)$ peut être écrit en fonction de $\xi_\zeta(z)$ qui est le vecteur tangent de la géodésique en $z \in D$ pointant vers $\zeta \in S^1$:

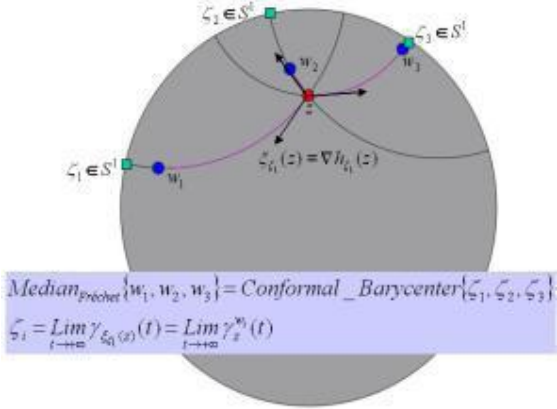
$$\xi_\mu(z) = \int_{S^1} \xi_\zeta(z) d\mu(\zeta)$$

- En géométrie de Poincaré du disque unité, le champ de vecteur ξ_ζ est le gradient d'une fonction h_ζ dont les lignes de niveau sont les horocycles tangents à $\zeta \in S^1$ en S^1 :

$$\xi_\mu = \nabla h_\mu \quad \text{avec} \quad h_\mu : z \mapsto \int_{S^1} h_\zeta(z) d\mu(\zeta)$$

$$h_\mu(z) == \int_{S^1} \frac{1}{2}\log\left(\frac{1-|z|^2}{|z-\zeta|^2}\right) d\mu(\zeta) = \int_{S^1} \lim_{r\to 1^-}\left[d(0,r) - d(z,r\zeta)\right] d\mu(\zeta)$$





$$Median_{Fréchet}\{w_1, w_2, w_3\} = Conformal_Barycenter\{\zeta_1, \zeta_2, \zeta_3\}$$

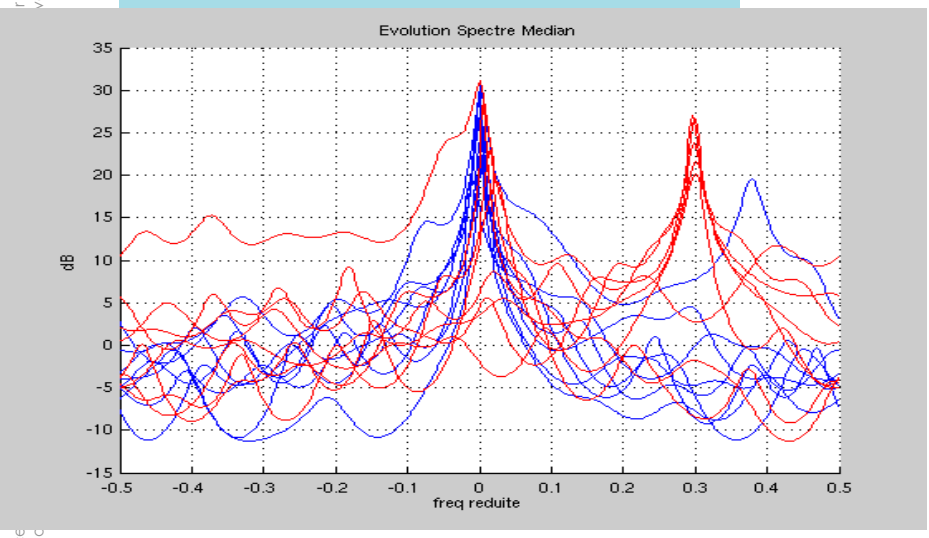
$$\zeta_i = \lim_{t\to+\infty} \gamma_{z_{\zeta_i}(z)}(t) = \lim_{t\to+\infty} \gamma_z^{w_i}(t)$$

This document may not be reproduced, modified, adapted, published, translated, in any way, in whole or in part, nor disclosed to others without the prior written consent of Thales - © Thales 2015 All rights reserved.

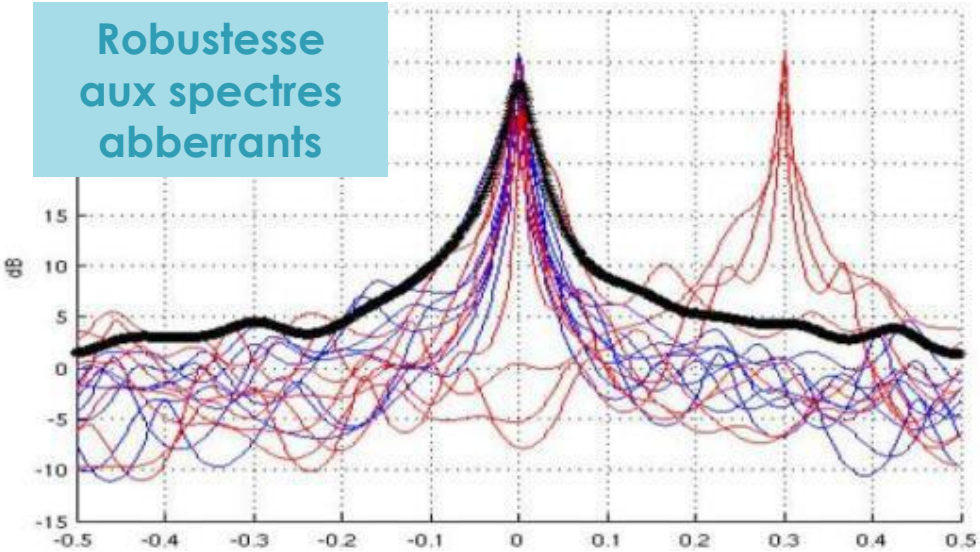
THALES

Spectre Doppler “median” par le calcul du barycentre de Fréchet sur les coefficients de réflexion/Verblunsky dans le disque unité

Barycentre géodésique médian

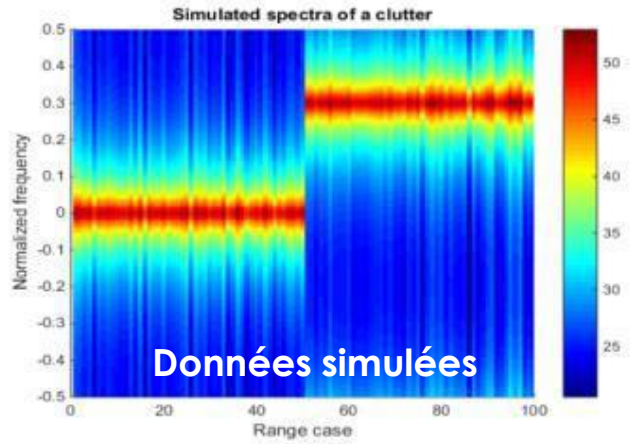


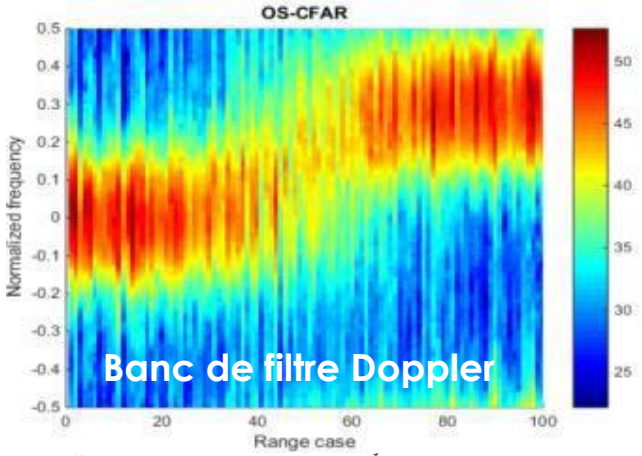
Robustesse aux spectres abberrants

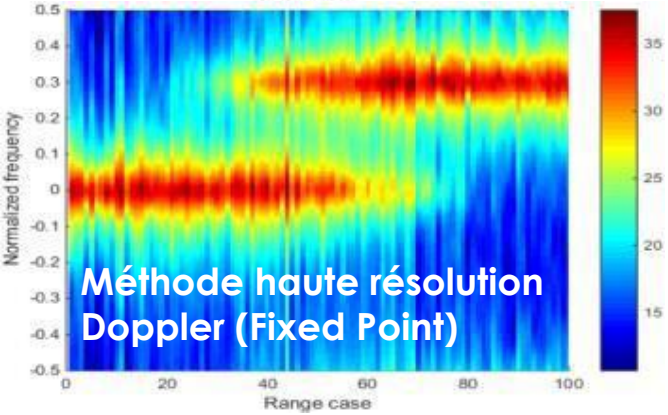


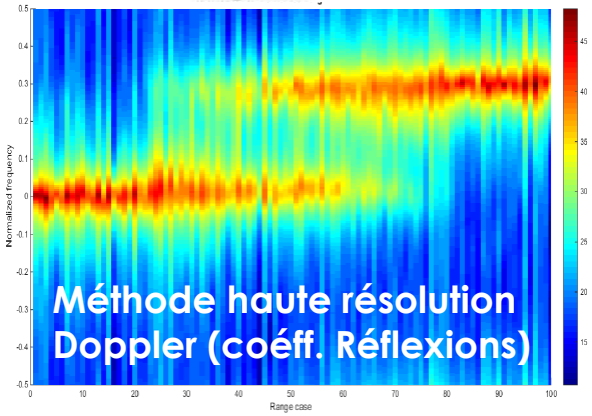
This document may not be reproduced in part or disclosed to a third party without ...

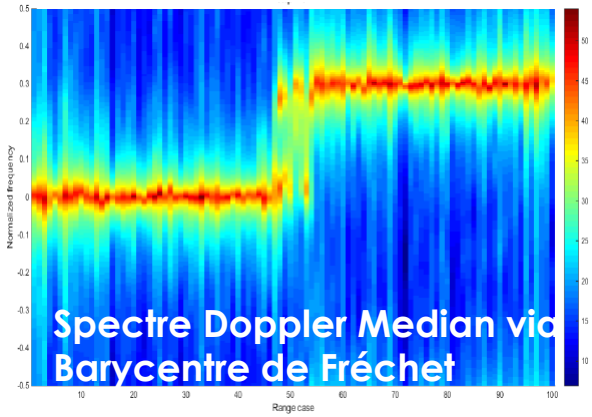
Estimation du spectre Doppler « median » : préserve les discontinuités









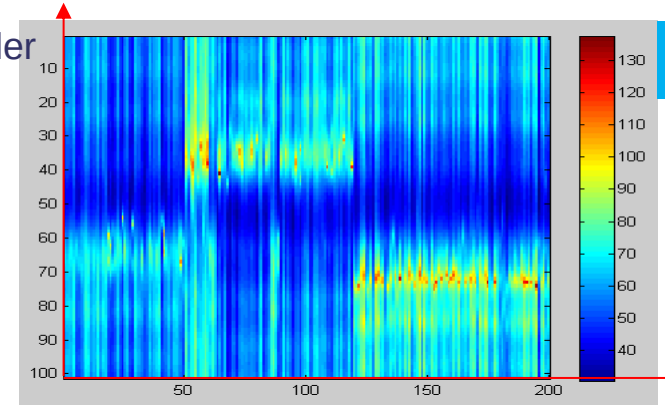


THALES

Comparaison spectre Doppler moyen et médian

nslated, in any way, in whole or in
- © Thales 2015 All rights reserved.

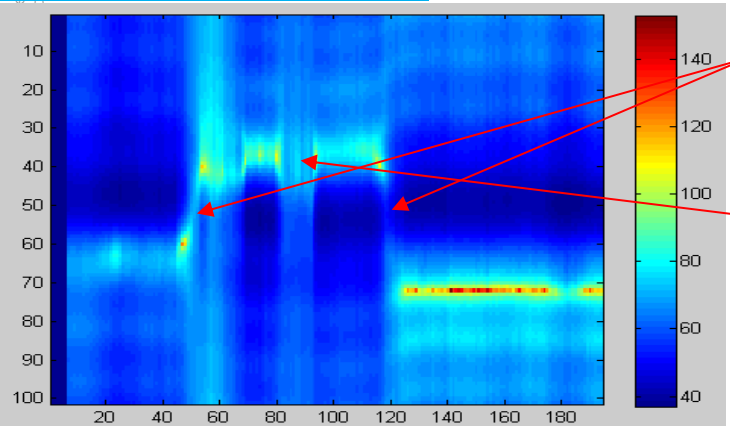
Axe Doppler



Spectre brut

Axe Distance

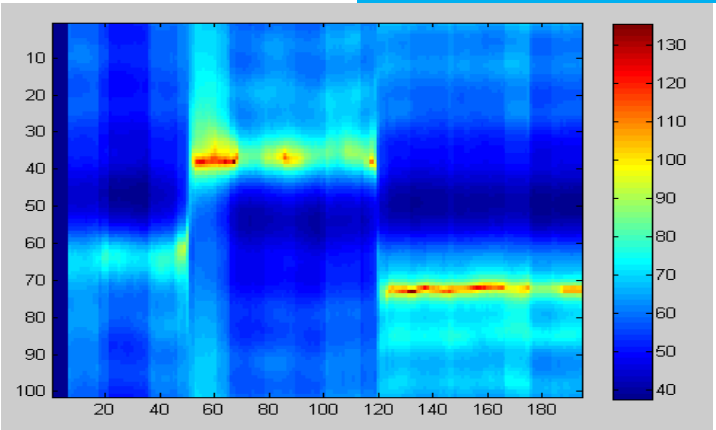
Spectre Doppler Moyen



Non préservation des discontinuités

Perturbation par des valeurs aberrantes

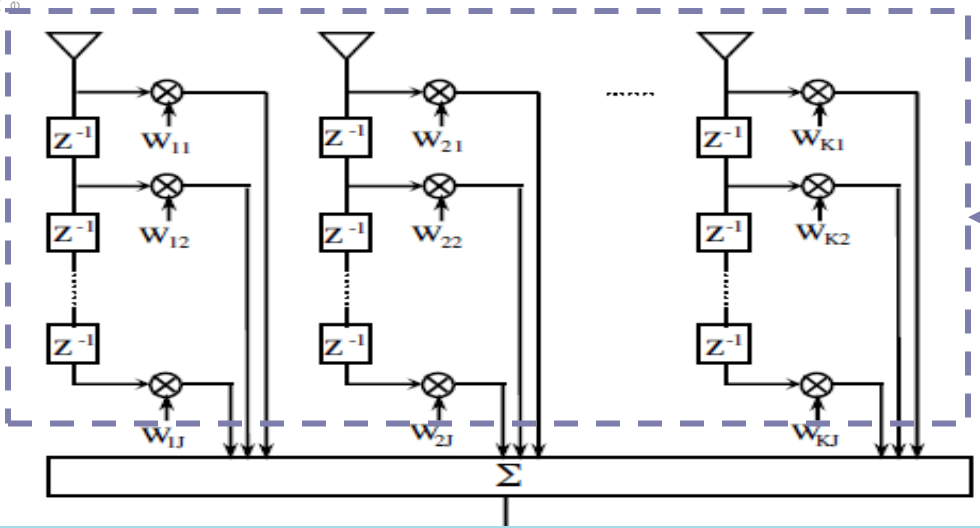
Spectre Doppler Median



THALES

Extension à la mesure spatio-temporelle de l'onde électromagnétique: structure de Matrice Toeplitz-Bloc-Toeplitz

Nous considérons un vecteur de mesures spatiales et temporelles



Mesures digitale spatio-temporelle (Matrice de covariance spatio-temporelle)

$$z_{i,j} : \begin{cases} i : \text{indice temporel} \\ j : \text{indice spatial} \end{cases}$$

$$R = E\left[ZZ^{+}\right]$$

$$Z = \begin{bmatrix} z_{1,1} \\ \vdots \\ z_{N,1} \\ \vdots \\ z_{1,M} \\ \vdots \\ z_{N,M} \end{bmatrix}$$

$$R_{p,n+1} = \begin{bmatrix} R_0 & R_1 & \cdots & R_n \\ R_1^{+} & R_0 & \ddots & \vdots \\ \vdots & \ddots & \ddots & R_1 \\ R_n^{+} & \cdots & R_1^{+} & R_0 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} R_{p,n} & \tilde{R}_n \\ \tilde{R}_n^{+} & R_0 \end{bmatrix}$$

$$\tilde{R}_n = V \begin{bmatrix} R_1 \\ \vdots \\ R_n \end{bmatrix}^{*} \text{avec } V = \begin{bmatrix} 0 & \cdots & 0 & J_p \\ \vdots & \iddots & \iddots & 0 \\ 0 & J_p & \iddots & \vdots \\ J_p & 0 & \cdots & 0 \end{bmatrix}$$

THALES

Extension du théorème de Trench/Verblunsky aux cas des matrices Toeplitz-Bloc-Toeplitz Hermitiennes Définies Positives

Les matrices Toeplitz-Bloc-Toeplitz Hermitiennes Définies Positives peuvent être paramétrées par des coefficients de Verblunsky matriciels:

$$R_{p,n+1}^{-1} = \begin{bmatrix} \alpha_n & \alpha_n.\widehat{A}_n^+ \\ \alpha_n.\widehat{A}_n & R_{p,n}^{-1} + \alpha_n.\widehat{A}_n.\widehat{A}_n^+ \end{bmatrix} \quad \text{with} \quad \alpha_n^{-1} = \left[1 - A_n^n A_n^{n+}\right].\alpha_{n-1}^{-1}, \quad \alpha_0^{-1} = R_0$$

$$R_{p,n+1} = \begin{bmatrix} \alpha_n^{-1} + \widehat{A}_n^+.R_{p,n}.\widehat{A}_n & -\widehat{A}_n^+.R_{p,n} \\ -R_{p,n}.\widehat{A}_n & R_{p,n} \end{bmatrix} \quad \text{and} \quad \widehat{A}_n = \begin{bmatrix} A_1^1 \\ \vdots \\ A_n^n \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \widehat{A}_{n-1} \\ 0_p \end{bmatrix} + A_n^n.\begin{bmatrix} J_p A_{n-1}^{n-1*} J_p \\ \vdots \\ J_p A_1^{n-1*} J_p \\ I_p \end{bmatrix}$$

Extension du théorème de Trench/Verblunsky au cas matriciel: Existence d'un difféomorphisme φ:

$$\varphi : TBTHPD_{n\times n} \to THPD_n \times SD^{n-1}$$
$$R \mapsto \left(R_0, A_1^1, \ldots, A_{n-1}^{n-1}\right)$$
$$\text{with} \quad SD = \left\{Z \in Herm(n) / ZZ^+ < I_n\right\}$$

This document may not be reproduced, modified, adapted, published, translated, in any way, in whole or in part or disclosed to a third party without the prior w... ...les - © Thales 2015 All rights reserved.

THALES

Métrique de la géométrie de l'Information: Hessien du potentiel

- **L'entropie définie encore un potentiel (Kählérien) dont le hessien fournit une métrique Riemannienne pour les paramètres matriciels de Verblunsky:**

$$\tilde{\Phi}(R_{p,n}) = -\log(\det R_{p,n}) + cste = -Tr(\log R_{p,n})\mu + cste$$

$$\Rightarrow g_{i\bar{j}} = Hess[\phi(R_{p,n})]$$

- **La structure « Toeplitz-Bloc-Toeplitz » permet d'exprimer l'entropie uniquement à partir des paramètres de Verblunsky traduisant l'information spatiale et d'une matrice R_0 incorporant l'information Doppler étudiée précedemment:**

$$\tilde{\Phi}(R_{p,n}) = \sum_{k=1}^{n-1}(n-k).\log\det\left[I_n - A_k^k A_k^{k+}\right] + n.\log\left[\pi.e.\det R_0\right]$$

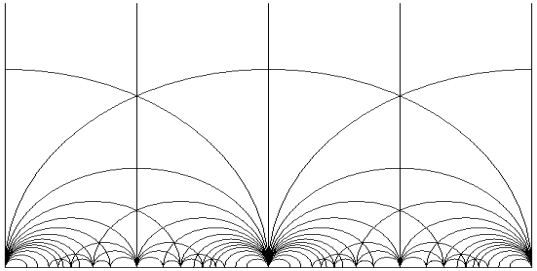
- **Le hessien de l'Entropie donne la métrique:**

$$ds^2 = n.Tr\left[\left(R_0^{-1}dR_0\right)^2\right] + \sum_{k=1}^{n-1}(n-k)Tr\left[\left(I_n - A_k^k A_k^{k+}\right)^{-1} dA_k^k \left(I_n - A_k^{k+} A_k^k\right)^{-1} dA_k^{k+}\right]$$

This document may not be reproduced, modified, adapted, published, translated, in any way, in whole or in part or disclosed to a third party without the prior written consent of Thales - © Thales 2015 All rights reserved.

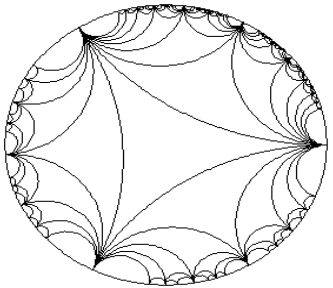
THALES

Extension des domaines symétriques bornés homogènes: Domaine de Siegel: Demi-espace supérieur et disque de Siegel



Demi-Plan Supérieur

$$w = \frac{z-i}{z+i}$$



Disque Unité de Poincaré

$$ds^2 = \frac{dx^2 + dy^2}{y^2} = \frac{|dz|^2}{y^2}$$

$$ds^2 = y^{-1} dz y^{-1} dz^*$$

avec $z = x + iy$ and $y > 0$

$$ds^2 = \frac{|dw|^2}{\left(1 - |w|^2\right)^2}$$

$$ds^2 = \left(1 - ww^*\right)^{-1} dw \left(1 - ww^*\right)^{-1} dw^*$$

Demi-espace supérieur

$$W = (Z - iI)(Z + iI)^{-1}$$

Disque Unité de Siegel

$$ds^2 = Tr\left(Y^{-1} dZ Y^{-1} d\overline{Z}\right)$$

with $Z = X + iY$

$$ds^2 = Tr\left[\left(I - WW^+\right)^{-1} dW \left(I - W^+W\right)^{-1} dW^+\right]$$

$X \in Herm(n,C)$ and $Y \in HPD(n,C)$

This document may not be reproduced, modified, adapted, published, translated, in any way, in whole or in part or disclosed to a third party without the prior written consent of Thales - © Thales 2015 All rights reserved.

THALES

Les paramètres de Verblunsky matriciel sont élément du disque de Siegel : $ZZ^{+}<I$

Les automorphismes du disque de Siegel SD_n sont donnés par:

$$\Sigma = \Phi_{Z_0}(Z) = \left(I - Z_0 Z_0^{+}\right)^{-1/2}(Z - Z_0)\left(I - Z_0^{+} Z\right)^{-1}\left(I - Z_0^{+} Z_0\right)^{1/2}$$

L'ensembles des automorphismes sont donnés par:

$$\forall \Psi \in Aut(SD_n), \exists U \in U(n,C) / \Psi(Z) = U \Phi_{Z_0}(Z) U^{t}$$

La distance est:

$$\forall Z, W \in SD_n, d(Z,W) = \frac{1}{2}\log\left(\frac{1 + \|\Phi_Z(W)\|}{1 - \|\Phi_Z(W)\|}\right)$$

L'automorphisme inverse est donné par:

$$G = \left(I - Z_0 Z_0^{+}\right)^{1/2} \Sigma \left(I - Z_0^{+} Z_0\right)^{-1/2} = (Z - Z_0)\left(I - Z_0^{+} Z\right)^{-1}$$

$$\Rightarrow \begin{cases} Z = \Phi_{Z_0}^{-1}(\Sigma) = (G Z_0^{+} + I)^{-1}\left(G + Z_0^{+}\right) \\ \text{with } G = \left(I - Z_0 Z_0^{+}\right)^{1/2} \Sigma \left(I - Z_0^{+} Z_0\right)^{-1/2} \end{cases}$$

This document may not be reproduced, modified, adapted, published, translated, in any way, in whole or in part or disclosed to a third party without the prior written consent of Thales - © Thales 2015 All rights reserved.

THALES

Groupe Symplectique (Carl-Ludwig Siegel) : Demi-espace SH_n

Métrique de Siegel sur le demi-plan supérieur :

- Demi-Plan supérieur : $\boxed{SH_n = \{Z = X + iY \in Sym(n,C) / \mathrm{Im}(Z) = Y > 0\}}$
- Les isométries de SH_n sont données par le groupe quotient :

$PSp(n,R) \equiv Sp(n,R)/\{\pm I_{2n}\}$ avec $Sp(n,F)$ le groupe symplectique :

$$M = \begin{pmatrix} A & B \\ C & D \end{pmatrix} \Rightarrow M(Z) = (AZ + B)(CZ + D)^{-1}$$

$$M = \begin{pmatrix} A & B \\ C & D \end{pmatrix} \in Sp(n,F) \Leftrightarrow \begin{cases} A^T C \text{ et } B^T D \quad \text{symmetric} \\ A^T D - C^T B = I_n \end{cases}$$

$$Sp(n,F) \equiv \{M \in GL(2n,F) / M^T J M = J\},\ J = \begin{pmatrix} 0 & I_n \\ -I_n & 0 \end{pmatrix} \in SL(2n,R)$$

- Seule métrique invariante par $M(Z)$:

$$\boxed{ds^2_{Siegel} = Tr\left(Y^{-1}(dZ)Y^{-1}(d\bar{Z})\right)} \qquad Z = X + iY$$

This document may not be reproduced, modified, adapted, published, translated, in any way, in whole or in part or disclosed to a third party without the prior written consent of Thales - © Thales 2015 All rights reserved.

THALES

Distance dans le demi-plan supérieur de Siegel

Distance dans le demi-plan supérieur de Siegel:

$$Z = X + iY \in SH_n \quad \text{with} \quad X \neq 0$$

$$d^2_{Siegel}(Z_1, Z_2) = \left(\sum_{k=1}^{n} \log^2 \left(\frac{1+\sqrt{\lambda_k}}{1-\sqrt{\lambda_k}} \right) \right) \quad \text{with} \quad Z_1, Z_2 \in SH_n$$

avec $\det\left(R(Z_1, Z_2) - \lambda . I\right) = 0$

$$R(Z_1, Z_2) = (Z_1 - Z_2)(Z_1 - \overline{Z}_2)^{-1}(\overline{Z}_1 - \overline{Z}_2)(\overline{Z}_1 - Z_2)^{-1}$$

Cas particulier (axe imaginaire: matrices symétriques définies positives)

$$Z = iR \quad \text{avec} \quad R > 0$$

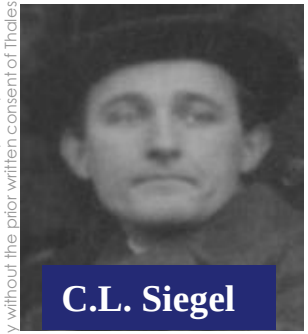
$$d^2(R_1, R_2) = \left\| \log\left(R_1^{-1/2} . R_2 . R_1^{-1/2}\right) \right\|^2 = \sum_{k=1}^{n} \log^2(\lambda_k)$$

$$\det(R_2 - \lambda R_1) = 0$$

This document may not be reproduced, modified, adapted, published, translated, in any way, in whole or in part or disclosed to a third party without the prior written consent of Thales - © Thales 2015 All rights reserved.

THALES

Extension des domaines symétriques bornés homogènes: Domaine de Siegel: Demi-espace supérieur et disque de Siegel



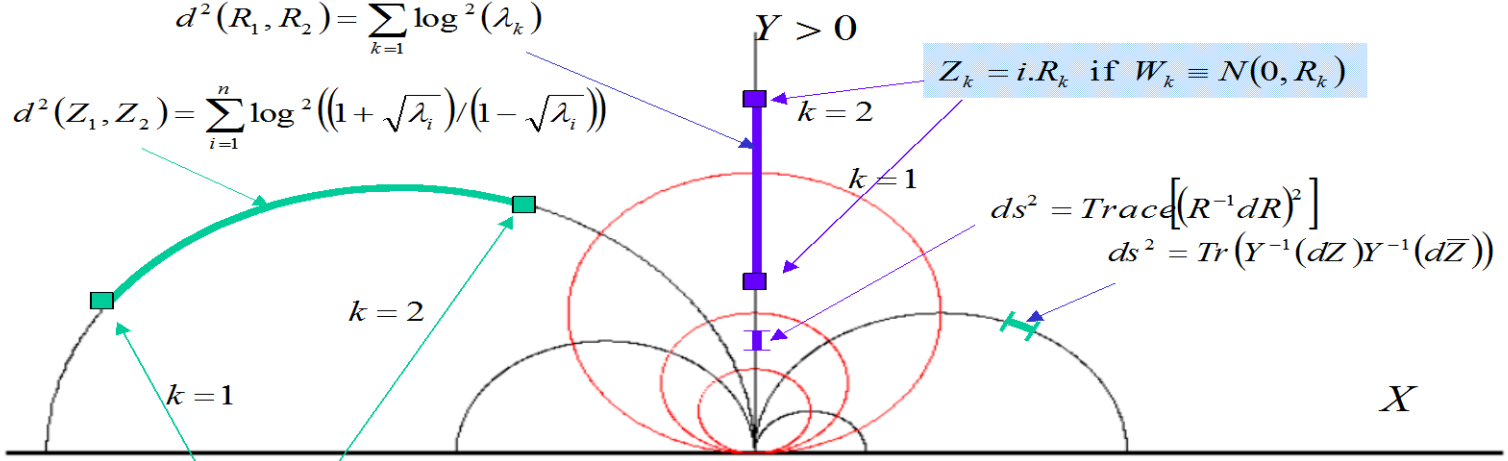
Siegel Upper Half Space

$$SH_n = \{Z = X + iY \in Sym(n, C) / \mathrm{Im}(Z) = Y > 0\}$$

$$\det\left(R_1^{-1/2}.R_2.R_1^{-1/2} - \lambda.I\right) = 0$$

$$d^2(R_1, R_2) = \sum_{k=1}^{n} \log^2(\lambda_k)$$

$$d^2(Z_1, Z_2) = \sum_{i=1}^{n} \log^2\left(\left(1+\sqrt{\lambda_i}\right)/\left(1-\sqrt{\lambda_i}\right)\right)$$



$$Z_k = X_k + i.Y_k$$

$$R(Z_1, Z_2) = (Z_1 - Z_2)(Z_1 - \overline{Z}_2)^{-1}(\overline{Z}_1 - \overline{Z}_2)(\overline{Z}_1 - Z_2)^{-1}$$

$$\det(R(Z_1, Z_2) - \lambda.I) = 0$$

This document may not be reproduced, modified, adapted, published, translated, in any way, in whole or in part or disclosed to a third party without the prior written consent of Thales - © Thales 2015 All rights reserved.

THALES

Décomposition (polaire) de Mostow ou Fibration de Berger pour appliquer le même schéma que dans le disque de Poincaré

- Théorème de Mostow :

  - Toute matrice M de $GL(n,C)$ peut être décomposé :

$$M = Ue^{iA}e^{S}$$

où

- U est unitaire
- A est réelle antisymétrique
- S est réelle symétrique

Peut être déduit de

G.D. Mostow

M. Berger

- Lemme : Soit A et B, 2 matrices hermitiennes définies positives, il existe une unique matrice hermitienne définie positive X telle que:

$$XAX = B$$

- Corollaire : Si M est hermitienne définie positive, il existe une unique matrice symétrique réelle S telle que : $M^{*} = e^{S}M^{-1}e^{S}$

This document may not be reproduced, modified, adapted, published, translated, in any way, in whole or in part or disclosed to a third party without the prior written consent of Thales - © Thales 2015 All rights reserved.

THALES

Polar Decomposition: R. Bhatia, Indian Statistical Institute

Contents lists available at ScienceDirect

Linear Algebra and its Applications

www.elsevier.com/locate/laa

The bipolar decomposition

Rajendra Bhatia

Indian Statistical Institute, 7, S. J. S. Sansanwal Marg, New Delhi 110016, India

A B S T R A C T

It is shown that every nonsingular square complex matrix Z can be factored as $Z = e^L e^{iT} e^{iK} e^S$, where S and T are real symmetric matrices, and K and L are real skew-symmetric matrices. New proofs are given for some related decomposition theorems for unitary and positive definite matrices.

Theorem *(The Mostow Decomposition Theorem). Let Z be a nonsingular complex matrix. Then Z can be factored as*

$$Z = W e^{iK} e^S$$

where W is unitary, S is real and symmetric, and K is real and skew-symmetric. Such a factorisation is unique.

Acknowledgements

I thank F. Barbaresco, Roger Horn and M.S. Raghunathan for illuminating discussions.

References

[1] F. Barbaresco, Information geometry of covariance matrix: Cartan–Siegel homogeneous bounded domains, Mostow/Berger fibration and Fréchet median, in: F. Nielsen, R. Bhatia (Eds.), Matrix Information Geometry, Springer, 2013, pp. 199–255.
[2] R. Bhatia, Positive Definite Matrices, Princeton University Press, 2007.
[3] R. Bhatia, Matrix factorizations and their perturbations, Linear Algebra Appl. 197/198 (1994) 245–276.
[4] R. Bhatia, J. Holbrook, Noncommutative geometric means, Math. Intelligencer 28 (2006) 32–39.

This document may not be reproduced, modified, adapted, p
part or disclosed to a third party without the prior written conse

Généralisation du codage d'Henri Poincaré

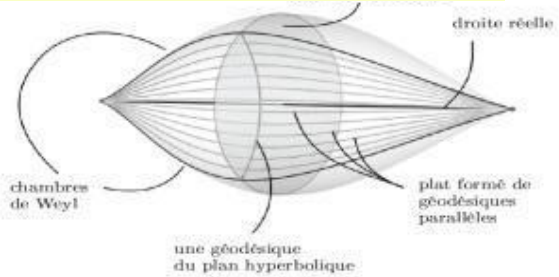
$$\left(R_0, A_1^1, \ldots, A_{n-1}^{n-1}\right) \in THPD_m \times SD^{n-1}$$

$$SD = \left\{Z \,/\, ZZ^+ < I_m\right\}$$

$$R_0 \rightarrow \left(\log(P_0), \mu_1, \ldots, \mu_{m-1}\right) \in R \times D^{m-1}$$

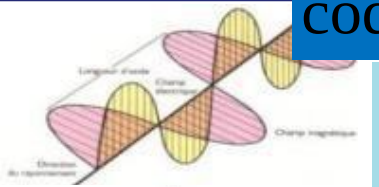
$$D = \left\{z \,/\, zz^* < 1\right\}$$

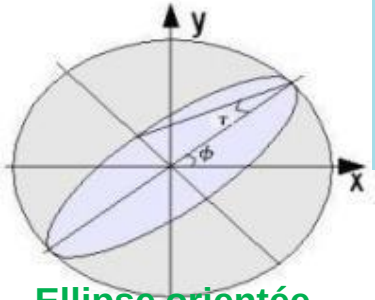
Information Spatio-temporelle:
R x Polydisque Poincaré x Polydisque Siegel



$$\text{codage spatio - Doppler} \in R \times D^{m-1} \times SD^{n-1}$$

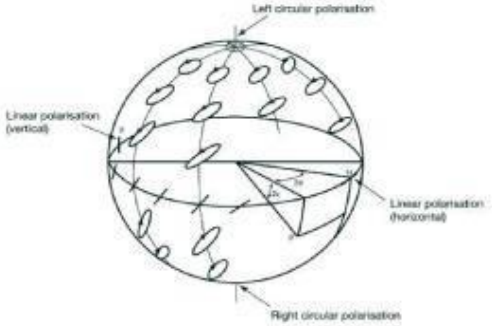
$$\text{codage mesure onde électromagnétique} \in R \times S^1 \times D^{m-1} \times SD^{n-1}$$





Ellipse orientée

$$\vec{S} = \begin{bmatrix} s_0 \\ s_1 \\ s_2 \\ s_3 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} s_0 \\ s_0 \cos 2\tau \cos 2\phi \\ s_0 \cos 2\tau \sin 2\phi \\ s_0 \sin 2\tau \end{bmatrix} \text{ avec } \begin{cases} \phi = \dfrac{1}{2} \arctan\left(\dfrac{s_2}{s_1}\right) \\ \tau = \dfrac{1}{2} \arctan\left(\dfrac{s_3}{\sqrt{s_1^2 + s_2^2}}\right) \end{cases}$$



$$\text{codage polarimétrique} \in R \times S^1$$

Information polarimétrique:
$R_+^* x S^1$

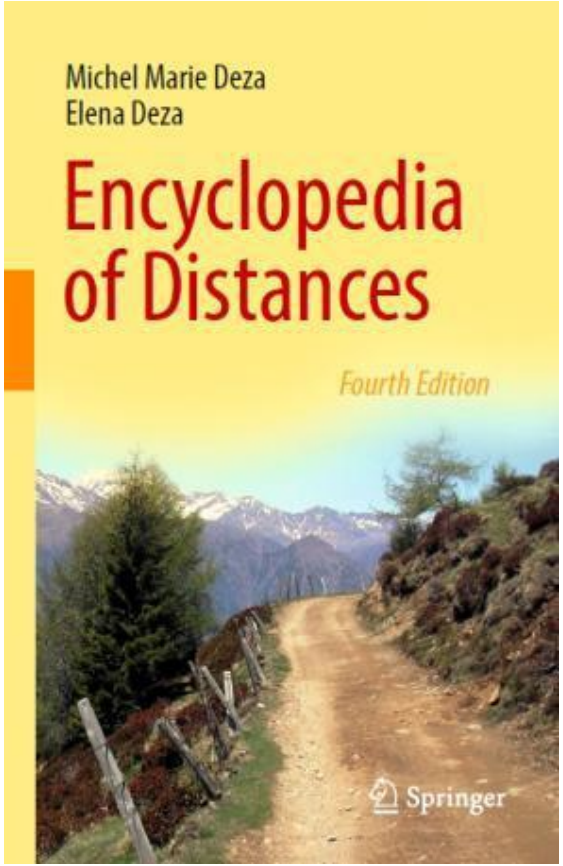
This document may not be reproduced, modified, adapted, or disclosed to a third party without the prior written con

Citation dans « Encyclopedia of Distances » (M. Deza, SPRINGER)

- **Barbaresco metrics**

Let $z(k)$ be a complex temporal (discrete time) *stationary* signal, i.e., its mean value is constant and its *covariance function* $\mathbb{E}[z(k_1)z^*(k_2)]$ is only a function of $k_1 - k_2$. Such signal can be represented by its covariance $n \times n$ matrix $R = ((r_{ij}))$, where $r_{ij} = \mathbb{E}[z(i), z*(j)] = \mathbb{E}[z(n)z*(n-i+j)]$. It is a positive-definite *Toeplitz* (i.e. diagonal-constant) Hermitian matrix. In radar applications, such matrices represent the Doppler spectra of the signal. Matrices R admit a parametrization (complex ARM, i.e., m-th order autoregressive model) by *partial autocorrelation coefficients* defined recursively as the complex correlation between the forward and backward prediction errors of the $(m-1)$-th order complex ARM.

Barbaresco ([Barb12]) defined, via this parametrization, a **Bergman metric** (Chap. 7) on the bounded domain $\mathbb{R} + xD_n \subset \mathbb{C}^n$ of above matrices R; here D is a *Poincaré disk*. He also defined a related **Kähler metric** on $M \times S_n$, where M is the set of positive-definite Hermitian matrices and SD_n is the *Siegel disk* (cf. **Siegel distance**). Such matrices represent spatiotemporal stationary signals, i.e., in radar applications, the Doppler spectra and spatial directions of the signal.



This document may not be reproduced, modified, adapted, published, translated, in any way, in whole or in part or disclosed to a third party without the prior written consent of Thales - © Thales 2015 All rights reserved.

THALES

THALES

ALEAE GEOMETRIA

Géométrie du hasard

2) Approche de Maurice Fréchet : Les éléments aléatoires de nature quelconque dans un espace distancié de Maurice Fréchet

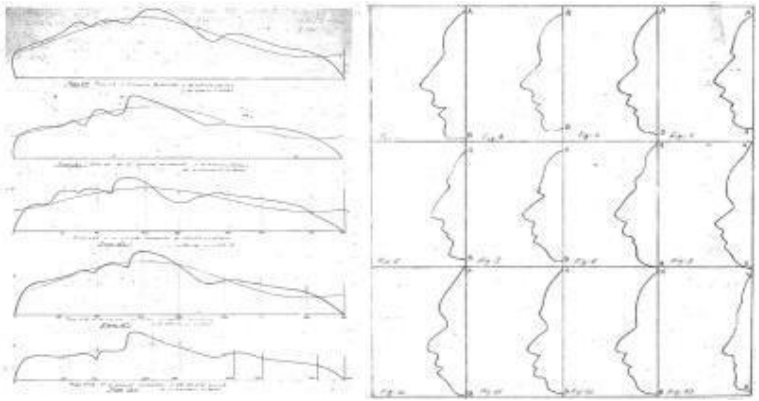
Blaise Pascal

Maurice Fréchet : Les éléments aléatoires de nature quelconque

M. Fréchet, “les éléments aléatoires de nature quelconque dans un espace distancié”, Annales de l’IHP, t.10, n°4, p.215-310, 1948(voir sur Numdam)

- Formidable extension du Calcul [des probabilités qui] résulte **de la simple introduction de la notion de distance de deux éléments aléatoires**
- La nature, la science et la technique offrent de nombreux exemples d’**éléments aléatoires qui ne sont, ni des nombres, ni des séries, ni des vecteurs, ni des fonctions**. Telles sont par exemple, **la forme d’un fil jeté au hasard sur une table, la forme d’un oeuf pris au hasard dans un panier d’oeufs**. On a ainsi une **courbe aléatoire, une surface aléatoire**. On peut aussi considérer d’autres éléments mathématiques aléatoires : **des transformations aléatoires de courbe en courbe**.

Documents numérisés à partir du Fond Fréchet des Archives de l’Académie des Sciences



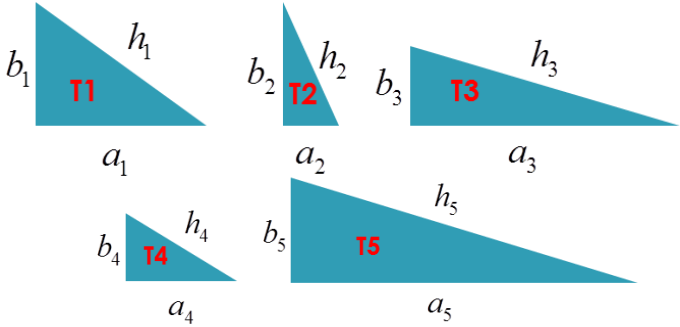
M. Fréchet collaboration avec M. Ozil: Analyse harmonique des profils humains. Les tableaux de M. Ozil ne correspondent pour des formes en fait assez compliqués qu’à 9 harmoniques et représentent seulement la moitié expressive du profil, c’est à dire une fonction non périodique.

This document may not be reproduced, modified, adapted, published, translated, in any way, in whole or in part or disclosed to a third party without the prior written consent of Thales - © Thales 2015 All rights reserved.

THALES

Antoine-Augustin Cournot et le triangle rectangle moyen
Joseph Bertrand et l'homme moyen

- Lorsqu'on applique la détermination des moyennes aux diverse parties d'un système compliqué, il faut bien prendre garde que ces valeurs moyennes peuvent ne pas se convenir : en sorte que l'état du système, dans lequel tous les éléments prendraient à la fois les valeurs moyennes déterminées séparément pour chacun d'eux, serait un état impossible.
- Si, par exemple, un triangle est assujetti à rester rectangle pendant que ses côtés varient, il y aura une valeur moyenne pour chacun des trois côtés; mais ces trois moyennes, prises ensemble, ne conviendront pas à un triangle rectangle, ou ne satifseront pas à cette condition si connue, que le carré fait sur l'hypoténuse égale à la somme des carrés fait sur lles deux côtés de l'angle droit.
- L'homme moyen: Par un système de moyennes tirées de la mesure de la taille, du poids, des forces, etc., sur des individus en grand nombre. L'homme moyen ainsi défini, bien loin d'être en quelque sorte le type de l'expèce, serait tout simplement un impossible



$$\left(\frac{a_1+a_2+a_3+a_4+a_5}{5}\right)^2+\left(\frac{b_1+b_2+b_3+b_4+b_5}{5}\right)^2\neq\left(\frac{h_1+h_2+h_3+h_4+h_5}{5}\right)^2$$

Le poids d'un individu est grosso modo proportionnel à son volume, il varie comme le cube de la taille; or la moyenne des cubes n'est évidemment pas le cube de la moyenne – **Joseph Bertrand**

This document may not be reproduced, modified, adapted, published, translated, in any way, in whole or in part or disclosed to a third party without the prior written consent of Thales - © Thales 2015 All rights reserved.

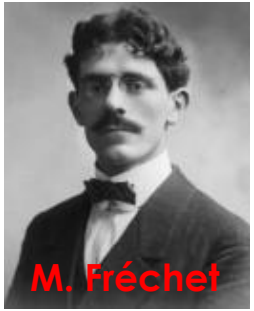
Moyenne/Médiane: Barycentre de Fréchet dans l'espace métrique

Illustrons l'idée du barycentre de Fréchet pour des « triangles rectangles »

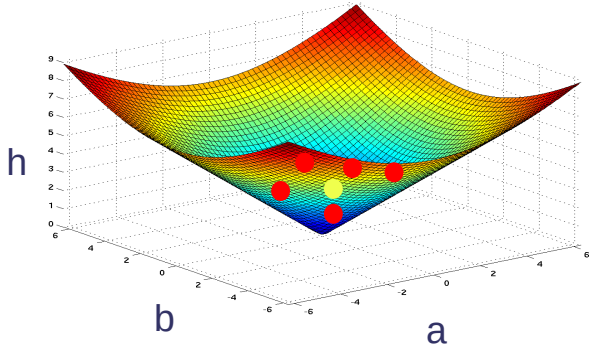
- Considérons N triangles rectangles $\{a_i, b_i, h_i\}$, on cherche le « triangle median rectangle »: La solution est le barycentre « géodésique » de Fréchet, qui minimise la somme des distances géodésiques à tous les triangles rectangles

$$\{A, B, H\} = \arg \underset{\{A,B,H\}}{Min} \sum_{i=1}^{N} d^{p}_{geodesique}(\{a_i, b_i, h_i\}, \{A, B, H\})$$

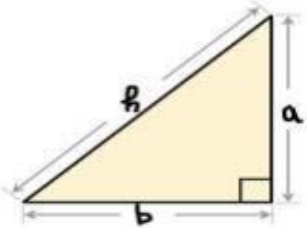
p=2 : Moyenne, p=1 Median



$$h = \sqrt{a^2 + b^2}$$



- **Les paramètres d'un triangle *{a,b,h}* rectangle sont contraints par la l'équation de Pythagore $h^2=a^2+b^2$.**
- **Cette contrainte se « déploie » en un cône convexe.**
- **1 triangle rectangle est représenté par 1 point sur la le cone convexe**



$$h = \sqrt{a^2 + b^2}$$

This document may not be reproduced, modified, adapted, published, translated, in any way, in whole or in part or disclosed to a third party without the prior written consent of Thales - © Thales 2015 All rights reserved.

THALES

Maurice Fréchet, Darmois, Cramer, Fisher, Levy, Blanc-Lapierre
Congrès Calcul des probabilités – Genève 1938 & Lyon 1948

A Congress on Probability in Geneva (Congrès, Calcul des Probabilités, 1938). Along the front you see Lévy, R. A. Fisher, and Georges Darmois. On the stairs are Cramér, Fréchet, and Jean Piaget.

Fig. 9 Colloque International sur le Calcul des Probabilités, Lyon 1948. First row: Paul Lévy and Maurice Fréchet. On the picture one can find among others J. Doob, R. Fortet, D. Van Dantzig, E. Mourier, J. Kampé de Fériet, A. Blanc-Lapierre.... (Photo: © Private collection F. Lederer)

THALES

Maurice Fréchet et l'équation de Clairaut

Travaux précurseurs de Maurice Fréchet

- En 1939, dans son cours de l'IHP, Maurice Fréchet introduit ce qui fut appelée ensuite borne de Cramer-Rao

$$(\sigma_T)^2 \geqslant \frac{1}{n(\sigma_A)^2} \text{ avec } T = H(X_1, \ldots, X_n), \quad A = \frac{1}{f(X,\theta)} \frac{\partial f(X,\theta)}{\partial \theta}$$

$$\hat{\theta} \text{ estimateur de } \theta, \text{ borne de Fréchet} : R_\theta = E\left[\left(\theta - \hat{\theta}\right)\left(\theta - \hat{\theta}\right)^T\right] \geq I(\theta)^{-1}$$

$$[I(\theta)]_{i,j} = -E\left[\frac{\partial^2 \log P(Z/\theta)}{\partial\theta_i \partial\theta_j}\right] = E\left[\frac{\partial \log P(Z/\theta)}{\partial\theta_i} \frac{\partial \log P(Z/\theta)}{\partial\theta_j}\right]$$

- Dans son article de 1943, Maurice Fréchet s'intéresse aux "**densités distinguées**", densités qui atteignent cette borne. Il montre qu'elles dépendent d'une fonction (logarithme de la fonction de partition) qui vérifie **l'équation de Alexis Clairaut**.

$$\Phi^*(x^*) = \left\langle x^*, \frac{d\Phi^*(x^*)}{dx^*} \right\rangle - \Phi\left(\frac{d\Phi^*(x^*)}{dx^*}\right) \text{ et } x^* = \frac{d\Phi(x)}{dx}$$

(55) $$\mu = \theta\,\mu' - \psi(\mu')$$

c'est-à-dire une équation de Clairaut. La solution $\mu' =$ constante réduirait $f(x, \theta)$, d'après (48) à une fonction indépendante de θ, cas où le problème n'aurait plus de sens. μ est donc donné par la solution singulière de (55), qui est unique et s'obtient en éliminant s entre $\mu = \theta\, s - \psi(s)$ et $\theta = \psi'(s)$ ou encore entre

This document may not be reproduced, modified, adapted, published, translated, in any way, in whole or in part or disclosed to a third party without the prior written consent of Thales - © Thales 2015 All rights reserved.

THALES

2ème partie de l'article de Fréchet: l'équation de Clairaut

- A cette étape, Fréchet cherche les « **densités distinguées** », toute densité de probabilité $p_\theta(x)$ telle que la fonction suivante soit indépendante de θ :

$$h(x) = \theta + \frac{\dfrac{\partial \log p_\theta(x)}{\partial \theta}}{\displaystyle\int_{-\infty}^{+\infty} \left[\frac{\partial p_\theta(x)}{\partial \theta}\right]^2 \frac{dx}{p_\theta(x)}}$$

- L'objectif de Fréchet est alors de déterminer la fonction minimisante $T = H'(X_1,\ldots,X_n)$ qui atteint la borne. L'identité précédente peut se réécrire :

$$\lambda(\theta)\frac{\partial \log p_\theta(x)}{\partial \theta} = h(x) - \theta$$

$$\lambda(x) = \left[\int_{-\infty}^{+\infty} \left[\frac{\partial p_\theta(x)}{\partial \theta}\right]^2 \frac{dx}{p_\theta(x)}\right]^{-1} = \left[\int_{-\infty}^{+\infty} p_\theta(x)\left[\frac{\partial \ln p_\theta(x)}{\partial \theta}\right]^2 dx\right]^{-1} = \overbrace{\left[E\left[\left[\frac{\partial \ln p_\theta(x)}{\partial \theta}\right]^2\right]\right]^{-1}}^{\text{Inverse de la matrice de Fisher}}$$

This document may not be reproduced, modified, adapted, published, translated, in any way, in whole or in part or disclosed to a third party without the prior written consent of Thales - © Thales 2015 All rights reserved.

THALES

2ème partie de l'article de Fréchet: l'équation de Clairaut

- Or comme $\lambda(\theta) > 0$, on peut considérer $\dfrac{1}{\lambda(\theta)}$ comme la dérivée seconde d'une fonction $\Phi(\theta)$ telle que :

$$\frac{\partial \log p_\theta(x)}{\partial \theta} = \frac{\partial^2 \Phi(\theta)}{\partial \theta^2}\left[h(x) - \theta\right]$$

$$\frac{1}{\lambda(x)} = \int_{-\infty}^{+\infty} p_\theta(x)\left[\frac{\partial \ln p_\theta(x)}{\partial \theta}\right]^2 dx = E\left[\left[\frac{\partial \ln p_\theta(x)}{\partial \theta}\right]^2\right] = \frac{\partial^2 \Phi(\theta)}{\partial \theta^2}$$

- dont on déduit que la quantité suivante est indépendante de θ:

$$\ell(x) = \log p_\theta(x) - \frac{\partial \Phi(\theta)}{\partial \theta}\left[h(x) - \theta\right] - \Phi(\theta)$$

- Une **densité distinguée** sera donc de la forme :

$$p_\theta(x) = e^{\frac{\partial \Phi(\theta)}{\partial \theta}\left[h(x) - \theta\right] + \Phi(\theta) + \ell(x)}$$ avec $$\int_{-\infty}^{+\infty} p_\theta(x)dx = 1$$

- Ces 2 conditions sont suffisantes

Fréchet montre que ces densités sont forcément des densités exponentielles.
Fréchet remarque que la matrice de Fisher est égale au hessien d'une fonction (fonction caractéristique de Massieu)

This document may not be reproduced, modified, adapted, published, translated, in any way, in whole or in part or disclosed to a third party without the prior written consent of Thales - © Thales 2015 All rights reserved.

THALES

Equation de Clairaut(-Legendre) de la géométrie de l'information découverte par Maurice Fréchet

L'équation de Clairaut(-Legendre) de Maurice Fréchet

- Partant de l'équation: $p_\theta(x) = e^{\frac{\partial\Phi(\theta)}{\partial\theta}[h(x)-\theta]+\Phi(\theta)+\ell(x)}$
- On peut prendre arbitrairement $h(x)$ et $l(x)$ et alors $\Phi(\theta)$ est déterminée par :

$$\int_{-\infty}^{+\infty} e^{\frac{\partial\Phi(\theta)}{\partial\theta}[h(x)-\theta]+\Phi(\theta)+\ell(x)} dx = 1 \quad \Longrightarrow \quad e^{\theta.\frac{\partial\Phi(\theta)}{\partial\theta}-\Phi(\theta)} = \int_{-\infty}^{+\infty} e^{\frac{\partial\Phi(\theta)}{\partial\theta}h(x)+\ell(x)} dx$$

- Si on fixe alors arbitrairement $h(x)$ et $l(x)$ et soit s une variable arbitraire, la fonction suivante sera une fonction positive connue représentée par $e^{\Psi(s)}$:

$$\int_{-\infty}^{+\infty} e^{s.h(x)+\ell(x)} dx = e^{\Psi(s)}$$

- On obtient alors la fonction $\Phi(\theta)$ par l'équation : $\Phi(\theta) = \theta.\frac{\partial\Phi(\theta)}{\partial\theta} - \Psi\left(\frac{\partial\Phi(\theta)}{\partial\theta}\right)$
- Fréchet remarque qu'il s'agit de **l'équation d'Alexis Clairaut**. $\Phi(\theta)$ est donné par la solution singulière de cette équation de Clairaut, qui est unique et s'obtient en éliminant s entre :

$$\Phi = \theta.s - \Psi(s) \quad \text{et} \quad \theta = \frac{\partial\Psi(s)}{\partial s} \quad \text{avec} \quad \Psi(s) = \log\int_{-\infty}^{+\infty} e^{s.h(x)+\ell(x)} dx$$

This document may not be reproduced, modified, adapted, published, translated, in any way, in whole or in part or disclosed to a third party without the prior written consent of Thales - © Thales 2015 All rights reserved.

THALES

THALES

ALEAE GEOMETRIA

Géométrie du hasard

3) La géométrie de l'information pour les familles de densité exponentielles

Blaise Pascal

La borne de Cramer-Rao-Fréchet-Darmois et la métrique de Fisher

- La borne Cramer-Rao –Fréchet-Darmois a été introduite par Fréchet en 1939 et par Rao en 1945 comme l'inverse de la matrice de Fisher : $I(\theta)$

$$R_{\hat{\theta}} = E\left[\left(\theta-\hat{\theta}\right)\left(\theta-\hat{\theta}\right)^{+}\right] \geq I(\theta)^{-1} \qquad [I(\theta)]_{i,j} = -E\left[\frac{\partial^2 \log p_\theta(z)}{\partial\theta_i \partial\theta_j^*}\right]$$

- Rao a proposé d'introduire une métrique Riemannienne dans l'espace des paramètres des densités de probabilité (axiomatisé par N. Chentsov):

$$ds_\theta^2 = Kullback_Divergence\left(p_\theta(z), p_{\theta+d\theta}(z)\right)$$

$$ds_\theta^2 = -\int p_\theta(z) \log \frac{p_{\theta+d\theta}(z)}{p_\theta(z)} dz$$

$$w = W(\theta)$$

$$\Rightarrow ds_w^2 = ds_\theta^2$$

$$ds_\theta^2 \underset{Taylor}{\approx} \sum_{i,j} g_{ij} d\theta_i d\theta_j^* = \sum_{i,j} [I(\theta)]_{i,j} d\theta_i d\theta_j^* = d\theta^{+}.I(\theta).d\theta$$

This document may not be reproduced, modified, adapted, published, translated, in any way, in whole or in part or disclosed to a third party without the prior written consent of Thales - © Thales 2015 All rights reserved.

THALES

Distance entre gaussiennes au sens de la géométrie de l'information

Matrice de Fisher de l'Information pour le cas gaussien:

$$I(\theta)=\begin{bmatrix}\frac{1}{\sigma^2} & 0\\ 0 & \frac{2}{\sigma^2}\end{bmatrix} \quad \text{avec} \quad E\left[\left(\theta-\hat{\theta}\right)\left(\theta-\hat{\theta}\right)^T\right]\geq I(\theta)^{-1} \quad \text{et} \quad \theta=\begin{pmatrix}m\\ \sigma\end{pmatrix}$$

- Fisher matrix induced the following differential metric :

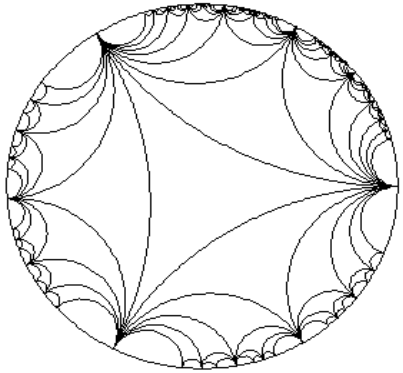
$$ds^2=d\theta^T.I(\theta).d\theta=\frac{dm^2}{\sigma^2}+2.\frac{d\sigma^2}{\sigma^2}=\frac{2}{\sigma^2}\left[\left(\frac{dm}{\sqrt{2}}\right)^2+(d\sigma)^2\right]$$

- Modèle de géométrie hyperbolique de Poincaré

$$z=\frac{m}{\sqrt{2}}+i.\sigma \qquad \omega=\frac{z-i}{z+i} \quad (|\omega|<1)$$

$$\Rightarrow ds^2=8.\frac{|d\omega|^2}{\left(1-|\omega|^2\right)^2}$$

La géométrie paramètres des gaussiennes est la géométrie du disque de Poincaré



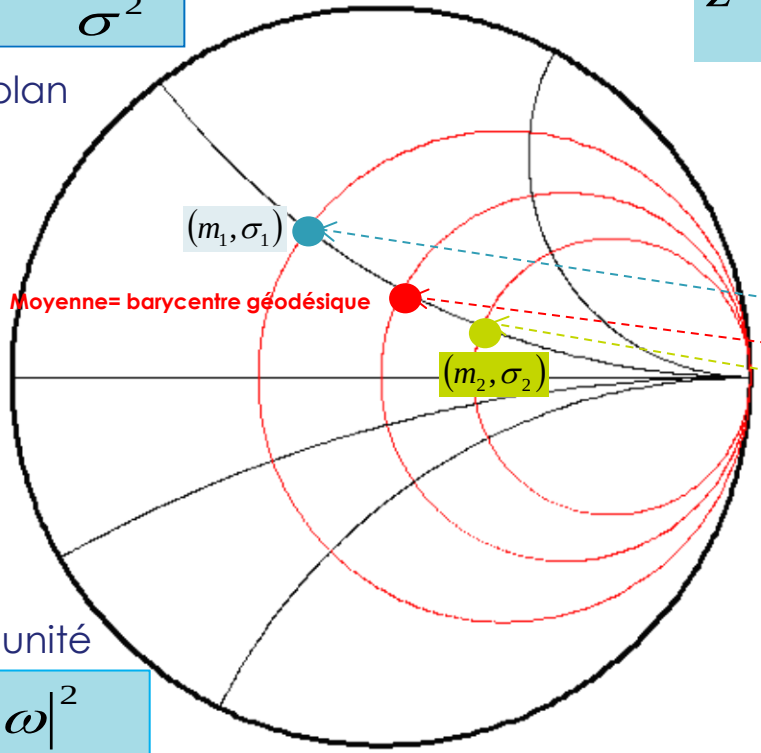
This document may not be reproduced, modified, adapted, published, translated, in any way, in whole or in part or disclosed to a third party without the prior written consent of Thales - © Thales 2015 All rights reserved.

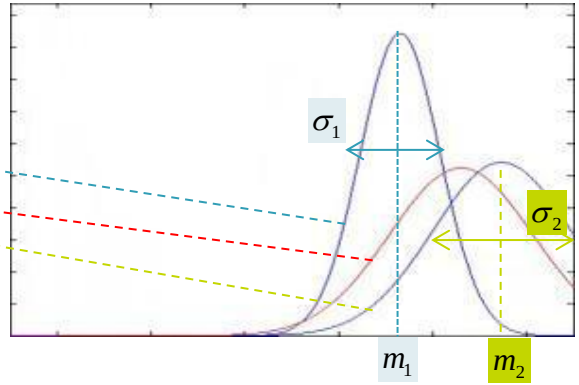
1 gaussiennes monovarié = 1 point dans le disque de Poincaré

$$ds^2 = \frac{dm^2}{\sigma^2} + 2.\frac{d\sigma^2}{\sigma^2}$$

Métrique demi-plan

$$z = \frac{m}{\sqrt{2}} + i.\sigma \qquad \omega = \frac{z-i}{z+i} \quad (|\omega| < 1)$$





Métrique disque unité

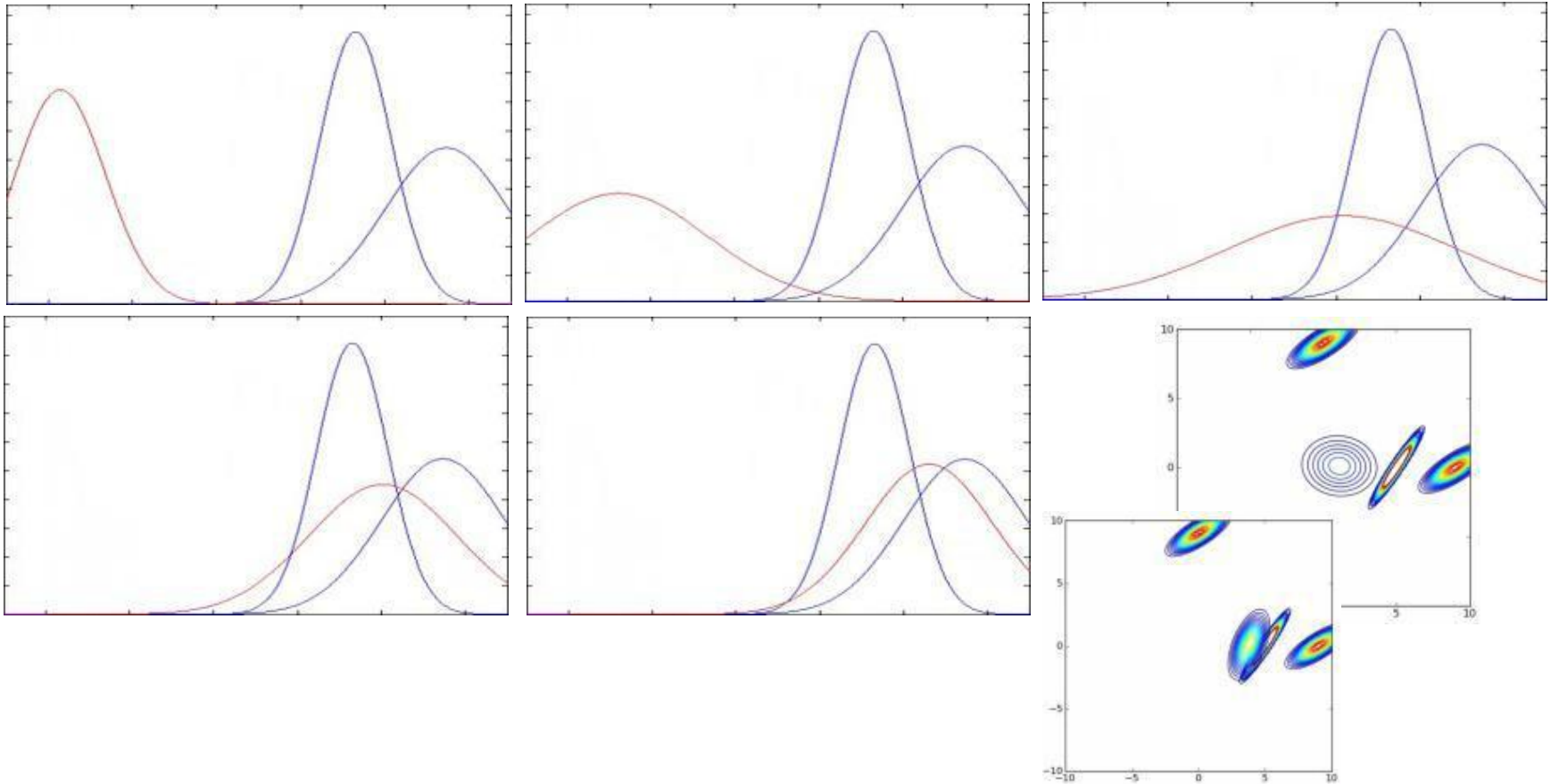
$$ds^2 = 8.\frac{|d\omega|^2}{\left(1-|\omega|^2\right)^2}$$

$$d^2(\{m_1,\sigma_1\},\{m_2,\sigma_2\}) = 2.\left(\log\frac{1+\delta(\omega^{(1)},\omega^{(2)})}{1-\delta(\omega^{(1)},\omega^{(2)})}\right)^2$$

avec $\delta(\omega^{(1)},\omega^{(2)}) = \left|\frac{\omega^{(1)}-\omega^{(2)}}{1-\omega^{(1)}\omega^{(2)*}}\right|$

This document may not be reproduced, modified, adapted, published, translated, in any way, in whole or in part or disclosed to a third party without the prior written consent of Thales - © Thales 2015 All

Barycentre de Fréchet entre gaussienne =barycentre dans le disque (voir flot de Karcher dans le disque unité précédent)

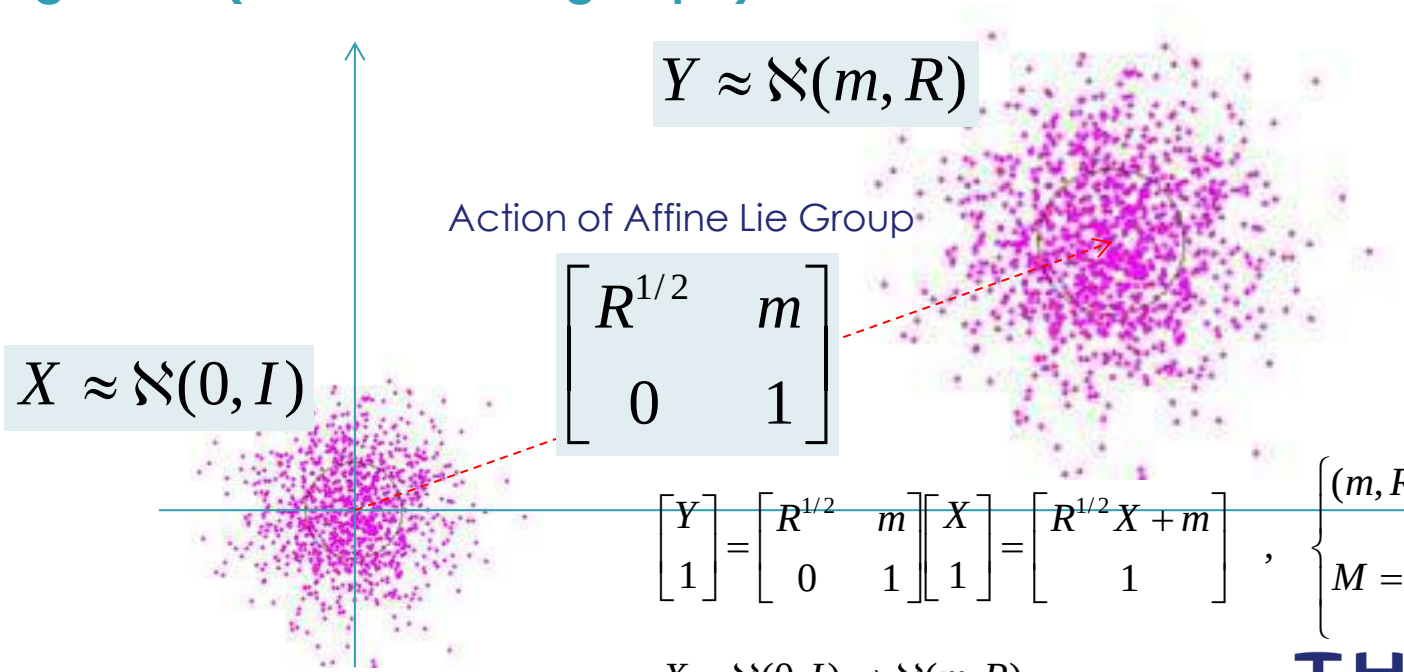


This document may not be reproduced, modified, adapted, published, translated, in any way, in whole or in part or disclosed to a third party without the prior consent of Thales - © Thales 2015 All rights reserved.

THALES

Quel est le groupe qui agit pour les densités multivariées gaussiennes

- La racine carrée de la matrice de covariance R symétrique définie positive est donnée par la factorisation de Cholesky $R = LL^T = R^{1/2}\left(R^{1/2}\right)^T$ qui fait apparaître une matrice triangulaire avec des éléments positifs sur la diagonale (élément d'un groupe)



$$\begin{bmatrix} Y \\ 1 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} R^{1/2} & m \\ 0 & 1 \end{bmatrix}\begin{bmatrix} X \\ 1 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} R^{1/2}X + m \\ 1 \end{bmatrix}, \quad \begin{cases} (m, R) \in Sym(n) \times R^n \\ M = \begin{bmatrix} R^{1/2} & m \\ 0 & 1 \end{bmatrix} \in G_{aff} \end{cases}$$

$$X \approx \aleph(0, I) \rightarrow \aleph(m, R)$$

This document may not be reproduced, modified, adapted, published, translated, in any way, in whole or in part or disclosed to a third party without the prior written consent of Thales - © Thales 2015 All rights reserved.

THALES

Géométrie de l'Information pour une gaussienne multivariée

La métrique de Fisher pour une gaussienne multivariée (m, R)

$$ds^2 = \sum_{ij} g_{ij} d\theta_i d\theta_j = dm^T R^{-1} dm + \frac{1}{2} Tr\left[\left(R^{-1} dR\right)^2\right]$$

Les géodésiques sont données par les équations d'Euler-Lagrange

$$\sum_{i=1}^{n} g_{ik} \ddot{\theta}_i + \sum_{i,j=1}^{n} \Gamma_{ijk} \dot{\theta}_i \dot{\theta}_j = 0 \quad , \quad k = 1, \ldots, n$$

avec $\Gamma_{ijk} = \frac{1}{2}\left[\frac{\partial g_{jk}}{\partial \theta_i} + \frac{\partial g_{jk}}{\partial \theta_j} + \frac{\partial g_{ij}}{\partial \theta_k}\right]$

$$\Rightarrow \begin{cases} \ddot{R} + \dot{m}\dot{m}^T - \dot{R} R^{-1} \dot{R} = 0 \\ \ddot{m} - \dot{R} R^{-1} \dot{m} = 0 \end{cases}$$

Avec les symétries, les invariants (invariant de Noether ou application moment de Souriau) réduisent les équations à celles d'Euler-Poincaré:

$$\frac{d\Pi_R}{dt} = \begin{bmatrix} \frac{d\left(R^{-1}\dot{R} + R^{-1}\dot{m}m^T\right)}{dt} & \frac{d\left(R^{-1}\dot{m}\right)}{dt} \\ 0 & 0 \end{bmatrix} = 0 \Rightarrow \begin{cases} R^{-1}\dot{R} + R^{-1}\dot{m}m^T = B = cste \\ R^{-1}\dot{m} = b = cste \end{cases}$$

$$\Rightarrow \begin{cases} \dot{m} = Rb \\ \dot{R} = R\left(B - bm^T\right) \end{cases}$$

y not be reproduced, modified, adapted, published, translated, in any way, in whole or in
o a third party without the prior written consent of Thales - © Thales 2015 All rights reserved.

Tirs géodésiques pour calculer les distances entre 2 gaussiennes multivariées

Principe du tir géodésique:

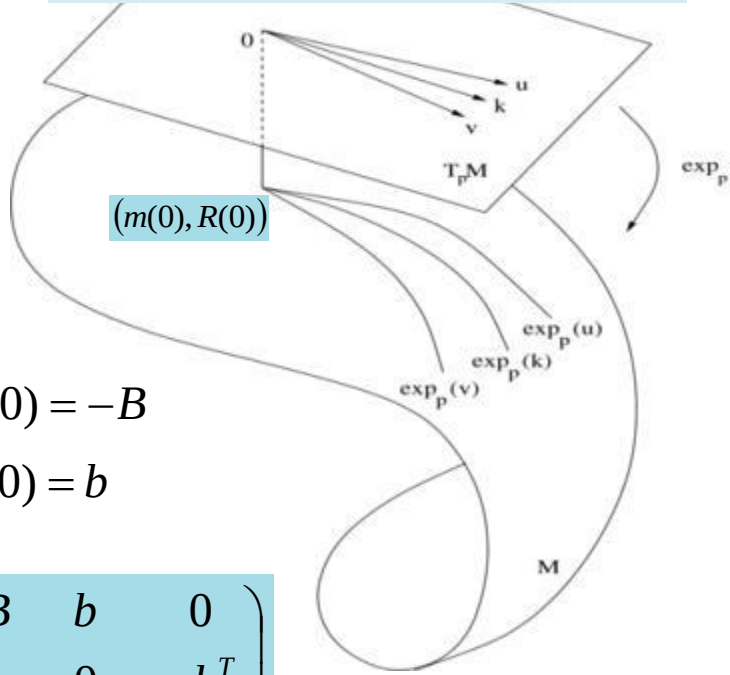
- Fixer un vecteur tangent au point $(m(0), R(0))$
- Corriger le tir, par transport parallèle de l'erreur
- Après convergence la distance est

$$d = \sqrt{\dot{m}(0)^T R^{-1}(0)\dot{m}(0) + \frac{1}{2} Tr\left[\left(R^{-1}(0)\dot{R}(0)\right)^2\right]}$$

$$\begin{cases} \Delta(t) = R^{-1}(t) \\ \delta(t) = R^{-1}(t)m(t) \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} \dot{\Delta} = -B\Delta + bm^T \\ \dot{\delta} = -B\delta + \left(1 + \delta^T \Delta^{-1}\delta\right)b \\ \Delta(0) = I_p, \delta(0) = 0 \end{cases} \text{ with } \begin{cases} \dot{\Delta}(0) = -B \\ \dot{\delta}(0) = b \end{cases}$$

$$\Lambda(t) = \exp(tA) = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{(tA)^n}{n!} = \begin{pmatrix} \Delta & \delta & \Phi \\ \delta^T & \varepsilon & \gamma^T \\ \Phi^T & \gamma & \Gamma \end{pmatrix} \text{ with } A = \begin{pmatrix} -B & b & 0 \\ b^T & 0 & -b^T \\ 0 & -b & B \end{pmatrix}$$

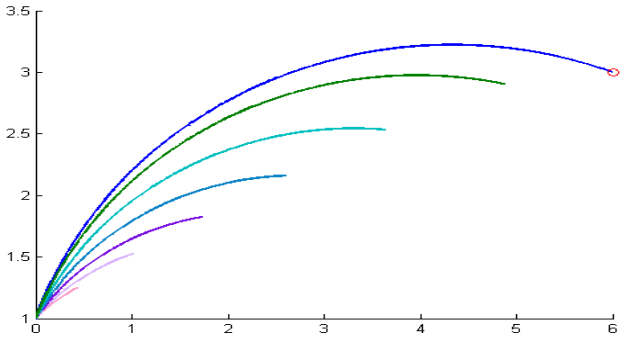
Equations d'Euler - Poincaré $\begin{cases} \dot{m} = Rb \\ \dot{R} = R\left(B - bm^T\right) \end{cases}$



This document may not be reproduced, modified, adapted, published, translated, in any way, in whole or in part or disclosed to a third party without the prior written consent of Thales - © Thales 2015 All rights reserved.

THALES

Tirs géodésiques pour calculer les distances entre 2 gaussiennes multivariées



Principe de corrections du tir géodésique

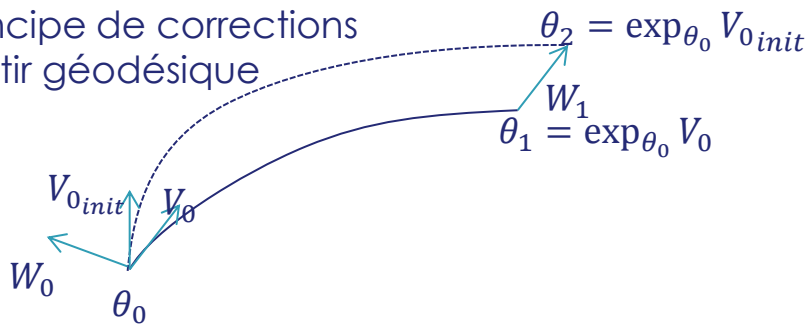
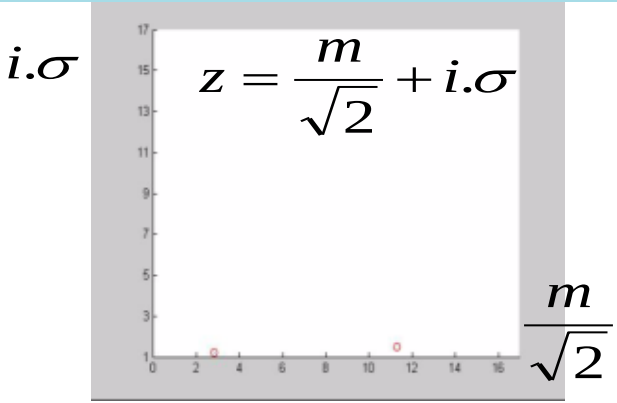
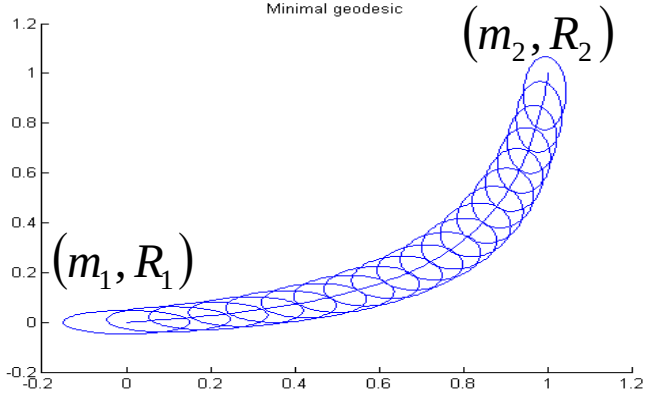


Illustration du tir géodésique pour des gaussiennes de dimension 1 et 2

Tir dans le demi-plan de Poincaré pour gaussienne dim 1



Géodésique pour gaussienne dim 2



This document may not be reproduced, modified, copied, published, translated, in any way, in whole or in part or disclosed to a third party without the prior written consent of Thales - © Thales 2015 All rights reserved.

THALES

THALES

ALEAE GEOMETRIA

Géométrie du hasard

4) Approche de Jean-Louis Koszul: Les structures élémentaires de la géométrie de l'information liées à l'étude des domaines bornés homogènes

Blaise Pascal

La fonction caractéristique de Koszul et la métrique associée aux cones convexes saillants

- J.L. Koszul a introduit une métrique hessienne affinement invariante sur les cones convexes saillants.

- Ω est un cone convexe dans un espace vectoriel E de dimension finie sur R (un cone convexe est saillant s'il ne contient pas de droite).

- Ω^* est le cone dual de Ω est un cone convexe saillant .

- Soit $d\xi$ la mesure de Lesbegue sur E^* espace dual de E , l'intégrale suivante:

$$\psi_\Omega(x) = \int_{\Omega^*} e^{-\langle \xi, x \rangle} d\xi \quad \forall x \in \Omega$$

est appelée **fonction caractéristique de Koszul**

This document may not be reproduced, modified, adapted, published, translated, in any way, in whole or in part or disclosed to a third party without the prior written consent of Thales - © Thales 2015 All rights reserved.

THALES

Formes de Koszul

1ère forme de Koszul

- **1ère forme de Koszul** α : la 1-forme différentielle

$$\alpha = d\phi_\Omega = d\log\psi_\Omega = d\psi_\Omega / \psi_\Omega$$

est invariante suivant l'ensemble des automorphismes $G = Aut(\Omega)$ de Ω .

Si $x \in \Omega$ et $u \in E$ alors $\langle \alpha_x, u \rangle = -\int_{\Omega^*} \langle \xi, u \rangle . e^{-\langle \xi, x \rangle} d\xi$ et $\alpha_x \in -\Omega^*$

2ème forme de Koszul

- **2ème forme de Koszul** γ : La 2-forme symétrique différentielle

$$\gamma = D\alpha = Dd\log\psi_\Omega$$

est une forme bilinéaire symétrique définie positive sur E invariante sous l'action de $G = Aut(\Omega)$ et $D\alpha > 0$

- La positivité est donnée par l'inégalité de Schwarz et :

$$Dd\log\psi_\Omega(u,v) = \int_{\Omega^*} \langle \xi, u \rangle \langle \xi, v \rangle e^{-\langle \xi, u \rangle} d\xi$$

This document may not be reproduced, modified, adapted, published, translated, in any way, in whole or in part or disclosed to a third party without the prior written consent of Thales - © Thales 2015 All rights reserved.

THALES

Métrique de Koszul

Koszul a montré qu'à partir de cette 2nd forme, il était possible d'introduire une métrique Riemannienne invariante sous l'action des automorphismes du cône:

- **Métrique de Koszul**: $D\alpha$ définit une structure Riemannienne invariante par $Aut(\Omega)$ et la métrique Riemannienne est donnée par : $g = Dd\log\psi_\Omega$

avec
$$\left(Dd\log\psi(x)\right)(u) = \frac{1}{\psi(u)^2}\left[\int_{\Omega^*} F(\xi)^2 d\xi . \int_{\Omega^*} G(\xi)^2 d\xi - \left(\int_{\Omega^*} F(\xi).G(\xi) d\xi\right)^2\right] > 0$$

avec $F(\xi) = e^{-\frac{1}{2}\langle x,\xi\rangle}$ et $G(\xi) = e^{-\frac{1}{2}\langle x,\xi\rangle}\langle u,\xi\rangle$

- On peut en effet montrer la positivité via l'inégalité de Schwarz, $d\log\psi = \frac{d\psi}{\psi}$ et $Dd\log\psi = \frac{Dd\psi}{\psi} - \left(\frac{d\psi}{\psi}\right)^2$

où $\left(d\psi(x)\right)(u) = -\int_{\Omega^*} e^{-\langle x,\xi\rangle}\langle u,\xi\rangle d\xi$ et $\left(Dd\psi(x)\right)(u) = \int_{\Omega^*} e^{-\langle x,\xi\rangle}\langle u,\xi\rangle^2 d\xi$

This document may not be reproduced, modified, adapted, published, translated, in any way, in whole or in part or disclosed to a third party without the prior written consent of Thales - © Thales 2015 All rights reserved.

THALES

Transformée de Legendre de la fonction caractéristique = Entropie

$$\Phi^*(x^*) = \langle x, x^* \rangle - \Phi(x) = -\int_{\Omega^*} \log e^{-\langle \xi, x \rangle}.e^{-\langle \xi, x \rangle} d\xi \,/\, \int_{\Omega^*} e^{-\langle \xi, x \rangle} d\xi + \log \int_{\Omega^*} e^{-\langle \xi, x \rangle} d\xi$$

$$\Phi^*(x^*) = \left[\left(\int_{\Omega^*} e^{-\langle \xi, x \rangle} d\xi \right).\log \int_{\Omega^*} e^{-\langle \xi, x \rangle} d\xi - \int_{\Omega^*} \log e^{-\langle \xi, x \rangle}.e^{-\langle \xi, x \rangle} d\xi \right] / \int_{\Omega^*} e^{-\langle \xi, x \rangle} d\xi$$

$$\Phi^*(x^*) = \left[\log \int_{\Omega^*} e^{-\langle \xi, x \rangle} d\xi - \int_{\Omega^*} \log e^{-\langle \xi, x \rangle}.\frac{e^{-\langle \xi, x \rangle}}{\int_{\Omega^*} e^{-\langle \xi, x \rangle} d\xi} d\xi \right]$$

$$\Phi^*(x^*) = \left[\log \int_{\Omega^*} e^{-\langle \xi, x \rangle} d\xi.\left(\int_{\Omega^*} \frac{e^{-\langle \xi, x \rangle}}{\int_{\Omega^*} e^{-\langle \xi, x \rangle} d\xi} d\xi \right) - \int_{\Omega^*} \log e^{-\langle \xi, x \rangle}.\frac{e^{-\langle \xi, x \rangle}}{\int_{\Omega^*} e^{-\langle \xi, x \rangle} d\xi} d\xi \right] \text{ with } \int_{\Omega^*} \frac{e^{-\langle \xi, x \rangle}}{\int_{\Omega^*} e^{-\langle \xi, x \rangle} d\xi} d\xi = 1$$

$$\Phi^*(x^*) = \left[-\int_{\Omega^*} \frac{e^{-\langle \xi, x \rangle}}{\int_{\Omega^*} e^{-\langle \xi, x \rangle} d\xi}.\log \left(\frac{e^{-\langle \xi, x \rangle}}{\int_{\Omega^*} e^{-\langle \xi, x \rangle} d\xi} \right) d\xi \right]$$

Entropie de Shannon

This document is not to be reproduced, modified, adapted, published, translated, in any way, in whole or in part without the prior written consent of Thales - © Thales 2018. All rights reserved.

THALES

Lien entre métrique de Koszul et métrique de Fisher

- Pour faire le lien avec la métrique de Fisher donnée par $I(x)$, on observe que la dérivée seconde de $\log p_x(\xi)$ est donnée par: $\log p_x(\xi) = -\Phi^*(\xi) = \Phi(x) - \langle x, \xi \rangle$

$$\frac{\partial^2 \log p_x(\xi)}{\partial x^2} = \frac{\partial^2 \left[\Phi(x) - \langle x, \xi \rangle\right]}{\partial x^2} = \frac{\partial^2 \Phi(x)}{\partial x^2}$$

$$\Rightarrow I(x) = -E_\xi\left[\frac{\partial^2 \log p_x(\xi)}{\partial x^2}\right] = -\frac{\partial^2 \Phi(x)}{\partial x^2} = \frac{\partial^2 \log \psi_\Omega(x)}{\partial x^2}$$

- Le hessien du logarithme de la fonction caractéristique de Koszul, nous donne la métrique de Fisher:

$$I(x) = -E_\xi\left[\frac{\partial^2 \log p_x(\xi)}{\partial x^2}\right] = \frac{\partial^2 \log \psi_\Omega(x)}{\partial x^2} = E_\xi\left[\xi^2\right] - E_\xi\left[\xi\right]^2 = Var(\xi)$$

This document may not be reproduced, modified, adapted, published, translated, in any way, in whole or in part or disclosed to a third party without the prior written consent of Thales - © Thales 2015 All rights reserved.

THALES

Schéma de Koszul et la géométrie de l'Information

$\langle .,. \rangle$ produit de dualité à partir de la forme de Cartan - Killing :

$$\langle \hat{\xi}, \beta \rangle = -B(\hat{\xi}, \theta(\beta)) \quad \text{et} \quad B(\hat{\xi}, \theta(\beta)) = Tr(ad_{\hat{\xi}} ad_{\theta(\beta)})$$

$$S(\hat{\xi}) = \langle \hat{\xi}, \beta \rangle - \Phi(\beta)$$

$$S(\hat{\xi}) = -\int_{\Omega^*} p_{\hat{\xi}}(\xi) \log p_{\hat{\xi}}(\xi).d\xi$$

Transformée de Legendre

$$\Phi(\beta) = -\log \psi_\Omega(\beta)$$

$$\text{et} \quad \psi_\Omega(\beta) = \int_{\Omega^*} e^{-\langle \beta, \xi \rangle} d\xi$$

$$p_{\hat{\xi}}(\xi) = \frac{e^{-\langle \Theta^{-1}(\hat{\xi}), \xi \rangle}}{\int_{\Omega^*} e^{-\langle \Theta^{-1}(\hat{\xi}), \xi\xi \rangle}.d\xi} \qquad \hat{\xi} = \Theta(\beta) = \frac{\partial \Phi(\beta)}{\partial \beta}$$

$$\beta = \frac{\partial S(\hat{\xi})}{\partial \hat{\xi}}$$

$$I(\beta) = -E\left[\frac{\partial^2 \log p_\beta(\xi)}{\partial \beta^2}\right]$$

$$I(\beta) = -\frac{\partial^2 \Phi(\beta)}{\partial \beta^2} = \frac{\partial^2 \log \psi_\Omega(\beta)}{\partial \beta^2}$$

$$ds_g^2 = \sum_{ij} g_{ij} d\beta_i d\beta_j$$

$$\text{et} \quad g_{ij} = \left[\frac{\partial^2 \Phi(\beta)}{\partial \beta^2}\right]_{ij}$$

$$ds_g^2 = ds_h^2$$

$$ds_h^2 = \sum_{ij} h_{ij} d\hat{\xi}_i d\hat{\xi}_j$$

$$\text{with} \quad h_{ij} = \left[\frac{\partial^2 S(\hat{\xi})}{\partial \hat{\xi}^2}\right]_{ij}$$

This document may not be reproduced, modified, adapted, published, translated, in any way, in whole or in part or disclosed to a third party without the prior written consent of Thales - © Thales 2015 All rights reserved.

THALES

Densité de Koszul pour les matrices symétriques définies positives

Si on applique la formule de Koszul:

$$p_{\bar{\xi}}(\xi) = \frac{e^{-\left\langle \xi, \Theta^{-1}(\bar{\xi}) \right\rangle}}{\int_{\Omega^*} e^{-\left\langle \xi, \Theta^{-1}(\bar{\xi}) \right\rangle} . d\xi}, \quad \bar{\xi} = \Theta(\beta) = \frac{\partial \Phi(\beta)}{\partial \beta}$$

$$\Phi(\beta) = -\log \psi_\Omega(\beta)$$

$$\text{avec} \quad \psi_\Omega(\beta) = \int_{\Omega^*} e^{-\langle \beta, \xi \rangle} d\xi$$

$$\langle \eta, \xi \rangle = Tr\left(\eta^T \xi\right), \quad \forall \eta, \xi \in Sym(n)$$

$$\psi_\Omega(\beta) = \int_{\Omega^*} e^{-\langle \beta, \xi \rangle} d\xi = \det(\beta)^{-\frac{n+1}{2}} \psi_\Omega(I_d)$$

Application:

$$\bar{\xi} = \frac{\partial \Phi(\beta)}{\partial \beta} = \frac{\partial(-\log \psi_\Omega(\beta))}{\partial \beta} = \frac{n+1}{2} \beta^{-1}$$

La densité à Maximum d'Entropie (équivallent de la loi gaussienne mais pour les matrices symétriques définies positives):

$$p_{\bar{\xi}}(\xi) = e^{-\left\langle \Theta^{-1}(\bar{\xi}), \xi \right\rangle + \Phi\left(\Theta^{-1}(\bar{\xi})\right)} = \psi_\Omega(I_d) . \det\left(\alpha \bar{\xi}^{-1}\right) . e^{-Tr\left(\alpha \bar{\xi}^{-1} \xi\right)} \quad \text{avec} \quad \alpha = \frac{n+1}{2}$$

This document may not be reproduced, modified, adapted, published, translated, in any way, in whole or in part or disclosed to a third party without the prior written consent of Thales - © Thales 2015 All rights reserved.

THALES

Géométrie de l'Information pour une gaussienne multivariée

- Pour la densité Gaussienne multivariée de moyenne m et de matrice de covariance R, nous avons pris l'habitude de la paramétrée par:

$$p_{m,R}(z) = \frac{1}{(2\pi)^{n/2}\det(R)^{1/2}} e^{-\frac{1}{2}(z-m)^T R^{-1}(z-m)}$$

- Mais la bonne paramétrisation est la suivante:

$$p_{\bar{\xi}}(\xi) = \frac{1}{\int_{\Omega^*} e^{-\langle \xi,\beta \rangle}.d\xi} e^{-\langle \xi,\beta \rangle} \quad \text{avec } \xi = \begin{bmatrix} z \\ zz^T \end{bmatrix} \text{ et } \beta = \begin{bmatrix} -R^{-1}m \\ \frac{1}{2}R^{-1} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} a \\ H \end{bmatrix}$$

$$\text{Dualité donnée par } \langle \xi, \beta \rangle = a^T z + z^T H z = Tr\left[za^T + H^T zz^T \right]$$

$$\log\left(\int_{\Omega^*} e^{-\langle \xi,\beta \rangle}.d\xi \right) = \log(Z) = n\log(2\pi) + \frac{1}{2}\log\det(R) + \frac{1}{2} m^T R^{-1} m$$

This document may not be reproduced, modified, adapted, published, translated, in any way, in whole or in part or disclosed to a third party without the prior written consent of Thales - © Thales 2015 All rights reserved.

THALES

Géométrie de l'Information pour une gaussienne multivariée

Fonction caractéristique de Massieu:

$$\psi_\Omega(\beta) = \int_{\Omega^*} e^{-\langle \xi, \beta \rangle}.d\xi \quad \text{et} \quad \beta = \begin{bmatrix} -R^{-1}m \\ \frac{1}{2}R^{-1} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} a \\ H \end{bmatrix}$$

$$\Phi(\beta) = -\log \psi_\Omega(\beta) = \frac{1}{2}\left[-Tr\left[H^{-1}aa^T\right] + \log\left[(2)^n \det H\right] - n\log(2\pi)\right]$$

Relation de la dérivée donnant le moment

$$\frac{\partial \Phi(\beta)}{\partial \beta} = \int_{\Omega^*} \xi.p_{\bar{\xi}}(\xi)d\xi = \bar{\xi} = \begin{bmatrix} E[z] \\ E[zz^T] \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} m \\ R + mm^T \end{bmatrix}$$

$$\text{avec} \quad \xi = \begin{bmatrix} z \\ zz^T \end{bmatrix} \quad \text{et} \quad R = E\left[(z-m)(z-m)^T\right] = E\left[zz^T\right] - mm^T$$

This document may not be reproduced, modified, adapted, published, translated, in any way, in whole or in part or disclosed to a third party without the prior written consent of Thales - © Thales 2015 All rights reserved.

THALES

Géométrie de l'Information pour une gaussienne multivariée

Entropie (de Shannon), transformée de Legendre de la fonction

$$S(\bar{\xi}) = \langle \bar{\xi}, \beta \rangle - \Phi(\beta) \quad avec \quad \frac{\partial S(\bar{\xi})}{\partial \bar{\xi}} = \beta = \begin{bmatrix} a \\ H \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} -R^{-1}m \\ \frac{1}{2}R^{-1} \end{bmatrix}$$

$$S(\bar{\xi}) = -\int_{\Omega^*} \frac{e^{-\langle \xi, \beta \rangle}}{\int_{\Omega^*} e^{-\langle \xi, \beta \rangle}.d\xi} \log \frac{e^{-\langle \xi, \beta \rangle}}{\int_{\Omega^*} e^{-\langle \xi, \beta \rangle}.d\xi}.d\xi = -\int_{\Omega^*} p_{\bar{\xi}}(\xi) \log p_{\bar{\xi}}(\xi).d\xi$$

Expression de l'Entropie (de Shannon):

$$S(\bar{\xi}) = \frac{1}{2}\left[\log(2)^n \det\left[H^{-1}\right] + n\log(2\pi.e)\right] = \frac{1}{2}\left[\log\det[R] + n\log(2\pi.e)\right]$$

This document may not be reproduced, modified, adapted, published, translated, in any way, in whole or in part or disclosed to a third party without the prior written consent of Thales - © Thales 2015 All rights reserved.

THALES

La forme hermitienne canonique de Koszul

« Sur la forme hermitienne canonique des espaces homogènes complexes »

- Koszul considère la forme hermitienne d'une variété homogène *G/B* (*G* groupe de Lie connexe et *B* un sous-groupe fermé de *G*, associé, à un facteur constant près, à l'unique volume invariant par *G*, et à la structure complexe invariante par les opérations de *G*). Les domaines bornés homogènes dont le groupe des automorphismes est semi-simple sont alors des domaines bornés symétriques au sens d'Elie Cartan. Koszul y introduit une forme de degré 1 invariante à gauche sur G
- **Théorème de Koszul** : La forme de Kähler de la forme hermitienne canonique a pour image par p^* la différentielles de la forme:

$$-\frac{1}{4}\Psi(X) = -\frac{1}{4}Tr_{g/b}\left(ad\left(JX\right) - Jad(X)\right) \quad , \quad \forall X \in g$$

La projection $p : E \to M$ définit un homomorphisme injectif p^* de l'espace des formes différentielles de *M* dans l'espace des formes différentielles de *E*.

$Tr_{g/b}\Theta$ la trace de l'endomorphisme de *g/b* déduit de Θ par passage au quotient, avec $Tr\Theta = Tr_b\Theta + Tr_{g/b}\Theta$ et $Tr_b\Theta$ la trace de la restriction de Θ à *b*

This document may not be reproduced, modified, adapted, published, translated, in any way, in whole or in part or disclosed to a third party without the prior written consent of Thales - © Thales 2015 All rights reserved.

THALES

Formes de Koszul et espaces homogènes bornés de Poincaré/Siegel

Formes de Koszul

- 1ère forme de Koszul: $\alpha = -\frac{1}{4} d\Psi(X)$

$$\Psi(X) = Tr_{g/b}[ad(JX) - Jad(X)] \quad \forall X \in \mathfrak{g}$$

- 2ème forme de Koasul : $\beta = D\alpha$

Dans le cas du demi-plan supérieur de Poincaré:

$$V = \{z = x + iy \,/\, y > 0\} \qquad Y = y\frac{d}{dy} \qquad \Rightarrow \begin{cases} ad(Y).Z = [Y, Z] \\ [X, Y] = -Y \\ JX = Y \end{cases}$$

avec $X = y\frac{d}{dx}$ et

$$\begin{cases} Tr[ad(JX) - Jad(X)] = 2 \\ Tr[ad(JY) - Jad(Y)] = 0 \end{cases}$$

On en déduit que:

$$\Psi(X) = 2\frac{dx}{y} \Rightarrow \alpha = -\frac{1}{4} d\Psi = -\frac{1}{2}\frac{dx \wedge dy}{y^2}$$

$$\Rightarrow ds^2 = \frac{dx^2 + dy^2}{2y^2} \qquad \Omega = \frac{1}{y^2} dx \wedge dy$$

This document may not be reproduced, modified, adapted, published, translated, in any way, in whole or in part or disclosed to a third party without the prior written consent of Thales - © Thales 2015 All rights reserved.

THALES

Filiation Poincaré/Cartan/Koszul

« Il est clair que si l'on parvenait à démontrer que tous les domaines homogènes dont la forme

$$\Phi = \sum_{i,j} \frac{\partial^2 \log K(z,\bar{z})}{\partial z_i \partial \bar{z}_j} dz_i d\bar{z}_j$$

est définie positive sont symétriques, toute la théorie des domaines bornés homogènes serait élucidée. C'est là un problème de géométrie hermitienne certainement très intéressant »

Dernière phrase de Elie Cartan, dans « Sur les domaines bornés de l'espace de n variables complexes », Abh. Math. Seminar Hamburg, 1935

Henri Poincaré
(demi-plan supérieur)
n=1

Elie Cartan
(classification en 6 classes des domaines bornés homogènes symétriques) n<=3

Carl Ludwig Siegel
(Domaines de Siegel et Géométrie Symplectique)

Lookeng Hua
(Noyaux de Bergman, Cauchy et Poisson des domaines de Siegel

Ernest Vinberg
(Domaines de Siegel de 2nd espèce)

Structure de la géométrie de l'information (Géométrie hessienne de Koszul)

Jean-Louis Koszul
(formes canoniques hermitiennes des espace homogènes complexes, un espace homogène complexe avec une forme canonique hermitienne définies positive est isomorphe à un domaine borné, étude des groupes de transformations affines des variétés localement plates)

La géométrie des structures hessiennes

Les structures élémentaires:

- Structure de Codazzi (D,g), *D* une connexion sans torsion: $(D_X g)(Y,Z)=(D_Y g)(X,Z)$
- Structure hessienne: (D,g) Codazzi avec *D* est plate => structure duale (D',g) avec : $D'=\nabla - D$ (avec ∇ la connexion de Levi-Civita)
- Pour une structure hessienne (D,g) avec $g = Dd\varphi$, $g = D'd\varphi'$ et la structure (D',g) de Codazzi duale est aussi une structure hessienne
- On a la propriété que φ' est la transformée de Legendre de φ : $\varphi' = \sum_i x^i \frac{\partial \varphi}{\partial x^i} - \varphi$
- Une structure hessienne (D,g) est de type Koszul, s'il existe une 1-forme fermée ω telle que $g = D\omega$
- Koszul a introduit une 2-forme, qui joue un rôle similaire au tenseur de Ricci pour une métrique Kählérienne: $\gamma = D\alpha$ avec la 1-forme α , telle que $D_X \upsilon = \alpha(X)\upsilon$ avec l'élément de volume υ , et pour (D',g) : $\alpha' = -\alpha$ et $\gamma' = \gamma - 2\nabla\alpha$
- Pour un cône convexe régulier homogène Ω, la structure hessienne (D,g) est donnée par $g = Dd\psi$ avec les formes de Koszul $\alpha = d\log\psi$ et $\gamma = g$
  L'élément de volume υ est invariant sous l'action des automorphismes de Ω.

This document may not be reproduced, modified, adapted, published, translated, in any way, in whole or in part or disclosed to a third party without the prior written consent of Thales - © Thales 2015 All rights reserved.

THALES

THALES

ALEAE GEOMETRIA

Géométrie du hasard

5) Les fonctions caractéristiques de François Massieu en physique statistique et les fonctions potentielles de la géométrie de l'information

Blaise Pascal

Géométrie de l'Information et Transformée de Legendre

Métriques de la Géométrie de l'Information

$$g^* = d^2\Psi^* = d^2 S$$

$$g = -d^2 \log \Phi = d^2 \Psi$$

ds²=d²ENTROPY

ds²=-d²LOG[LAPLACE]

Transformée de Legendre

$$\Psi^*(x^*) = \langle x, x^* \rangle - \Psi(x)$$

$$\Psi^* = -\int_{\Omega^*} p_x(\xi) \log p_x(\xi) d\xi$$

$$p_x(\xi) = e^{-\langle \xi, x \rangle} / \int_{\Omega^*} e^{-\langle \xi, x \rangle} d\xi = e^{-\langle x, \xi \rangle + \Phi(x)}$$

$$x^* = \frac{d\Psi(x)}{dx} \ , \ x = \frac{d\Psi^*(x^*)}{dx^*}$$

$$x^* = \int_{\Omega^*} \xi . p_x(\xi) d\xi$$

Transformée de Laplace/Fourier

$$\Psi(x) = -\log \Phi(x) = -\log \int_{\Omega^*} e^{-\langle x, y \rangle} dy$$

ENTROPIE= LEGENDRE(- LOG[LAPLACE])

ENTROPIE= FOURIER$_{(Min,+)}$(- LOG[FOURIER$_{(+,x)}$])

This document may not be reproduced, modified, adapted, published, translated, in any way, in whole or in part, nor disclosed to a third party without the prior written consent of Thales - © Thales 2015 All rights reserved.

THALES

Développement et utilisation de la « fonction caractéristique » par le Corps des Mines: Massieu, Poincaré, Levy & Balian

whole or in
hts reserved.
ished, trans
of Thales -
ent may no
losed to a t

1869: François Massieu

- Introduction de la fonction caractéristique en thermodynamique
- Gibbs et Duhem reprennent l'idée pour définir les potentiels thermodynamiques

1908-1912: Henri Poincaré (+ Paul Levy)

- Poincaré réutilise la fonction caractéristique dans son cours de 1908 « Thermodynamique »
- Poincaré introduit la fonction caractéristique dans le cours de 1912 « Calcul des Probabilités »
- Paul Levy généralise l'utilisation de la fonction caractéristique en probabilité

1986: Roger Balian

- Balian introduit la métrique de Fisher Quantique comme hessien de l'Entropie de von Neumann

$$S = \phi - \frac{1}{T}.\frac{\partial \varphi}{\partial\left(1/T\right)} = \phi - \beta.Q \quad \text{(Tr. Legendre)}$$

S: Entropie, ϕ: Fonction caractéristique

« *Je montre, dans ce mémoire, que toutes les propriétés d'un corps peuvent se déduire d'une fonction unique, que j'appelle la fonction caractéristique de ce corps* »
F. Massieu

$$\phi = \log \psi$$

ϕ : *fonction caractéristique* (de Massieu)

ψ : *fonction caractéristique en probabilité*

$$\left.\begin{aligned} S\left(\hat{D}\right) &= F\left(\hat{X}\right) - \left\langle \hat{D}, \hat{X} \right\rangle \\ F\left(\hat{X}\right) &= \log Tr \exp\left(\hat{X}\right) \end{aligned}\right\}$$

$$\Rightarrow ds^2 = -d^2 S = Tr\left[d\hat{D} d \log \hat{D}\right]$$

Le conseil malheureux de Bertrand à Massieu

- Dans sa publication suivante, l'article de François Massieu est revu par Joseph Louis François Bertrand, qui lui donne un **conseil malheureux** de remplacer la variable *1/T* par la variable *T*. Si les équations semblent plus simples, on perd la structure initiale de la transformée de Legendre.

Joseph Louis François Bertrand

(1) Dans le mémoire dont un extrait est inséré aux *Comptes rendus de l'Académie des sciences* du 18 octobre 1869, ainsi que dans la Note additionnelle insérée le 22 novembre suivant, j'avais adopté pour fonction caractéristique $\frac{H}{T}$, ou $S - \frac{U}{T}$; c'est d'après les bons conseils de M. Bertrand que j'y ai substitué la fonction H, dont l'emploi réalise quelques simplifications dans les formules.

- Les fonctions caractéristiques de Massieu sont redécouvertes par Max Planck (1897) et ont été mises en avant que plus récemment par Herbert Callen (1960) et Roger Balian

Max Planck

Herbert Callen

This document may not be reproduced, modified, adapted, published, translated, in any way, in whole or in part or disclosed to a third party without the prior written consent of Thales - © Thales 2015 All rights reserved.

François Jacques Dominique Massieu découvre la « fonction caractéristique » à Rennes

Publications de François Massieu

$$S = \phi - \frac{1}{T} \cdot \frac{\partial \phi}{\partial \left(1/T \right)} = \phi - \beta . U \quad \text{(Tr. Legendre)}$$

S : Entropie, ϕ : Fonction caractéristique

MÉMOIRES

PRÉSENTÉS PAR DIVERS SAVANTS

A L'ACADÉMIE DES SCIENCES

DE L'INSTITUT NATIONAL DE FRANCE.

TOME XXII. — N° 2.

THERMODYNAMIQUE.

MÉMOIRE

SUR

LES FONCTIONS CARACTÉRISTIQUES DES DIVERS FLUIDES ET SUR LA THÉORIE DES VAPEURS,

PAR F. MASSIEU,

INGÉNIEUR DES MINES, PROFESSEUR À LA FACULTÉ DES SCIENCES DE RENNES.

MÉMOIRES PRÉSENTÉS.

THERMODYNAMIQUE. — *Addition au précédent Mémoire sur les fonctions caractéristiques.* Note de M. F. Massieu, présentée par M. Combes.

» Cette conclusion résultait *à posteriori* de la théorie même; mais j'ai reconnu qu'il était possible de l'établir de prime abord par un procédé qui a l'avantage de conduire plus simplement à la connaissance de la fonction caractéristique et de montrer la liaison de cette fonction avec d'autres fonctions déjà introduites dans la science, savoir : l'entropie S et l'énergie ou chaleur interne U. Je rappellerai d'ailleurs qu'une fois la fonction caractéristique d'un corps déterminée, la théorie thermodynamique de ce corps est faite.

$$\boxed{\psi = S - \frac{U}{T}.}$$

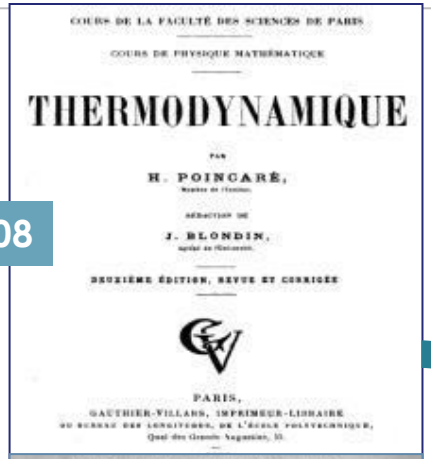
Or, pour avoir S et U, et par suite ψ, il suffit de connaître quelles sont les quantités élémentaires de chaleur dQ qu'il faut fournir au corps suivant un cycle quelconque, pour le faire passer d'un état initial à un état déterminé, et en outre l'accroissement dU de sa chaleur interne pour les différents éléments de ce cycle, ou de tout autre cycle, reliant le même état initial au même état final.

This document may not be reproduced, modified, adapted, published, translated, in any way, in whole or in part or disclosed to a third party without the prior written consent of Thales - © Thales 2015 All rights reserved.

THALES

Henri Poincaré découvre la fonction caractéristique de Massieu

1908


COURS DE LA FACULTÉ DES SCIENCES DE PARIS

COURS DE PHYSIQUE MATHÉMATIQUE

THERMODYNAMIQUE

PAR

H. POINCARÉ,

RÉDACTION DE

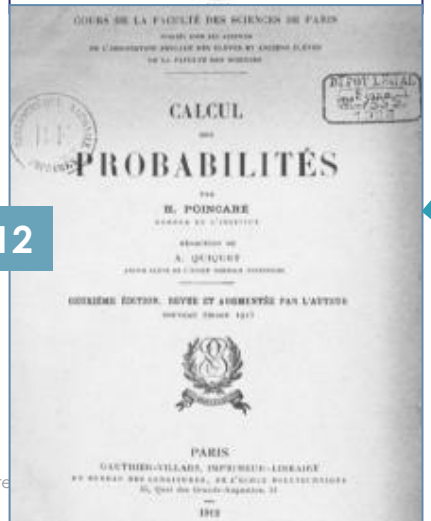
J. BLONDIN,

DEUXIÈME ÉDITION, REVUE ET CORRIGÉE

PARIS,

GAUTHIER-VILLARS, IMPRIMEUR-LIBRAIRE

1912


COURS DE LA FACULTÉ DES SCIENCES DE PARIS

CALCUL

DES

PROBABILITÉS

PAR

H. POINCARÉ

RÉDACTION DE

A. QUIQUET

QUATRIÈME ÉDITION, REVUE ET AUGMENTÉE PAR L'AUTEUR

PARIS

GAUTHIER-VILLARS, IMPRIMEUR-LIBRAIRE

1912

125. Fonctions caractéristiques de M. Massieu. — Le théorème de Clausius nous a conduit à l'introduction d'une nouvelle fonction de l'état d'un système : son entropie S.

Si donc nous prenons comme variables indépendantes définissant l'état du système la pression p et le volume spécifique v, nous aurons à considérer, dans les applications, trois fonctions de ces variables : la température T, l'énergie interne U et l'entropie S.

M. Massieu a montré que, si l'on fait choix pour variables indépendantes de v et de T ou de p et de T, il existe une fonction, d'ailleurs inconnue, de laquelle les trois fonctions des variables, p, U et S dans le premier cas, v, U et S dans le second, peuvent se déduire facilement. M. Massieu a donné à cette fonction, dont la forme dépend du choix des variables, le nom de *fonction caractéristique.*

Puisque des fonctions de M. Massieu on peut déduire les autres fonctions des variables, toutes les équations de la Thermodynamique pourront s'écrire de manière à ne plus renfermer que ces fonctions et leurs dérivées ; il en résultera donc, dans certains cas, une grande simplification. Nous verrons bientôt une application importante de ces fonctions.

This document may not be reproduced, modified, adapted, published, translated, in any way, in whole or in part or disclosed to a third party without the prior written consent of Thales - © Thales 2015 All rights reserved.

THALES

Henri Poincaré introduit la fonction caractéristique en Probabilité

Fonction caractéristique en probabilité

- Henri Poincaré introduit la « fonction caractéristique » en probabilité dans son cours de 1912 (inspiré par l'idée de Massieu; les 2 sont reliées par un logarithme)
- Elle est ***introduite avec une transformée de Laplace***
- la fonction caractéristique d'une variable aléatoire réelle ***détermine de façon unique sa loi de probabilité***.
- Les valeurs en zéro des dérivées successives de la fonction caractéristique permettent de calculer les moments de la variable aléatoire.
- la seconde fonction caractéristique qui en est la transformée logarithmique, est ***la fonction génératrice des cumulants***.
- Les **cumulants** ont été définis en 1889 par l'astronome, mathématicien et actuaire danois **Thorvald Nicolai Thiele** (1838 - 1910). Thiele les appelle alors **half-invariants** (demi-invariants).

Fonctions caractéristiques. — J'appelle *fonction caractéristique* $f(\alpha)$ la valeur probable de $e^{\alpha x}$; on aura donc

$$f(\alpha) = \sum p\, e^{\alpha x},$$

si la quantité x varie d'une manière discontinue et peut prendre seulement un nombre fini de valeurs, et

$$\boxed{f(\alpha) = \int \varphi(x)\, e^{\alpha x}\, dx,}$$

si x varie d'une manière continue et si $\varphi(x)$ représente la loi de probabilité. Il est clair que

$$f(\alpha) = 1 + \frac{\alpha}{1!}(x) + \frac{\alpha^2}{1.2}(x^2) + \frac{\alpha^3}{1.2.3}(x^3) + \ldots,$$

(x^p) désignant la valeur probable de x^p. On voit que $f(0) = 1$.

La fonction caractéristique suffit pour définir la loi de probabilité. On a en effet par la formule de Fourier

$$f(i\alpha) = \int_{-\infty}^{+\infty} \varphi(x)\, e^{i\alpha x}\, dx,$$

$$2\pi\varphi(x) = \int_{-\infty}^{+\infty} f(i\alpha)\, e^{-i\alpha x}\, d\alpha.$$

Si deux quantités x et y sont *indépendantes* et si $f(\alpha)$, $f_1(\alpha)$ sont les fonctions caractéristiques correspondantes, la fonction relative à $x+y$ sera le produit $f(\alpha) f_1(\alpha)$. En effet, comme nous l'avons vu au paragraphe 130, la valeur probable du produit $e^{\alpha(x+y)}$ sera le produit des valeurs probables de $e^{\alpha x}$ et $e^{\alpha y}$.

This document may not be reproduced, modified, adapted, published, translated, in any way, in whole or in part or disclosed to a third party without the prior written consent of Thales - © Thales 2015 All rights reserved.

THALES

La Structure fondamentale de la géométrie de l'information quantique de Roger Balian

Transformée de Legendre

$$S(\hat{D}) = F(\hat{X}) - \left\langle \hat{D}, \hat{X} \right\rangle$$

Entropie de von Neumann

$$S = -Tr\left[\hat{D}\log(\hat{D})\right]$$

Fonction caractéristique

$$F(\hat{X}) = \log Tr \exp \hat{X}$$

Densité à Maximum d'Entropie

$$\hat{D} = \frac{\exp \hat{X}}{Tr \exp \hat{X}}$$

Métrique de Balian de la géométrie de l'Information Quantique (1986)

$$ds^2 = -d^2 S = Tr\left[d\hat{D}.d\log\hat{D}\right]$$

This document may not be reproduced, adapted, published, translated, in any way, in whole or in part or disclosed to a third party without written consent of Thales - © Thales 2015 All rights reserved.

THALES

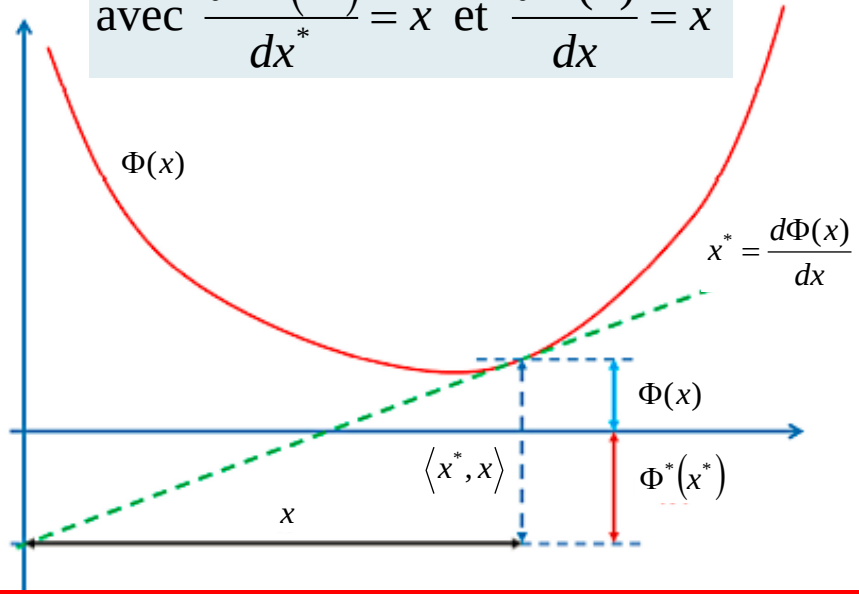
Signification intuitive de la transformée de Legendre

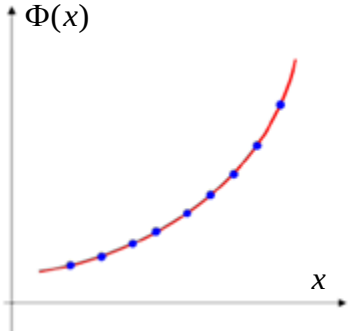
Transformée de Legendre

- La transformée de Legendre transforme une fonction définie par sa valeur en un point en une fonction définie par sa tangente.
- se rencontre en thermodynamique et en mécanique lagrangienne

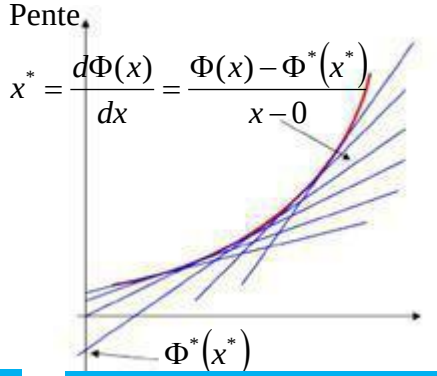
$$\Phi^*(x^*) = \langle x^*, x \rangle - \Phi(x)$$

$$\text{avec } \frac{d\Phi^*(x^*)}{dx^*} = x \text{ et } \frac{d\Phi(x)}{dx} = x^*$$





Géométrie classique
(la courbe est représentée par un continuum de points)



Géométrie de Plücker
(la courbe est définie par l'enveloppe de ses tangentes)

Transformée de Legendre est l'équivalent d'une transformée de Fourier pour les fonctions convexes (elle met en dualité)
Brenier, Yann. Un algorithme rapide pour le calcul de transformées de Legendre-Fenchel discrètes, C. R. Acad. Sci. Paris Sér. I Math. 308 (1989), no. 20, 587–589.

This document may not be reproduced, modified, adapted, published, translated, in any way, in whole or in part or disclosed to a third party without the prior written consent of Thales - © Thales 2015 All rights reserved.

Transformée de Legendre, 1787

1787, Adrien-Marie Legendre, “Mémoire sur l’intégration de quelques équations aux différences partielles”.

- Adrien-Marie Legendre a introduit la transformée de Legendre pour résoudre un problème de surface minimale posé par Gaspard Monge (Monge avait demandé à Legendre de consolider sa démonstration).
- Legendre précise “***J’y suis parvenu simplement par un changement de variables qui peut être utile dans d’autres occasions***”.

Legendre, A.M. Mémoire Sur L’intégration de Quelques Equations aux Différences Partielles; Mémoires de l’Académie des Sciences: Paris, France, 1787; pp. 309–351.

DES SCIENCES. 309

MÉMOIRE
SUR
L'INTÉGRATION DE QUELQUES ÉQUATIONS
AUX DIFFÉRENCES PARTIELLES.

Par M. LE GENDRE.

(I.)

De l'Équation de la moindre Surface.

ON ſait, d'après M. de la Grange, que la ſurface la moindre entre des limites données, a pour équation différentielle

$$(1+q^2)\frac{ddz}{dx^2} - 2pq\frac{ddz}{dxdy} + (1+p^2)\frac{ddz}{dy^2} = 0,$$

en faiſant, pour abréger, $\frac{dz}{dx} = p$, $\frac{dz}{dy} = q$. M. Monge a tenté d'intégrer cette équation dans les Mémoires de l'Académie de 1784; mais l'intégrale qu'il a donnée *(page 149)* n'étant pas à l'abri de toute objection, attendu que les ſignes

Lorſque la valeur de ω ſera connue, il eſt clair qu'on aura celles de x, y, z, exprimées en p & q; ſavoir,

$$x = \frac{d\omega}{dp},\ y = \frac{d\omega}{dq},$$
$$z = px + qy - \omega.$$

This document may not be reproduced, modified, adapted, published, translated, in any way, in whole or in part or disclosed to a third party without the prior written consent of Thales - © Thales 2015 All rights reserved.

THALES

Interprétation géométrique de la transformée de Legendre: Polaire réciproque par rapport à un paraboloïde

- Darboux donne dans son livre une interprétation de Chasles : « Ce qui revient suivant une remarque de M. Chasles, à substituer à la surface sa polaire réciproque par rapport à un paraboloïde »
- Considérons la surface donnée par : $z = f(x, y)$ avec $p = \dfrac{\partial z}{\partial x}$ et $q = \dfrac{\partial z}{\partial y}$
- Considérons l'équation du paraboloïde: $x^2 + y^2 = 2z$
- Les coordonnées de la polaire réciproque par rapport au paraboloïde : X, Y, Z
- Le plan polaire par rapport à ce paraboloïde de la polaire réciproque :

$$Xx + Yy - z - Z = 0$$

doit être égale au plan tangent de la surface au point : (x_0, y_0, z_0)

$$z - z_0 = p_0(x - x_0) + q_0(y - y_0) \Rightarrow p_0 x + q_0 y - z - (p_0 x_0 + q_0 y_0 - z_0) = 0$$

- En égalant terme à terme, on obtient:

$$X = p_0 \ , \ Y = q_0 \ , \ Z = p_0 x_0 + q_0 y_0 - z_0$$

qui est la transformée de **Legendre**

This document may not be reproduced, modified, adapted, published, translated, in any way, in whole or in part or disclosed to a third party without the prior written consent of Thales - © Thales 2015 All rights reserved.

THALES

Pierre Duhem: Les équations générales de la thermodynamique

ÉQUATIONS GÉNÉRALES DE LA THERMODYNAMIQUE,

PAR P. DUHEM,

CHARGÉ D'UN COURS COMPLÉMENTAIRE A LA FACULTÉ DES SCIENCES DE LILLE.

Au premier rang, il convient de citer M. F. Massieu (²); il a obtenu un résultat capital, à savoir que toutes les équations de la Thermodynamique peuvent être écrites au moyen d'une seule *fonction caractéristique* et de ses dérivées partielles, cette fonction changeant d'ailleurs avec les variables indépendantes adoptées.

M. Gibbs (³), dans le Travail célèbre où il a démontré que les fonctions caractéristiques de M. Massieu pouvaient jouer le rôle de potentiels dans la détermination des états d'équilibre du système, a fourni également de profondes idées sur les équations de la Thermodynamique prises sous la forme la plus générale.

M. H. von Helmholtz (¹) a développé de son côté des idées analogues.

Enfin, M. Arthur von Oettingen (²) a donné un exposé de la Thermodynamique d'une remarquable généralité; il a cherché, dans cet exposé, à mettre nettement en évidence le caractère dualistique que présente le développement de la Thermodynamique, caractère déjà marqué par M. Massieu.

(¹) R. CLAUSIUS, *Sur diverses formes des équations fondamentales de la Thermodynamique, qui sont commodes dans l'application* (*Théorie mécanique de la chaleur*. Trad. Folie, Mémoire IX).

(²) F. MASSIEU, *Sur les fonctions caractéristiques* (*Comptes rendus*, t. LXIX, p. 858 et 1057; 1869). — *Mémoire sur les fonctions caractéristiques des divers fluides et sur la théorie des vapeurs* (*Savants étrangers*, t. XXII; 1876).

(³) J. WILLARD GIBBS, *On the equilibrium of heterogeneous substances* (*Transactions of the Connecticut Academy*, t. III; 1875-1876).

(¹) H. VON HELMHOLTZ, *Zur Thermodynamik chemischer Vorgänge* (*Sitzungsber. der Berl. Akademie*, t. I, p. 23; 1882).

(²) ARTHUR VON OETTINGEN, *Die thermodynamischen Beziehungen, autothetisch entwickelt* (*Mémoires de l'Académie de Saint-Pétersbourg*, t. XXIII; 1885).

Duhem développe une théorie générale et généralise la notion de « capacité calorifique » (Souriau va géométriser la notion de capacité). Les théories de Duhem et Souriau sont compatibles

This document may not be reproduced, modified, adapted, published, translated, in any way, in whole or in part or disclosed to a third party without the prior written consent of Thales - © Thales 2015 All rights reserved.

THALES

Pierre Duhem: Les équations générales de la thermodynamique

- P. DUHEM. Commentaire aux principes de la Thermodynamique (Troisième Partie). Journal de mathématiques pures et appliquées 4e série, tome 10 (1894), p. 207-286.

Le potentiel thermodynamique interne. — Soient

$$U(\alpha, \beta, \ldots, \lambda, \mathfrak{S}) \qquad \text{et} \qquad S(\alpha, \beta, \ldots, \lambda, \mathfrak{S})$$

l'énergie interne et l'entropie d'un système.

Posons

$$(1) \qquad \mathfrak{F}(\alpha, \beta, \ldots, \lambda, \mathfrak{S}) = E[U(\alpha, \beta, \ldots, \lambda, \mathfrak{S}) - F(\mathfrak{S})S(\alpha, \beta, \ldots, \lambda, \mathfrak{S})].$$

SECONDE RESTRICTION. — Imaginons qu'à partir d'un certain état $(\alpha, \beta, \ldots, \lambda, \mathfrak{S})$ du système, on lui impose une modification virtuelle

$$\delta\alpha, \quad \delta\beta, \quad \ldots, \quad \delta\lambda, \quad \delta\mathfrak{S}.$$

Les actions des corps extérieurs qui le maintiendraient en équilibre en l'état $(\alpha, \beta, \ldots, \lambda, \mathfrak{S})$ effectuent un travail virtuel

$$A\delta\alpha + B\delta\beta + \ldots + L\delta\lambda + \Theta\delta\mathfrak{S}.$$

$$\begin{cases} A = f_\alpha(\alpha, \beta, \ldots, \lambda, \mathfrak{S}), \\ B = f_\beta(\alpha, \beta, \ldots, \lambda, \mathfrak{S}), \\ \ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots, \\ L = f_\lambda(\alpha, \beta, \ldots, \lambda, \mathfrak{S}), \\ \Theta = f_\mathfrak{S}(\alpha, \beta, \ldots, \lambda, \mathfrak{S}). \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} R_\alpha = \frac{\partial U}{\partial \alpha} - \frac{f_\alpha}{E}, \\ R_\beta = \frac{\partial U}{\partial \beta} - \frac{f_\beta}{E}, \\ \ldots\ldots\ldots\ldots, \\ R_\lambda = \frac{\partial U}{\partial \lambda} - \frac{f_\lambda}{E}, \\ C = \frac{\partial U}{\partial \mathfrak{S}} - \frac{f_\mathfrak{S}}{E}. \end{cases}$$

$$\begin{cases} R_\alpha = \frac{\partial U}{\partial \alpha} - \frac{A}{E}, \\ R_\beta = \frac{\partial U}{\partial \beta} - \frac{B}{E}, \\ \ldots\ldots\ldots\ldots, \\ R_\lambda = \frac{\partial U}{\partial \lambda} - \frac{L}{E}, \\ C = \frac{\partial U}{\partial \mathfrak{S}} - \frac{\Theta}{E}. \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} R_\alpha = F(\mathfrak{S})\frac{\partial S}{\partial \alpha}, \\ R_\beta = F(\mathfrak{S})\frac{\partial S}{\partial \beta}, \\ \ldots\ldots\ldots\ldots, \\ R_\lambda = F(\mathfrak{S})\frac{\partial S}{\partial \lambda}, \\ C = F(\mathfrak{S})\frac{\partial S}{\partial \mathfrak{S}}. \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} A = \frac{\partial \mathfrak{F}}{\partial \alpha}, \\ B = \frac{\partial \mathfrak{F}}{\partial \beta}, \\ \ldots\ldots\ldots, \\ L = \frac{\partial \mathfrak{F}}{\partial \lambda}, \\ \Theta = \frac{\partial \mathfrak{F}}{\partial \mathfrak{S}} + ES\frac{dF(\mathfrak{S})}{d\mathfrak{S}}. \end{cases}$$

$$ES = \frac{1}{\frac{dF(\mathfrak{S})}{d\mathfrak{S}}}\left(\Theta - \frac{\partial \mathfrak{F}}{\partial \mathfrak{S}}\right) \qquad EU = \mathfrak{F} + \frac{F(\mathfrak{S})}{\frac{dF(\mathfrak{S})}{d\mathfrak{S}}}\left(\Theta - \frac{\partial \mathfrak{F}}{\partial \mathfrak{S}}\right)$$

$$\begin{cases} R_\alpha = \frac{F(\mathfrak{S})}{\frac{dF(\mathfrak{S})}{d\mathfrak{S}}}\left(\frac{\partial \theta}{\partial \alpha} - \frac{\partial^2 \mathfrak{F}}{\partial \mathfrak{S}\,\partial \alpha}\right), \\ R_\beta = \frac{F(\mathfrak{S})}{\frac{dF(\mathfrak{S})}{d\mathfrak{S}}}\left(\frac{\partial \theta}{\partial \beta} - \frac{\partial^2 \mathfrak{F}}{\partial \mathfrak{S}\,\partial \beta}\right), \\ \ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots, \\ R_\lambda = \frac{F(\mathfrak{S})}{\frac{dF(\mathfrak{S})}{d\mathfrak{S}}}\left(\frac{\partial \theta}{\partial \lambda} - \frac{\partial^2 \mathfrak{F}}{\partial \mathfrak{S}\,\partial \lambda}\right), \end{cases}$$

$$C = \frac{F(\mathfrak{S})}{\frac{dF(\mathfrak{S})}{d\mathfrak{S}}}\left(\frac{\partial \theta}{\partial \mathfrak{S}} - \frac{\partial^2 \mathfrak{F}}{\partial \mathfrak{S}^2}\right) - \frac{F(\mathfrak{S})F'(\mathfrak{S})}{[F'(\mathfrak{S})]^2}\left(\Theta - \frac{\partial \mathfrak{F}}{\partial \mathfrak{S}}\right)$$

1° *L'expression du potentiel thermodynamique interne du système;*

2° *L'expression*

$$\Theta = f_\mathfrak{S}(\alpha, \beta, \ldots, \lambda, \mathfrak{S})$$

de la quantité Θ *relative au système en équilibre,*

On peut déterminer :

1° *L'énergie interne et l'entropie du système dans un état quelconque;*

2° *Les conditions nécessaires et suffisantes de l'équilibre du système;*

3° *Les coefficients calorifiques du système en équilibre.*

C'est la généralisation d'une proposition bien connue de M. Massieu.

This document may not be reproduced, modified, adapted, published, translated, in any way, in whole or in part or disclosed to a third party without the prior written consent of Thales - © Thales 2015 All rights reserved.

THALES

THALES

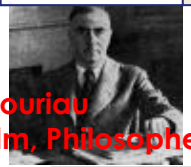
ALEAE GEOMETRIA
Géométrie du hasard

6) Approche de Jean-Marie Souriau: géométrisation de la physique statistique et théorie géométrique de la chaleur

Lagrange-Souriau 2 form
& Poincaré-Cartan 1 form

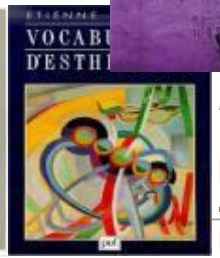
Blaise Pascal

Généalogie des Souriau: « Esprits raffinés » de la structure de l'esthétique, l'esthétique du mouvement & la structure du mouvement



Paul Souriau
ENS Ulm, Philosophe

Pierre -Alexandre
SOURIAU
1815 – 1898



Maurice Souriau
Histoire de la litérature,
4 Prix de l'Académie Française

Paul
SOURIAU
1852-1926

Marcelle Franço...
ADAM
1871-1951

Etienne Souriau
ENS Ulm, Philosophe, 1er agregation, Professeur à la Sorbonne

Maurice
SOURIAU
1856 – 1943

Michel
SOURIAU
1891-1986

Marthe
CHARVET
1901-1991

+ Etienne
SOURIAU
1892-1979

+ Jeanne
SOURIAU
ca 1896-

Jean-Marie
SOURIAU
1922-2012

François
SOURIAU
ca 1928-1969

+ Marc
SOURIAU

+ Pierre
SOURIAU
†1994

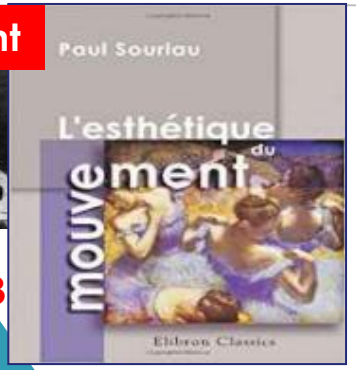
ENS Ulm, 2nd à l' agregation, Phycisien

This part ... ted, published, trans ... consent of Thales - ... r in ... ved.

THALES

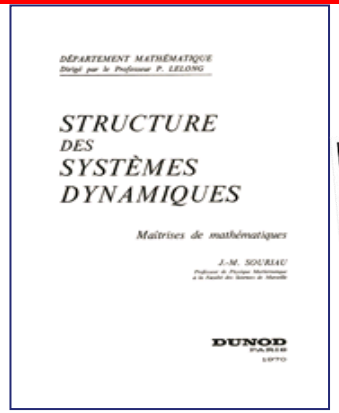
Esthétisme des Souriau sur « structure du mouvement » à travers 3 génération de Normaliens

Esthétisme du Mouvement



Paul Souriau
ENS Ulm 1873

Structure du Mouvement



Souriau Esthetism on « Structure of motion »

Jean-Marie Souriau
ENS Ulm 1942

Etienne Souriau
ENS Ulm 1912

Structure de l'Esthétisme

This document may not be reproduced, modified, adapted, published, translated, in any way, in whole or in part or disclosed to a third party without the prior written consent of Thales - © Thales 2015 All rights reserved.

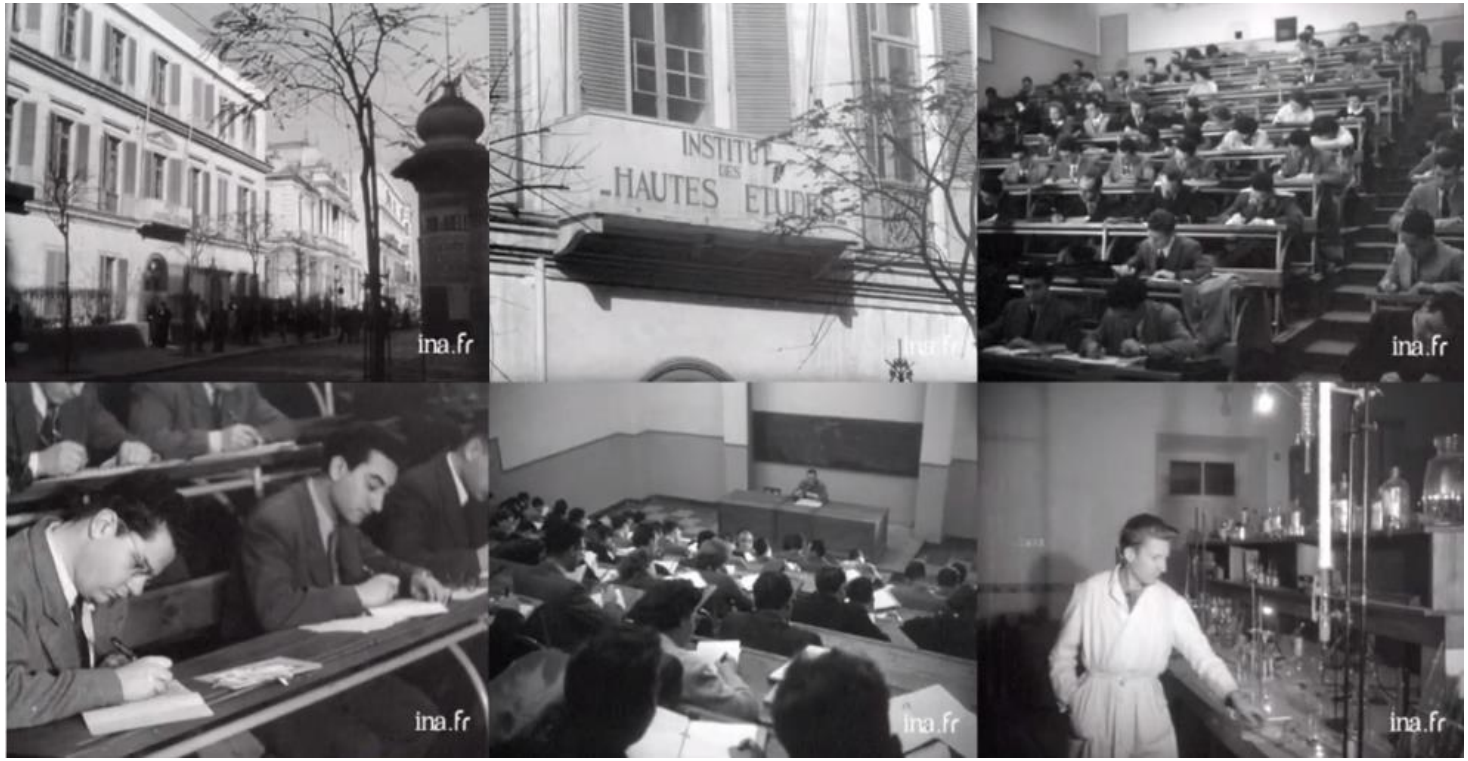
THALES

Etienne Souriau & Gaston Bachelard at Sorbonne University

Dans la cour de la Sorbonne en 1944 : les professeurs E. Bréhier, P. Mouy, R. Bayer, G. Bachelard, H. Gouhier, E. Souriau, J. Laporte et P. Romeu, bibliothécaire (de g. à d.).

This document may not be reproduced, modified, adapted, published, translated, in any way, in whole or in part or disclosed to a third party without the prior written consent of Thales - © Thales 2015 All rights reserved.

Jean-Marie Souriau à Carthage de 1954 à 1958 (Germination de « structure des systèmes dynamiques »)

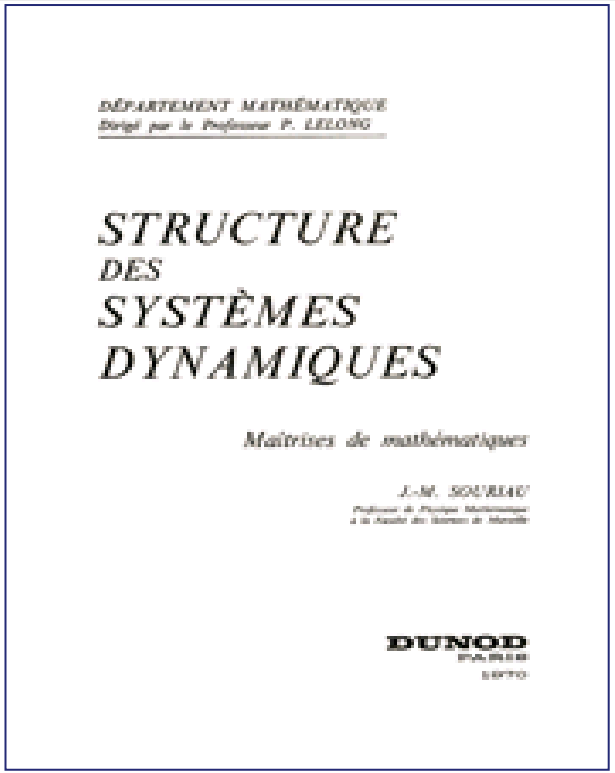


Institut des Hautes Etudes de Tunis, 8 rue de Rome
Video : http://www.ina.fr/video/AFE01000164

This document may not be reproduced, modified, adapted, published, translated, in any way, in whole or in part or disclosed to a third party without the prior written consent of Thales - © Thales 2015 All rights reserved.

THALES

Le Livre de Souriau



- Introduction de la géométrie symplectique en Mécanique
- Invention de l'application moment
- Géométrisation du théorème de Noether
- Théorème de décomposition barycentrique
- La masse totale d'un système dynamique isolé est la classe de cohomologie du défaut d'équivariance de l'application moment
- Thermodynamique des groupes de Lie (Chapitre IV)

http://www.jmsouriau.com/structure_des_systemes_dynamiques.htm
http://www.springer.com/us/book/9780817636951

This document may not be reproduced, modified, adapted, published, translated, in any way, in whole or in part or disclosed to a third party without the prior written consent of Thales - © Thales 2015 All rights reserved.

THALES

Idées de Lagrange redécouvertes par Jean-Marie Souriau

- Récriture équations de la mécanique classique dans l'espace des phases $\begin{pmatrix} r \\ v \end{pmatrix}$

$$m\frac{d^2r}{dt^2} = F \quad \longrightarrow \quad m\frac{dv}{dt} = F \quad \text{et} \quad v = \frac{dr}{dt}$$

- Souriau redécouvre que Lagrange avait considéré l'espace d'évolution: $y = \begin{pmatrix} t \\ r \\ v \end{pmatrix} \in V$

$$\begin{cases} m\delta v - F\delta t = 0 \\ \delta r - v\delta t = 0 \end{cases}$$

- Un système dynamique est représenté par un feuilletage. Ce feuilletage est déterminé par un tenseur du 2nd ordre covariant antisymétrique σ , appelé la 2 forme de Lagrange (-Souriau), opérateur biliénaire sur les vecteur tangents de *V*

$$\sigma(\delta y)(\delta' y) = \langle m\delta v - F\delta t, \delta' r - v\delta' t\rangle - \langle m\delta' v - F\delta' t, \delta r - v\delta t\rangle \qquad \delta y = \begin{pmatrix} \delta t \\ \delta r \\ \delta v \end{pmatrix} \quad \text{et} \quad \delta' y = \begin{pmatrix} \delta' t \\ \delta' r \\ \delta' v \end{pmatrix}$$

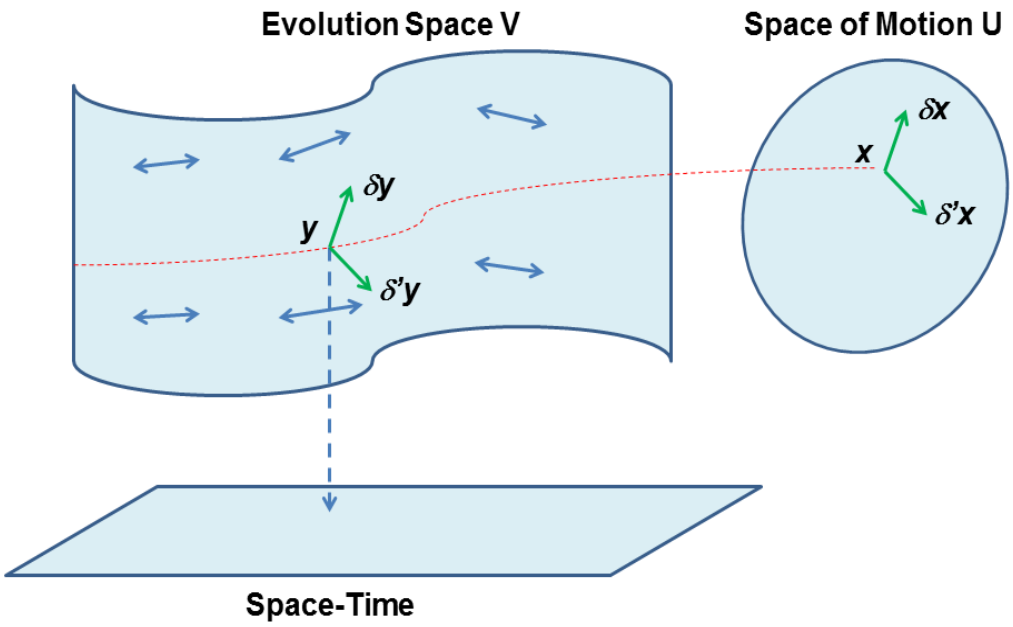
- *Dans le modèle de Lagrange-Souriau,* σ *est une 2-forme sur l'espace d'évolution V, et l'équation différentielle du mouvement* $\delta y \in \varepsilon$ *implique:*

$$\sigma(\delta y)(\delta' y) = 0 \ , \ \forall \delta' y \qquad \sigma(\delta y) = 0 \ \text{ ou } \ \delta y \in \ker(\sigma)$$

This document may not be reproduced, modified, adapted, published, translated, in any way, in whole or in part or disclosed to a third party without the prior written consent of Thales - © Thales 2015 All rights reserved.

THALES

Espace des Mouvements de Lagrange-Souriau



$$\begin{cases} m\delta v - F\delta t = 0 \\ \delta r - v\delta t = 0 \end{cases}$$

This document may not be reproduced, modified, adapted, published, translated, in any way, in whole or in part or disclosed to a third party without the prior written consent of Thales - © Thales 2015 All rights reserved.

THALES

Exemple du groupe de Galilée

Cocycles symplectique du groupe de Galilée : V. Bargmann, Ann. Math. 59, 1954, pp 1–46.

Groupe de Gallilée homogène

$$\begin{bmatrix} \vec{x}' \\ t' \\ 1 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} R & \vec{u} & \vec{w} \\ 0 & 1 & e \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \vec{x} \\ t \\ 1 \end{bmatrix}$$

Groupe de Galilée et algèbre

$$\begin{cases} \vec{x}' = R.\vec{x} + \vec{u}.t + \vec{w} \\ t' = t + e \end{cases}$$

$$\vec{x}, \vec{u} \text{ and } \vec{w} \in R^3, e \in R^+$$

$$R \in SO(3)$$

$$\begin{bmatrix} \vec{\omega} & \vec{\eta} & \vec{\gamma} \\ 0 & 0 & \varepsilon \\ 0 & 0 & 0 \end{bmatrix}, \begin{cases} \vec{\eta} \text{ and } \vec{\gamma} \in R^3, \varepsilon \in R^+ \\ \vec{\omega} \in so(3) : \vec{x} \mapsto \vec{\omega} \times \vec{x} \end{cases}$$

Extension centrale de Bargmann :

$$\begin{bmatrix} R & \vec{u} & 0 & \vec{w} \\ 0 & 1 & 0 & e \\ -\vec{u}^t R & -\frac{\|\vec{u}\|^2}{2} & 1 & f \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{bmatrix}$$

This document may not be reproduced, modified, adapted, published, translated, in any way, in whole or in part or disclosed to a third party without the prior written consent of Thales - © Thales 2015 All rights reserved.

THALES

La « Thermodynamique des groupes de Lie » de J.M. Souriau

Modèle symplectique de la Physique statistique de Jean-Marie Souriau

- L'idée de Lagrange a été de considérer qu'un état statistique est une mesure de probabilité sur la variété des mouvements
- Souriau étend la notion d'ensemble canonique de Gibbs à une **variété symplectique homogène** sur laquelle un groupe agit (groupes dynamiques de la physique).
- L'algèbre de Lie du groupe vérifie des **relations de type cohomologique** qui brisent la symétrie. Pour rétablir cette symétrie, Souriau introduit une **température « géométrique » comme élément de l'algèbre de Lie**, et une **chaleur « géométrique »** (moyenne de l'Energie qui est le moment de l'action hamiltonnienne du groupe) **comme élément de son dual**, permettant de remettre en dualité, via la transformée de Legendre, l' Entropie « géométrique » et le logarithme de la fonction de partition (fonction caractéristique).
- La **densité de Gibbs-Souriau** (densité à Maximum d'Entropie) possède alors la propriété d'être **covariante pour le groupe qui agit**, et l'Entropie de Boltzmann « géométrique » associée est invariante pour tout symplectomorphisme.

This document may not be reproduced, modified, adapted, published, translated, in any way, in whole or in part or disclosed to a third party without the prior written consent of Thales - © Thales 2015 All rights reserved.

THALES

La « Thermodynamique des groupes de Lie » de J.M. Souriau

Modèle symplectique de la Physique statistique de Jean-Marie Souriau

- Si on se restreint dans ce modèle au groupe des translations temporelles, on retrouve la théorie de la thermodynamique classique.
- Jean-Marie Souriau a appelé cette nouvelle structure élémentaire de la physique statistique « **la thermodynamique des groupes de Lie** » et précisa que « **ces formules sont universelles, en ce sens qu'elles ne mettent pas en jeu la variété symplectique, mais seulement le groupe G, son cocycle symplectique et le couple de la température et de la chaleur (géométriques)**».
- Souriau introduit enfin un tenseur symétrique à partir d'une 2-forme de l'algèbre de Lie (liée à la 2-forme de Kostant-Kirillov-Souriau et aux orbites coadjointes), qui fournit une **structure riemannienne invariante par l'action du groupe**.
- Nous avons observé que cette métrique est égale au hessien du logarithme de la fonction de partition (la fonction caractéristique) et correspond en conséquence à une **généralisation de la métrique de Fisher**. Or, comme la fonction caractéristique est linéaire par rapport à la température, son hessien, la métrique de Fisher reste inchangée sous l'action du groupe.

This document may not be reproduced, modified, adapted, published, translated, in any way, in whole or in part or disclosed to a third party without the prior written consent of Thales - © Thales 2015 All rights reserved.

THALES

La « Thermodynamique des groupes de Lie » de J.M. Souriau

Modèle symplectique de la Physique statistique de Jean-Marie Souriau

- **Cette métrique**, comme dérivée de la chaleur par la température, s'interprète également comme **l'analogue d'une « capacité calorifique »** au nouveau statut géométrique.
- De façon naturelle apparaît un invariant intégral de Poincaré-Cartan et une équation d'Euler-Poincaré associée, qui fournissent un cadre variationnel à cette thermodynamique.
- Dans le modèle affine de Souriau, comme dans celui de Jean-Louis Koszul, les structures fondamentales sont déduites de la représentation affine des groupes et algèbres de Lie.
- Le modèle de Souriau est compatible du **modèle de gauge de Balian-Valentin de la thermodynamique**.
- Souriau et Koszul furent deux élèves de Elie Cartan, qui influença profondément leurs travaux sur ces sujets.

This document may not be reproduced, modified, adapted, published, translated, in any way, in whole or in part or disclosed to a third party without the prior written consent of Thales - © Thales 2015 All rights reserved.

THALES

Rappel sur la théorie des groupes de Lie

Algèbre et groupe de Lie et opérateurs adjoints

- Soit G un groupe de Lie et T_eG espace tangent à G en l'élément neutre e

  - Ad Représentation adjointe de G

$$Ad : G \to GL(T_eG) \quad \text{avec} \quad i_g : h \mapsto ghg^{-1}$$

$$g \in G \mapsto Ad_g = T_e i_g$$

  - ad application tangente de Ad en l'élément neutre e de G

$$ad = T_e Ad : T_eG \to End(T_eG) \qquad X, Y \in T_eG \mapsto ad_X(Y) = [X, Y]$$

- Pour $G = GL_n(K)$ avec $K = R$ or C

$$T_eG = M_n(K) \qquad X \in M_n(K), g \in G \quad Ad_g(X) = gXg^{-1}$$

$$X, Y \in M_n(K) \quad ad_X(Y) = (T_e Ad)_X(Y) = XY - YX = [X, Y]$$

  - Courbe de $e = I_d = c(0)$ tangent à $X = c(1)$: $c(t) = \exp(tX)$
    et transformé par : Ad $\quad \gamma(t) = Ad \exp(tX)$

$$ad_X(Y) = (T_e Ad)_X(Y) = \frac{d}{dt}\gamma(t)Y\Big|_{t=0} = \frac{d}{dt}\exp(tX)Y\exp(tX)^{-1}\Big|_{t=0} = XY - YX$$

Document may not be reproduced, modified, adapted, published, translated, in any way, in whole or in or disclosed to a third party without the prior written consent of Thales - © Thales 2015 All rights reserved.

Ensemble canonique de Gibbs sur une variété Symplectique

- **En mécanique statistique classique, un état est donné par la solution de l'équation de Liouville sur l'espace de phase.**

- **Comme les variétés symplectiques ont une mesure complétement continue, invariante par diffeomorphismse, la mesure de Liouville λ , tous les états statistiques seront donnés par le produit de la mesure de Liouville par la fonction scalaire donnée par $e^{\Phi(\beta)-\langle \beta, U(\xi)\rangle}$ la fonction de densité généralisée définie par:**
  - l'énergie U (élément du dual de l'algèbre de Lie)
  - La température (de planck) "géométrique" β (élément de l'algèbre de Lie)
  - $\Phi(\beta)$ le terme de normalisation

- **L'état d'équilibre de Gibbs est étendu aux variétés symplectiques associées aux groupes dynamiques.**

This document may not be reproduced, modified, adapted, published, translated, in any way, in whole or in part or disclosed to a third party without the prior written consent of Thales - © Thales 2015 All rights reserved.

THALES

Fonction caractéristique de Souriau

- Soit un group G d'une variété M, la **température (de Planck) géométrique** β est un élément de l'algèbre de Lie $\mathfrak{g}$ de G telle que les intégrales suivantes convergesnt dans un voisinage de β : $I_0(\beta) = \int_M e^{-\langle \beta, U \rangle} d\lambda$
  - $\langle \beta, U \rangle$ crochet de dualité entre $\mathfrak{g}$ et $\mathfrak{g}^*$
  - $d\lambda$ est dans densité de Liouville de M

- <u>Théorème:</u> La fonction I_0 est infiniment différentiable C^∞ dans Ω (le plus grand sous-ensemble propre ouvert de $\mathfrak{g}$) et ses nth dérivées pour $\beta \in \Omega$, l'intégrale tensorielle sont convergentes: $I_n(\beta) = \int_M e^{-\langle \beta, U \rangle} U^{\otimes n} d\lambda$

- Pour chaque temperature β, on peut associer une loi de probabilité sur M avec la fonction de distribution :

$$e^{\Phi(\beta) - \langle \beta, U(\xi) \rangle} \text{ avec } \Phi(\beta) = -\log(I_0) = -\log \int_M e^{-\langle \beta, U(\xi) \rangle} d\lambda \quad \text{et} \quad Q(\beta) = \int_M e^{\Phi(\beta) - \langle \beta, U(\xi) \rangle} U d\lambda = \frac{I_1}{I_0}$$

  - L'ensemble de ces lois de probabilité est **l'ensemble de Gibbs du groupe dynamique**, Φ est le **Potentiel Thermodynamique** et $Q \in \mathfrak{g}^*$ est la **chaleur géométrique**

This document may not be reproduced, modified, adapted, published, translated, in any way, in whole or in part or disclosed to a third party without the prior written consent of Thales. © Thales 2015 All rights reserved

Notion de Capacité géométrique = métrique de Fisher-Souriau

- On peut observer que la chaleur géométrique Q est C^∞ et fonction de la température géométrique β, élément de $\mathfrak{g}^*$:

$$\beta \in \mathfrak{g} \mapsto Q \in \mathfrak{g}^*$$

$$Q(\beta) = \int_M e^{\Phi(\beta)-\langle \beta, U(\xi)\rangle} U d\lambda = \frac{I_1}{I_0}$$

- Nous avons : $Q = \dfrac{\partial \Phi}{\partial \beta}$ avec $\Phi(\beta) = -\log \int_M e^{-\langle \beta, U(\xi)\rangle} d\lambda$

- Sa dérivée est un tenseur symétrique d'ordre 2:

$$\frac{\partial Q}{\partial \beta} = \frac{I_2}{I_0} - \frac{I_1 \otimes I_1}{I_0} = \frac{I_2}{I_1} - Q \otimes Q$$

$$-\frac{\partial Q}{\partial \beta} = \int_M e^{\Phi(\beta)-\langle \beta, U(\xi)\rangle} [U-Q] \otimes [U-Q] d\lambda$$

$$-\frac{\partial Q}{\partial \beta} = -\frac{\partial^2 \Phi}{\partial \beta^2} \geq 0$$

- Cette forme quadratique est positive, et définie positive pour $x \in M$ sauf si il existe un élément non nul $Z \in \mathfrak{g}$ tel que $\langle U-Q, Z\rangle = 0$ (signifie que le moment U varie dans une sous-variété affine $\mathfrak{g}^*$)

This document may not be reproduced, modified, adapted, published, translated, in any way, in whole or in part or disclosed to a third party without the prior written consent of Thales - © Thales 2015 All rights reserved.

THALES

Rupture de symétrie, représentation affine des groupes et algèbres de Lie, cocycle

- Pour la thermodynamique classique, le groupe G (groupe de translation temporelle) laisse inchangé l'équilibre de Gibbs.

- Ce n'est pas vrai dans le cas général: **La symétrie est brisée**.

- Si on considère l'état de Gibbs, la loi de probabilité μ_β , son image par $\Psi_g(\mu_\beta)$ avec $g \in G$ est une loi de probabilité.

- Pour calculer $\Psi_g(\mu_\beta)$, nous devons calculer $J \circ \Psi_g^{-1}$ où J est l'application $J : x \in M \mapsto U \in \mathfrak{g}^*$

- Il existe une application $\theta : G \to \mathfrak{g}^*$ telle que:

$$J(\Psi_g(x)) = a(g, J(x)) = Ad_g^*(J(x)) + \theta(g) \qquad Ad_g^*(U) = U \circ Ad_g^{-1}$$

- θ vérifie l'égalité, prouvant que c'est un $\mathfrak{g}^*$-cocycle du groupe G

$$\theta(g_1 g_2) = Ad_{g_1}^* \theta(g_2) + \theta(g_1) \ , \ \forall g_1, g_2 \in G \qquad \theta(e) = 0 \qquad \theta(g^{-1}) = -Ad_g^* \theta(g)$$

This document may not be reproduced, modified, adapted, published, translated, in any way, in whole or in part or disclosed to a third party without the prior written consent of Thales - © Thales 2015 All rights reserved.

THALES

Action du groupe de Lie sur la distribution

La distribution sous l'action du groupe de Lie est donnée par:

$$\mu^* : e^{\Phi^* - \langle \beta^*, U \rangle}$$

$$\Phi^* = \Phi(\beta^*) = \Phi - \langle \theta(g^{-1}), \beta \rangle$$

$$\Phi^* = \Phi + \langle \theta(g), Ad_g \beta \rangle$$

(**)

$$\beta^* = Ad_g(\beta)$$

$$\Psi_g(\mu_\beta) = \mu_{Ad_g(\beta)}$$

$$\theta(g^{-1}) = -Ad_g^* \theta(g)$$

$$\Phi(\beta) = -\log \int_M e^{-\langle \beta, U(\xi) \rangle} d\lambda$$

Si on a $Q = \dfrac{\partial \Phi}{\partial \beta}$, nous avons la contrainte:

$$\delta\Phi - \langle Q, \delta\beta \rangle = 0$$

Par dérivation de (**), nous avons:

$$\tilde{\Theta}(X, Y) : \mathfrak{g} \times \mathfrak{g} \to \Re$$

$$X, Y \mapsto \langle \Theta(X), Y \rangle$$

$$\tilde{\Theta}(\beta, Z) + \langle Q, [\beta, Z] \rangle = 0$$

$$\Theta(X) = T_e \theta(X(e))$$

This document may not be reproduced, modified, adapted, published, translated, in any way, in whole or in part or disclosed to a third party without the prior written consent of Thales - © Thales 2015 All rights reserved.

THALES

Cocycle symplectique de l'algèbre de Lie

- **Nous avons précédemment onservé:** $\tilde{\Theta}(\beta, Z) + \langle Q, [\beta, Z] \rangle = 0$

- $\tilde{\Theta}(X, Y)$ **est appelé cocycle symplectique de l'algèbre de Lie** $\mathfrak{g}$ **relié à l'application moment** J **par**

$$\tilde{\Theta}(X,Y) = J_{[X,Y]} - \{J_X, J_Y\} \quad \text{avec} \quad \{.,.\} \text{ crochets de Poisson et } J \text{ tl'application moment}$$

  - J_X est l'application linéaire de $\mathfrak{g}$ vers la fonction différentielle sur M : $\mathfrak{g} \to C^\infty(M, R)$, $X \to J_X$
  - Et l'application différentielle associée J, appelée application moment:

$$J : M \to \mathfrak{g}^* \quad \text{avec} \quad x \mapsto J(x) \quad \text{tel que } J_X(x) = \langle J(x), X \rangle, X \in \mathfrak{g}$$

- $\tilde{\Theta}(X, Y)$ **est une 2-forme de** $\mathfrak{g}$ **et vérifie:**

$$\tilde{\Theta}([X,Y],Z) + \tilde{\Theta}([Y,Z],X) + \tilde{\Theta}([Z,X],Y) = 0$$

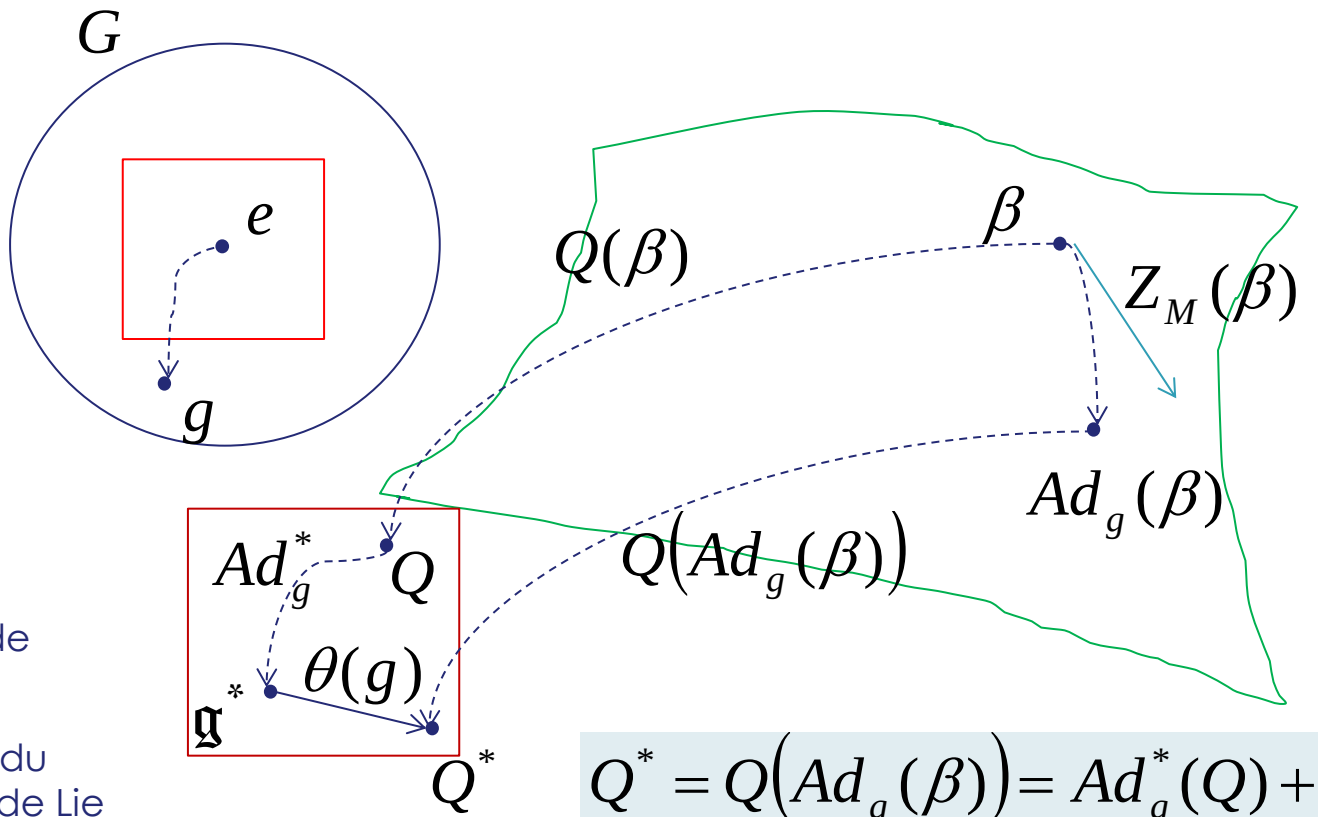
- **Définie par :** $\tilde{\Theta}_\beta(Z_1, Z_2) = \tilde{\Theta}(Z_1, Z_2) + \langle Q, ad_{Z_1}(Z_2) \rangle$ avec $ad_{Z_1}(Z_2) = [Z_1, Z_2]$

- **Avec la propriété:** $\beta \in Ker\, \tilde{\Theta}_\beta$ $\quad \tilde{\Theta}_\beta(\beta, \beta) = 0 \;,\; \forall \beta \in \mathfrak{g}$

This document may not be reproduced, modified, adapted, published, translated, in any way, in whole or in part or disclosed to a third party without the prior written consent of Thales - © Thales 2015 All rights reserved.

THALES

Théorème fondamental: représentation affine des groupes et algèbres de Lie



β : température (de Planck) élément de l'algèbre de Lie

Q : chaleur élément du dual de l'algèbre de Lie

$$Q^* = Q(Ad_g(\beta)) = Ad_g^*(Q) + \theta(g)$$

This document may not be reproduced, modified, adapted, published, translated, in any way, in whole or in part or disclosed to a third party without the prior written consent of Thales - © Thales 2015 All rights reserved.

THALES

Métrique de Fisher-Souriau

- On peut calculer l'image de la chaleur sous l'action du groupe de Lie:

$$Q^* = Ad_g^*(Q) + \theta(g)$$

- Par dérivée tangentielle sur l'orbite sous la contrainte $Z \in \mathfrak{g}$ et en utilisant la positivité $-\frac{\partial Q}{\partial \beta} \geq 0$, on trouve:

$$\tilde{\Theta}_\beta(Z,[\beta,Z]) = \tilde{\Theta}(Z,[\beta,Z]) + \langle Q,[Z,[\beta,Z]]\rangle \geq 0$$

- $\tilde{\Theta}_\beta$ est une 2-forme de $\mathfrak{g}$ qui vérifie:

$$\tilde{\Theta}([X,Y],Z) + \tilde{\Theta}([Y,Z],X) + \tilde{\Theta}([Z,X],Y) = 0$$

- Alors, il existe **un tenseur symétrique** g_β défini sur $ad_\beta(Z)$

$$g_\beta([\beta,Z_1],[\beta,Z_2]) = \tilde{\Theta}_\beta(Z_1,[\beta,Z_2])$$

- Avec l'invariance suivante:

$$s[Q(Ad_g(\beta))] = s(Q(\beta))$$

$$I(Ad_g(\beta)) = -\frac{\partial^2(\Phi - \langle\theta(g^{-1}),\beta\rangle)}{\partial\beta^2} = -\frac{\partial^2\Phi}{\partial\beta^2} = I(\beta)$$

This document may not be reproduced, modified, adapted, published, translated, in any way, in whole or in part or disclosed to a third party without the prior written consent of Thales - © Thales 2015 All rights reserved.

THALES

Métrique de Fisher-Souriau: métrique hessienne

Souriau a introduit la métrique Riemannienne:

$$g_\beta([\beta,Z_1],[\beta,Z_2]) = \tilde{\Theta}_\beta(Z_1,[\beta,Z_2]) \qquad \beta \in Ker\,\tilde{\Theta}_\beta$$

$$\tilde{\Theta}_\beta(Z_1,Z_2) = \tilde{\Theta}(Z_1,Z_2) + \langle Q, ad_{Z_1}(Z_2)\rangle \text{ with } ad_{Z_1}(Z_2) = [Z_1,Z_2]$$

Cette métrique est une extension de la métrique de Fisher, une métrique hessienne: si on différencie la relation $Q(Ad_g(\beta)) = Ad_g^*(Q) + \theta(g)$

$$\frac{\partial Q}{\partial \beta}(-[Z_1,\beta],.) = \tilde{\Theta}(Z_1,[\beta,.]) + \langle Q, Ad_{.Z_1}([\beta,.])\rangle = \tilde{\Theta}_\beta(Z_1,[\beta,.])$$

$$-\frac{\partial Q}{\partial \beta}([Z_1,\beta],Z_2.) = \tilde{\Theta}(Z_1,[\beta,Z_2]) + \langle Q, Ad_{.Z_1}([\beta,Z_2])\rangle = \tilde{\Theta}_\beta(Z_1,[\beta,Z_2])$$

$$\Rightarrow -\frac{\partial^2 \Phi}{\partial \beta^2} = -\frac{\partial Q}{\partial \beta} = g_\beta([\beta,Z_1],[\beta,Z_2]) = \tilde{\Theta}_\beta(Z_1,[\beta,Z_2])$$

La métrique de Fisher est une généralisation de “Capacité calorifique”:

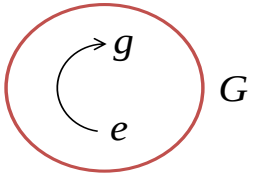
$$\beta = \frac{1}{kT} \qquad K = -\frac{\partial Q}{\partial \beta} = -\frac{\partial Q}{\partial T}\left(\frac{\partial(1/kT)}{\partial T}\right)^{-1} = kT^2\frac{\partial Q}{\partial T} \qquad \frac{\partial T}{\partial t} = \frac{\kappa}{C.D}\Delta T \text{ avec } \frac{\partial Q}{\partial T} = C.D$$

This document may not be reproduced, modified, adapted, published, translated, in any way, in whole or in part or disclosed to a third party without the prior written consent of Thales - © Thales 2015 All rights reserved.

THALES

Modèle de Souriau de la Thermodynamique des groupes de Lie

TEMPERATURE dans l'Algèbre de Lie

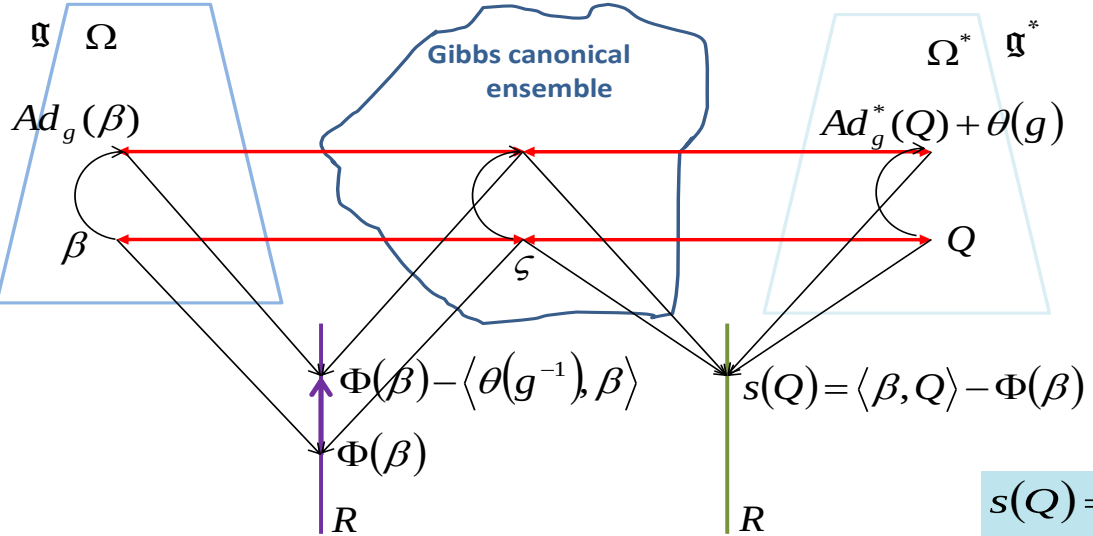


CHALEUR Dans le dual de l'algèbre de Lie

Métrique de Fisher

$$g_\beta([\beta,Z_1],[\beta,Z_2]) = \tilde{\Theta}_\beta(Z_1,[\beta,Z_2]) \geq 0$$

$$I(\beta) = I(Ad_g(\beta)) = -\frac{\partial^2 \Phi}{\partial \beta^2} = \frac{\partial^2 \log \int_M e^{-\langle \beta, U(\xi)\rangle} d\lambda}{\partial \beta^2}$$



Logarithme de la fonction de Partition (fonction caractéristique)

Entropie

L'Entropie est invariant sous l'action du groupe

Legendre — Clairaut

$$s(Q) = \langle \beta, Q\rangle - \Phi(\beta) = \langle \Theta^{-1}(Q), Q\rangle - \Phi(\Theta^{-1}(Q))$$

$$Q = \Theta(\beta) = \frac{\partial \Phi}{\partial \beta} \in \mathfrak{g}^*$$

$$\beta = \Theta^{-1}(Q) \in \mathfrak{g}$$

This par

THALES

Universalité du modèle de Souriau de thermodynamique des groupes de Lie

Les équations de Souriau sont universelles

Ces formules sont universelles, en ce sens qu'elles ne mettent pas en jeu la variété symplectique, mais seulement:

- Le groupe G
- Son cocycle symplectique $\theta(g)$
- La température géométrique β élément de l'algèbre de Lie
- La chaleur géométrique Q élément du dual de l'algèbre de Lie

This document may not be reproduced, modified, adapted, published, translated, in any way, in whole or in part or disclosed to a third party without the prior written consent of Thales - © Thales 2015 All rights reserved.

THALES

Retour à la thermodynamique classique

Nous avons les relations générales

$Q = \dfrac{\partial \Phi}{\partial \beta}$	$\beta = \dfrac{\partial s}{\partial Q}$
$s(Q) = \left\langle \dfrac{\partial \Phi}{\partial \beta}, \beta \right\rangle - \Phi$	$\Phi(\beta) = \left\langle Q, \dfrac{\partial s}{\partial Q} \right\rangle - s$

Pour la thermodynamique classique, il faut se restreindre au groupe des translation temporelle, et on retrouve alors la définition classique de l'Entropie de Clausius:

$$\begin{cases} \beta = \dfrac{\partial s}{\partial Q} \\ \beta = \dfrac{1}{T} \end{cases} \Rightarrow ds = \frac{dQ}{T}$$

This document may not be reproduced, modified, adapted, published, translated, in any way, in whole or in part or disclosed to a third party without the prior written consent of Thales - © Thales 2015 All rights reserved.

THALES

Etats de Gibbs for des actions Hamiltoniennes de sous-groupes du groupe de Galilée

Transformation Galiléenne:

- Group de Galilée:

$$\begin{pmatrix} A & \vec{b} & \vec{d} \\ 0 & 1 & e \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} \quad \text{avec} \quad \begin{cases} A \in SO(3)\text{: rotation} \\ \vec{b} \in R^3\text{: boost en vitesse} \\ \vec{d} \in R^3 \text{ : translation spatiale} \\ e\text{: translation temporelle} \end{cases}$$

- Algèbre de Lie associée:

$$\begin{pmatrix} j(\vec{\omega}) & \vec{\alpha} & \vec{\delta} \\ 0 & 1 & \varepsilon \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix} \quad \text{avec} \quad \begin{cases} \vec{\omega} = \begin{pmatrix} \omega_x \\ \omega_y \\ \omega_z \end{pmatrix}, \quad \vec{\alpha} \text{ et } \vec{\delta} \in R^3, \quad \varepsilon \in R \\ j(\vec{\omega}) = \begin{pmatrix} 0 & -\omega_z & \omega_y \\ \omega_z & 0 & -\omega_x \\ -\omega_y & \omega_x & 0 \end{pmatrix} \in \text{so}(3),\ j(\vec{\omega})\vec{r} = \vec{\omega} \times \vec{r} \end{cases}$$

- Action du groupe:

$$\begin{pmatrix} A & \vec{b} & \vec{d} \\ 0 & 1 & e \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} \vec{r} \\ t \\ 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} A\vec{r} + t\vec{b} + \vec{d} \\ t + e \\ 1 \end{pmatrix} \quad \text{avec } \vec{r} = \begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix}$$

This document may not be reproduced, modified, adapted, published, translated, in any way, in whole or in part or disclosed to a third party without the prior written consent of Thales - © Thales 2015 All rights reserved.

THALES

Etats de Gibbs for des actions Hamiltoniennes de sous-groupes du groupe de Galilée

- Transformation de Galilée en position et en vitesse:

$$\begin{pmatrix} \vec{r}' & \vec{v}' \\ t' & 1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} A & \vec{b} & \vec{d} \\ 0 & 1 & e \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} \vec{r} & \vec{v} \\ t & 1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} A\vec{r} + t\vec{b} + \vec{d} & A\vec{v} + \vec{b} \\ t + e & 1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix}$$

- **<u>Résultat de Souriau</u>**: cette action est hamiltonnienne, avec l'application ***J***, défini sur l'espace d'évolution, à valeur dans le duale de l'algèbre de Lie $\mathfrak{g}^*$ de ***G***, d'application moment:

$$J(\vec{r}, t, \vec{v}, m) = m \begin{pmatrix} \vec{r} \times \vec{v} & 0 & 0 \\ \vec{r} - t\vec{v} & 0 & 0 \\ \vec{v} & \frac{1}{2}\|\vec{v}\|^2 & 0 \end{pmatrix} = m\left\{ \vec{r} \times \vec{v}, \vec{r} - t\vec{v}, \vec{v}, \frac{1}{2}\|\vec{v}\|^2 \right\} \in \mathfrak{g}^*$$

- Formule de couplage:

$$\left\langle J(\vec{r}, t, \vec{v}, m), \beta \right\rangle = \left\langle m\left\{ \vec{r} \times \vec{v}, \vec{r} - t\vec{v}, \vec{v}, \frac{1}{2}\|\vec{v}\|^2 \right\}, \left\{ \vec{\omega}, \vec{\alpha}, \vec{\delta}, \varepsilon \right\} \right\rangle$$

$$Z = \begin{pmatrix} j(\vec{\omega}) & \vec{\alpha} & \vec{\delta} \\ 0 & 1 & \varepsilon \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix} = \left\{ \vec{\omega}, \vec{\alpha}, \vec{\delta}, \varepsilon \right\} \in \mathfrak{g}$$

$$\left\langle J(\vec{r}, t, \vec{v}, m), \beta \right\rangle = m\left(\vec{\omega}.\vec{r} \times \vec{v} - (\vec{r} \times \vec{v}).\vec{\alpha} + \vec{v}.\vec{\delta} - \frac{1}{2}\|\vec{v}\|^2 \varepsilon \right)$$

This document may not be reproduced, modified, adapted, published, translated, in any way, in whole or in part or disclosed to a third party without the prior written consent of Thales - © Thales 2015 All rights reserved.

THALES

Etats de Gibbs for des actions Hamiltoniennes de sous-groupes du groupe de Galilée

Démo de Souriau Demo pour l'application moment Galiléenne pour une particule libre

$$\sigma(dp)(\delta p) = -d\langle J, Z\rangle \ , \ \forall dp$$

- Definition de l'application moment: $Z_V(p) = \delta[a_V(p)]$
- Definition du champ de vecteur tangent:

$$Z = \begin{pmatrix} j(\vec{\omega}) & \vec{\alpha} & \vec{\delta} \\ 0 & 1 & \varepsilon \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix} \in \mathfrak{g} \underset{Z_V(p)=\delta[a_V(p)]}{\Rightarrow} \begin{cases} \delta t = \varepsilon \\ \delta r_j = \vec{\omega} \times r_j + \vec{\alpha} t + \vec{\delta} \\ \delta v_j = \vec{\omega} \times v_j + \vec{\alpha} \end{cases}$$

- 2 forme de Lagrange:

$$\sigma(dp)(\delta p) = \sum_j \langle m dv, \vec{\omega} \times r_j + \vec{\alpha} t + \vec{\delta} - v\varepsilon \rangle - \langle m(\vec{\omega} \times v_j + \vec{\alpha}), dr - v dt \rangle = -d\langle J, Z\rangle = -dJ_Z = -dH$$

F=0

$$dp = \begin{pmatrix} dt \\ dr \\ dv \end{pmatrix} \text{ and } \delta p = \begin{pmatrix} \delta t \\ \delta r \\ \delta v \end{pmatrix} \Rightarrow \sigma(dp)(\delta p) = \langle m dv - F dt, \delta r - v\delta t \rangle - \langle m\delta v - F\delta t, dr - v dt \rangle$$

- Cocycle: $\theta(g) = J(Ad_g Z) - Ad_g^*(J(Z)) = \left\{ \vec{d} \times \vec{b}, \vec{d} - \vec{b}e, \vec{b}, \frac{1}{2}\|\vec{b}\|^2 \right\}$

This document may not be reproduced, modified, adapted, published, translated, in any way, in whole or in part or disclosed to a third party without the prior written consent of Thales - © Thales 2015 All rights reserved.

THALES

Etats de Gibbs for des actions Hamiltoniennes de sous-groupes du groupe de Galilée

Etat de Gibbs de Souriau pour les sous-groupe à 1 paramètre du groupe de Galilée

- **<u>Résultat de Souriau :</u>** Action du groupe de Galilée globale sur l'espace des mouvements d'un système mécanique isolé n'est relié à aucun état de Gibbs (le sous-ensemble ouvert de l'algèbre de Lie, associé à l'état de Gibbs, est vide)
- Le **sous-groupe à 1 paramètre du groupe de Galilée** généré par β, élément de l'algèbre de Lie, is the set of matrices

$$\exp(\tau\beta) = \begin{pmatrix} A(\tau) & \vec{b}(\tau) & \vec{d}(\tau) \\ 0 & 1 & \tau\varepsilon \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} \quad \text{avec} \quad \begin{cases} A(\tau) = \exp\left(\tau\, j(\vec{\omega})\right) \ \text{ et } \ \vec{b}(\tau) = \left(\sum_{i=1}^{\infty} \frac{\tau^i}{i!}\left(j(\vec{\omega})\right)^{i-1}\right)\vec{\alpha} \\ \vec{d}(\tau) = \left(\sum_{i=1}^{\infty} \frac{\tau^i}{i!}\left(j(\vec{\omega})\right)^{i-1}\right)\vec{\delta} + \varepsilon\left(\sum_{i=2}^{\infty} \frac{\tau^i}{i!}\left(j(\vec{\omega})\right)^{i-2}\right)\vec{\alpha} \end{cases}$$

$$\beta = \begin{pmatrix} j(\vec{\omega}) & \vec{\alpha} & \vec{\delta} \\ 0 & 1 & \varepsilon \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix} \in \mathfrak{g}$$

This document may not be reproduced, modified, adapted, published, translated, in any way, in whole or in part or disclosed to a third party without the prior written consent of Thales - © Thales 2015 All rights reserved.

THALES

Etats de Gibbs for des actions Hamiltoniennes de sous-groupes du groupe de Galilée

Un gaz dans une boite mobile

- Fixé le repère de référence euclidien affine de l'espace $(0,\vec{e}_x,\vec{e}_y,\vec{e}_z)$ à $t=0$, si on fixe $\tau = t/\varepsilon$, le repère mobile $(0,\vec{e}_x(t),\vec{e}_y(t),\vec{e}_z(t))$ vitesse et accélération est donné par le champ de vecteurs associés à β élément de l'algèbre de Lie. Chaque point a une vitesse de rotation $\|\vec{\omega}\|/\varepsilon$, vitesse $\vec{\delta}/\varepsilon$ et accélération $\vec{\alpha}/\varepsilon$.
- Considérons un gaz de N particules, indéxées par $i \in \{1,2,\ldots,N\}$, contenues dans une boite rigide, de parois indéformables, don't l'action dans l'espace est donnée par l'action du sous-groupe à 1 paramètre du groupe de Galilée, $A(t/\varepsilon)$ avec $t \in R$.
- $m_i, r_i(t), v_i(t)$ la masse, vecteurs position et vitesse, respectivement de la i^{ème} particule à l'instant t.
- Hypothèse: particules libres et on néglige les chocs des particules entre elles et avec la paroi:

$$\langle J,\beta\rangle = \sum_{i=1}^{N}\langle J_i,\beta\rangle \text{ with } \langle J_i(\vec{r}_i,t,\vec{v}_i,m_i),\beta\rangle = m_i\left(\vec{\omega}.(\vec{r}_i\times\vec{v}_i)-(\vec{r}_i-t\vec{v}_i).\vec{\alpha}+\vec{v}_i.\vec{\delta}-\frac{1}{2}\|\vec{v}_i\|^2\varepsilon\right)$$

- Invariance: $\langle J_i,\beta\rangle$ est invariant sous l'action du sous-groupe à 1 paramètre

This document may not be reproduced, modified, adapted, published, translated, in any way, in whole or in part or disclosed to a third party without the prior written consent of Thales - © Thales 2015 All rights reserved.

THALES

Etats de Gibbs for des actions Hamiltoniennes de sous-groupes du groupe de Galilée

Invariance de $\langle J_i, \beta \rangle$

- Si l'action du sous-groupe à 1 paramètre est $\exp\left(\frac{t}{\varepsilon}\beta\right)$
- D'après l'équation de Souriau:

$$a(g,J) = Ad_g^*(J) + \theta(g)$$

On obtient: $\langle J_i(p), \beta \rangle = \langle Ad_g^*(J_i(p_0)), \beta \rangle + \langle \theta(g), \beta \rangle$

$$\langle J_i(p), \beta \rangle = \langle J_i(p_0), Ad_{g^{-1}}\beta \rangle + \langle \theta(g), \beta \rangle$$

$$\begin{cases} Ad_{g^{-1}}\beta = \beta \\ \langle \theta(g), \beta \rangle = 0 \end{cases} \Rightarrow \langle J_i(p), \beta \rangle = \langle J_i(p_0), \beta \rangle$$

à t = 0 alors $\langle J_i(\vec{r}_i, t, \vec{v}_i, m_i), \beta \rangle = m_i\left(\vec{\omega}.(\vec{r}_{i0} \times \vec{v}_{i0}) - \vec{r}_{i0}.\vec{\alpha} + \vec{v}_{i0}.\vec{\delta} - \frac{1}{2}\|\vec{v}_i\|^2 \varepsilon\right)$

$$= m_i\left(\vec{v}_{i0}.(\vec{\omega} \times \vec{v}_{i0} + \vec{\delta}) - \vec{r}_{i0}.\vec{\alpha} - \frac{1}{2}\|\vec{v}_i\|^2 \varepsilon\right)$$

This document may not be reproduced, modified, adapted, published, translated, in any way, in whole or in part or disclosed to a third party without the prior written consent of Thales - © Thales 2015 All rights reserved.

THALES

Etats de Gibbs for des actions Hamiltoniennes de sous-groupes du groupe de Galilée

- Par changement de variable : $\vec{U}^* = \frac{1}{\varepsilon}\left(\vec{\omega}\times\vec{v}_{i0}+\vec{\delta}\right)$

$$\left\langle J_i\left(\vec{r}_i,t,\vec{v}_i,m_i\right),\beta\right\rangle = m_i\varepsilon\left(-\frac{1}{2}\left\|\vec{v}_{i0}-\vec{U}^*\right\|^2-\vec{r}_{i0}.\frac{\vec{\alpha}}{\varepsilon}+\frac{1}{2}\left\|\vec{U}^*\right\|^2\right)$$

- On peut écrire: $\left\langle J_i\left(\vec{r}_{i0},\vec{p}_{i0}\right),\beta\right\rangle = -\varepsilon\left(-\frac{1}{2m_i}\left\|\vec{p}_{i0}\right\|^2+m_i f_i\left(\vec{r}_{i0}\right)\right)$ avec $\varepsilon = -\frac{1}{\kappa T}$

$$\text{avec}\quad\begin{cases}\vec{p}_{i0} = m_i\vec{w}_{i0} = m_i\left(\vec{v}_{i0}-\vec{U}^*\right)\\ f_i\left(\vec{r}_{i0}\right) = \vec{r}_{i0}.\frac{\vec{\alpha}}{\varepsilon}-\frac{1}{2\varepsilon^2}\left\|\vec{\omega}\times\vec{r}_{i0}\right\|^2-\frac{\vec{\delta}}{\varepsilon}.\left(\frac{\vec{\omega}}{\varepsilon}\times\vec{r}_{i0}\right)-\frac{1}{2\varepsilon^2}\left\|\vec{\delta}\right\|^2\end{cases}$$

- Densité de Gibbs donnée par:

$$\rho(\beta)=\prod_{i=1}^{N}\rho_i(\beta)\ \text{with}\ \rho_i(\beta)=\frac{1}{P_i(\beta)}\exp\left(-\left\langle J_i,\beta\right\rangle\right)$$

$$P_i(\beta)=\int_{M_i}\exp\left(-\left\langle J_i,\beta\right\rangle\right)d\lambda_{\omega_i}\ ,\ Q_i(\beta)=\int_{M_i}J_i\exp\left(-\left\langle J_i,\beta\right\rangle\right)d\lambda_{\omega_i}\ \text{et}\ P(\beta)=\prod_{i=1}^{N}P_i(\beta)$$

This document may not be reproduced, modified, adapted, published, translated, in any way, in whole or in part or disclosed to a third party without the prior written consent of Thales - © Thales 2015 All rights reserved.

La Thermodynamique de la crémière" (centrifugeuse)

Si on considère le cas de la centrifugeuse

$$\vec{\omega} = \omega \vec{e}_z \ , \ \vec{\alpha} = 0 \ \text{ et } \ \vec{\delta} = 0$$

$$\textit{Vitesse de Rotation} \ : \frac{\omega}{\varepsilon}$$

$$f_i\left(\vec{r}_{i0}\right) = -\frac{\omega^2}{2\varepsilon^2}\left\|\vec{e}_z \times \vec{r}_{i0}\right\|^2$$

avec $\Delta = \left\|\vec{e}_z \times \vec{r}_{i0}\right\|$ distance à l'axis z

$$\rho_i(\beta) = \frac{1}{P_i(\beta)}\exp\left(-\langle J_i, \beta\rangle\right) = cst.\exp\left(-\frac{1}{2m_i\kappa T}\left\|\vec{p}_{i0}\right\|^2 + \frac{m_i}{2\kappa T}\left(\frac{\omega}{\varepsilon}\right)^2 \Delta^2\right)$$

- La concentration des particules par rapport à l'axe dépend de leur masse

$$\frac{\omega}{\varepsilon}$$

This document may not be reproduced, modified, adapted, published, translated, in any way, in whole or in part or disclosed to a third party without the prior written consent of Thales - © Thales 2015 All rights reserved.

THALES

Invariant intégral de Poincaré-Cartan pour la Thermod. de Souriau

Analogies entre les terme de la themodynamique des groupes de Lie de Souriau et la mécanique Hamiltonnienne:

$$\begin{cases} \dot{q} \leftrightarrow \beta \\ p \leftrightarrow Q \end{cases} \qquad \begin{cases} L(\dot{q}) \leftrightarrow \Phi(\beta) \\ H(p) \leftrightarrow s(Q) \\ H = p.\dot{q} - L \leftrightarrow s = \langle Q, \beta \rangle - \Phi \end{cases} \qquad \begin{cases} \dot{q} = \dfrac{dq}{dt} = \dfrac{\partial H}{\partial p} \leftrightarrow \beta = \dfrac{\partial s}{\partial Q} \\ p = \dfrac{\partial L}{\partial \dot{q}} \leftrightarrow Q = \dfrac{\partial \Phi}{\partial \beta} \end{cases}$$

On peu considérer une forme de Pfaff de Poincaré-Cartan(-Souriau)

$$\omega = p.dq - H.dt \leftrightarrow \omega = \langle Q, (\beta.dt) \rangle - s.dt = (\langle Q, \beta \rangle - s).dt = \Phi(\beta).dt$$

Cette analogie fournie un invariant intégral de Poincaré-Cartan(-Souriau):

$$\int_{C_a} p.dq - H.dt = \int_{C_b} p.dq - H.dt \text{ transforms in } \int_{C_a} \Phi(\beta).dt = \int_{C_b} \Phi(\beta).dt$$

Pour cette thermodynamique, un principe variationnel : Le principe variationnel s'applique sur $\mathfrak{g}$, pour les variations $\delta\beta = \dot{\eta} + [\beta, \eta]$, où $\eta(t)$ est un chemin arbitraire qui s'annule aux points extrémités, $\eta(a) = \eta(b) = 0$:

$$\delta \int_{t_0}^{t_1} \Phi(\beta(t)).dt = 0$$

This document may not be reproduced, modified, adapted, published, translated, in any way, in whole or in part or disclosed to a third party without the prior written consent of Thales - © Thales 2015 All rights reserved.

THALES

THALES

ALEAE GEOMETRIA
Géométrie du hasard

7) Extension de la notion d'Entropie et des densités à maximum d'entropie

Lagrange-Souriau 2 form
& Poincaré-Cartan 1 form

Blaise Pascal

Rappel de Souriau: La gaussienne (multivariée) est une densité à Maximum d'Entropie du 1er ordre

Loi gaussienne multivariée paramétrée par les moments

$$p_{\hat{\xi}}(\xi) = \frac{1}{(2\pi)^{n/2}\det(R)^{1/2}} e^{-\frac{1}{2}(z-m)^T R^{-1}(z-m)}$$

$$\frac{1}{2}(z-m)^T R^{-1}(z-m) = \frac{1}{2}\left[z^T R^{-1} z - m^T R^{-1} z - z^T R^{-1} m + m^T R^{-1} m\right]$$

$$= \frac{1}{2} z^T R^{-1} z - m^T R^{-1} z + \frac{1}{2} m^T R^{-1} m$$

$$p_{\hat{\xi}}(\xi) = \frac{1}{(2\pi)^{n/2}\det(R)^{1/2} e^{\frac{1}{2} m^T R^{-1} m}} e^{-\left[-m^T R^{-1} z + \frac{1}{2} z^T R^{-1} z\right]} = \frac{1}{Z} e^{-\langle \xi, \beta \rangle}$$

La gaussienne est une densité à maximum d'Entropie du 1er ordre

$$\xi = \begin{bmatrix} z \\ zz^T \end{bmatrix} \quad \text{et} \quad \beta = \begin{bmatrix} -R^{-1} m \\ \frac{1}{2} R^{-1} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} a \\ H \end{bmatrix} \quad \text{avec} \quad \langle \xi, \beta \rangle = a^T z + z^T H z = Tr\left[z a^T + H^T z z^T\right]$$

This document may not be reproduced, modified, adapted, published, translated, in any way, in whole or in part or disclosed to a third party without the prior written consent of Thales - © Thales 2015 All rights reserved.

THALES

Densité de Gibbs et thermodynamique d'ordre supérieur

Travaux des physiciens polonais Ingarden and Jaworski

- Le modèle de gaz idéal peut être mis en défaut si le nombre de particules n'est pas assez grand (systèmes mesoscopiques), et si les interactions entre les particules ne sont pas assez faibles. Les hypothèses de Gibbs peuvent également être mise en défaut si les interactions stochastiques avec l'environnement ne sont pas suffisamment faibles.
- Ingarden en 1992 et Jaworski en 1981 ont introduit le concept de température du 2nd ordre et de températures d'ordre supérieur, en supposant une fonction de distribution qui inclut non seulement l'information de la moyenne de l'énergie mais aussi les moments d'ordres supérieurs, en particulier le 2nd moment relié aux fluctuations.
- Ingarden proposa que si l'on sait mesurer le second cumulant de l'énergie(la fluctuation de l'énergie), l'état d'équilibre n'est plus canonique, mais nécessite une seconde température d'ordre supérieure.
- Jaworski a montré que l'inférence du maximum d'entropy possède une certaine propriété de stabilité montront par rapport à l'information correspondant aux moments d'ordre supérieur des quantités extensives. **C'est un argument en faveur du principe de maximum d'entropie**:

$$P_\beta(x) = \frac{1}{Z(\beta)} e^{-\beta . H(x)} \qquad \beta = \frac{1}{k_\beta T} \quad \Rightarrow \quad P_{(\beta_1,\ldots,\beta_n)}(x) = \frac{1}{Z(\beta_1,\ldots,\beta_n)} e^{-\beta_1 . H(x) - \beta_2 (H(x)-U)^2 - \ldots - \beta_n (H(x)-U)^n}$$

This document may not be reproduced, modified, adapted, published, translated, in any way, in whole or in part or disclosed to a third party without the prior written consent of Thales - © Thales 2015 All rights reserved.

THALES

Exemple de densité à maximum d'entropie d'ordre supérieur (2/2)

2ème exemple: variable sur R^+

- Maximum d'Entropie:

$$S(P) = -\int_0^{+\infty} P(x)\log P(x)dx$$

- Sous les contraintes des moments:

$$P(x) \geq 0 \qquad \int_0^{+\infty} P(x)dx = 1 \qquad E\left(x^n\right) = \int_0^{+\infty} x^n P(x)dx = \sigma^n$$

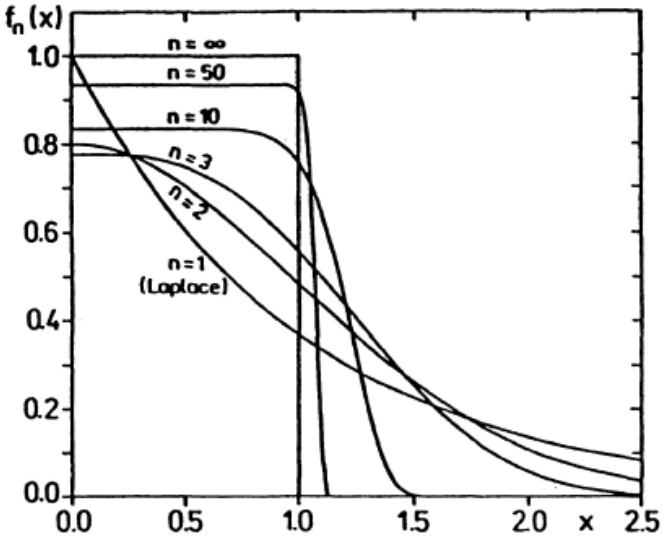
- Densité à maximum d'entropy:

$$P(x) = \frac{1}{n^{\frac{1}{n}}\sigma.\Gamma(1+1/n)}\exp\left(-\frac{x^n}{n\sigma^n}\right) = f_n(x)$$

- Températures d'ordre sup: $\beta_n = \dfrac{1}{n\sigma^n}$ $\qquad Z(\beta_n) = \dfrac{\Gamma(1+1/n)}{\beta_n^{1/n}}$

$$-\frac{\partial \log Z(\beta_k)}{\partial \beta_k} = \sigma^k = E\left(x^k\right) = \frac{n^{k/n}\sigma^k\Gamma(1+(k+1)/n)}{(k+1)\Gamma(1+1/n)}$$

$$S(P) = \log Z(\beta_n) + \frac{1}{n}$$



This document may not be reproduced, modified, adapted, published, translated, in any way, in whole or in part or disclosed to a third party without the prior written consent of Thales - © Thales 2015 All rights reserved.

THALES

Thermodynamique et densité de Gibbs d'ordre supérieur

Densité de Gibbs d'ordre supérieur

- Entropie: $S = -\int P_{(\beta_1,\ldots,\beta_n)}(x)\log P_{(\beta_1,\ldots,\beta_n)}(x)dx$
- Potentiel de Massieu: $\beta_0 = -\log Z(\beta_1,\ldots,\beta_n)$ avec $Z = \int e^{-\sum_{k=1}^{n}\beta_k x^k} dx$
- Transformée de Legendre: $S = \sum_{k=1}^{n}\beta_k E(x^k) + \log Z = \sum_{k=1}^{n}\beta_k \frac{\partial\beta_0}{\partial\beta_k} - \beta_0$
- Moments (chaleur) d'ordre supérieurs : $Q_k = E(x^k) = \frac{\partial\beta_0}{\partial\beta_k} = -\frac{\partial \log Z}{\partial\beta_k}$

$$Q_k = E(x^k) = Z^{-1}\int x^k e^{-\sum_{k=1}^{n}\beta_k x^k} dx = \int x^k P_{(\beta_1,\ldots,\beta_n)}(x)dx$$

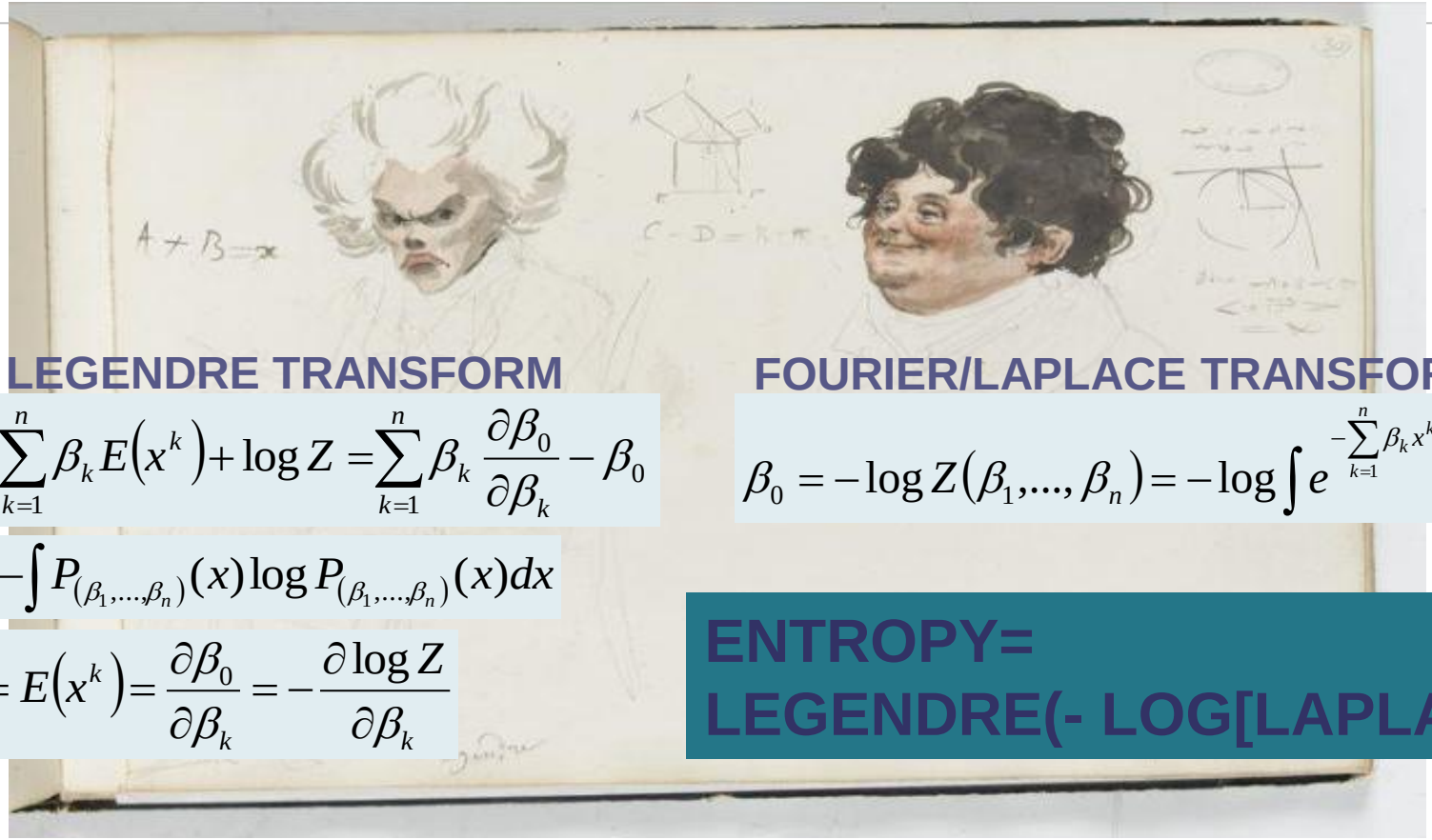
- Températures et capacité calorifique d'ordre supérieur:

$$\beta_k = \frac{\partial S(Q_1,\ldots,Q_n)}{\partial Q_k} \quad \text{and} \quad K_k = -\frac{\partial Q_k}{\partial\beta_k}$$

This document may not be reproduced, modified, adapted, published, translated, in any way, in whole or in part or disclosed to a third party without the prior written consent of Thales - © Thales 2015 All rights reserved.

THALES

Preservation de la structure de Legendre pour ce modèle



LEGENDRE TRANSFORM

$$S = \sum_{k=1}^{n} \beta_k E\left(x^k\right) + \log Z = \sum_{k=1}^{n} \beta_k \frac{\partial \beta_0}{\partial \beta_k} - \beta_0$$

$$S = -\int P_{(\beta_1,\ldots,\beta_n)}(x) \log P_{(\beta_1,\ldots,\beta_n)}(x) dx$$

$$Q_k = E\left(x^k\right) = \frac{\partial \beta_0}{\partial \beta_k} = -\frac{\partial \log Z}{\partial \beta_k}$$

FOURIER/LAPLACE TRANSFORM

$$\beta_0 = -\log Z\left(\beta_1,\ldots,\beta_n\right) = -\log \int e^{-\sum_{k=1}^{n} \beta_k x^k} dx$$

ENTROPY=
LEGENDRE(- LOG[LAPLACE])

This document may not be reproduced, modified, adapted, published, translated, in any way, in whole or in part or disclosed to a third party without the prior written consent of Thales - © Thales 2015 All rights reserved.

THALES

Extension Poly-symplectique du modèle de Souriau

- **Nous introduisons une extension poly-symplectique de la thermodynamique des groupes de Lie de Souriau basée sur le modèle d'ordre supérieur de la physique statistique de R.S. Ingarden.**

- **Ce modèle est utilisable pour l'analyse de petits jeux de données.**

- **Introduit par Christian Günther à partir d'un modèle n-symplectique, il a prouvé que la structure symplectique sur l'espace de phase est préservée, si on remplace la forme symplectique par une forme à valeur vectorielle, qu'il a appelé, polysymplectique:**

  - Gunther C., The polysymplectic Hamiltonian formalism in field theory and calculus of variations I: The local case, J. Differential Geom. n°25, pp. 23-53, 1987

This document may not be reproduced, modified, adapted, published, translated, in any way, in whole or in part or disclosed to a third party without the prior written consent of Thales - © Thales 2015 All rights reserved.

THALES

Extension polysymplectique du modèle de Souriau

- Cette extension définie une action de G sur $\overset{(n)}{\mathfrak{g}^* \times \ldots \times \mathfrak{g}^*}$ appelée actions n-coadjointe :

$$Ad_g^{*(n)} : G \times \left(\overset{(n)}{\mathfrak{g}^* \times \ldots \times \mathfrak{g}^*} \right) \to \overset{(n)}{\mathfrak{g}^* \times \ldots \times \mathfrak{g}^*}$$

$$g \times \mu_1 \times \ldots \times \mu_n \mapsto Ad_g^{*(n)}(\mu_1, \ldots, \mu_n) = \left(Ad_g^* \mu_1, \ldots, Ad_g^* \mu_n \right)$$

- Soit $\mu = (\mu_1, \ldots, \mu_n)$ un poly-moment, élément de $\overset{(n)}{\mathfrak{g}^* \times \ldots \times \mathfrak{g}^*}$, on peut définir une orbite n-coadjointe $\mathrm{O}_\mu = \mathrm{O}_{(\mu_1, \ldots, \mu_n)}$ au point μ, pour laquelle la projection canonique:

$$\mathrm{Pr}_k : \overset{(n)}{\mathfrak{g}^* \times \ldots \times \mathfrak{g}^*} \to \mathfrak{g}^* \quad , \quad (\nu_1, \ldots, \nu_n) \mapsto \nu_k$$

induit une application régulière entre l'orbite n-coadjointe O_μ et l'orbite coadjointe O_{μ_k} :

$$\pi_k : \mathrm{O}_\mu = \mathrm{O}_{(\mu_1, \ldots, \mu_n)} \to \mathrm{O}_{\mu_k}$$

qui est une submersion surjective avec $\bigcap_{k=1}^{n} Ker T\pi_k = \{0\}$

This document may not be reproduced, modified, adapted, published, translated, in any way, in whole or in part or disclosed to a third party without the prior written consent of Thales - © Thales 2015 All rights reserved.

THALES

Extension polysymplectique du modèle de Souriau

- Etandant l'approche de Souriau, l'équivariance du poly-moment est étudié pour prouver qu'il y a une unique action a(.,.) du groupe de Lie G sur $\overset{(n)}{\mathfrak{g}^* \times \ldots \times \mathfrak{g}^*}$ pour qui l'application polymoment avec $x \in M$ et $g \in G$: $J^{(n)} = \left(J^1, \ldots, J^n\right) : M \to \overset{(n)}{\mathfrak{g}^* \times \ldots \times \mathfrak{g}^*}$

  qui vérifie : $J^{(n)}\left(\Phi_g(x)\right) = a(g, J^{(n)}(x)) = Ad_g^{*(n)}\left(J^{(n)}(x)\right) + \theta^{(n)}(g)$

  avec $Ad_g^{*(n)}\left(J^{(n)}(x)\right) = \left(Ad_g^* J^1, \ldots, Ad_g^* J^n\right)$ et $\theta^{(n)}(g) = \left(\theta^1(g), \ldots, \theta^n(g)\right)$
- $\theta^{(n)}(g)$ est un 1-cocycle polysymplectique
- On peut aussi définir un 2-cocycle polysymplectique:

  $\tilde{\Theta}^{(n)} = \left(\tilde{\Theta}^1, \ldots, \tilde{\Theta}^n\right)$ avec $\tilde{\Theta}^k(X, Y) = \left\langle \Theta^k(X), Y \right\rangle = J^k_{[X,Y]} - \left\{ J^k_X, J^k_Y \right\}$

  où $\Theta^k(X) = T_e \theta^k\left(X(e)\right)$
- Lamétrique de Souriau-Fisher poly-symplectic est donnée par :

$$g_\beta([\beta, Z_1], Z_2) = diag\left[\tilde{\Theta}_{\beta_k}(Z_1, Z_2)\right]_k \quad , \quad \forall Z_1 \in \mathfrak{g}, \forall Z_2 \in \mathrm{Im}\left(ad_\beta(.)\right), \beta = \left(\beta_1, \ldots, \beta_n\right)$$

$$\tilde{\Theta}_{\beta_k}(Z_1, Z_2) = -\frac{\partial \Phi\left(\beta_1, \ldots, \beta_n\right)}{\partial \beta_k} = \tilde{\Theta}^k(Z_1, Z_2) + \left\langle Q_k, ad_{Z_1}(Z_2) \right\rangle$$

This document may not be reproduced, modified, adapted, published, translated, in any way, in whole or in part or disclosed to a third party without the prior written consent of Thales - © Thales 2015 All rights reserved.

THALES

Extension polysymplectique du modèle de Souriau

- Comparativement au modèle de Souriau, la chaleur polysymplectique est:

$$Q_k = \frac{\partial \Phi(\beta_1,\ldots,\beta_n)}{\partial \beta_k} = \frac{\int_M U^{\otimes k}(\xi).e^{-\sum_{k=1}^{n}\langle \beta_k, U^{\otimes k}(\xi)\rangle} d\omega}{\int_M e^{-\sum_{k=1}^{n}\langle \beta_k, U^{\otimes k}(\xi)\rangle} d\omega} \quad \text{avec} \quad Q = (Q_1,\ldots,Q_n) \in \mathfrak{g}^* \times \overset{(n)}{\ldots} \times \mathfrak{g}^*$$

- Avec la fonction caractéristique: $\Phi(\beta_1,\ldots,\beta_n) = -\log \int_M e^{-\sum_{k=1}^{n}\langle \beta_k, U^{\otimes k}(\xi)\rangle} d\omega$

- On étend le résultat de Souriau prouvant que $\int_M U^{\otimes k}(\xi).e^{-\langle \beta_k, U^{\otimes k}(\xi)\rangle} d\omega$ est localement normalement convergent en posant $\left\| U^{\otimes k} \right\| = \underset{U}{Sup}\langle E, U\rangle^k$, une norme multi-linéaire et où $U^{\otimes k} = U \otimes \overset{(k)}{U} \ldots \otimes U$ est un produit tensoriel.

- L'Entropie est définie par la transformée de Legendre de la fonction caractéristique:

$$S(Q_1,\ldots,Q_n) = \sum_{k=1}^{n}\langle \beta_k, Q_k\rangle - \Phi(\beta_1,\ldots,\beta_n) \quad \text{avec} \quad \beta_k = \frac{\partial S(Q_1,\ldots,Q_n)}{\partial Q_k}$$

This document may not be reproduced, modified, adapted, published, translated, in any way, in whole or in part or disclosed to a third party without the prior written consent of Thales - © Thales 2015 All rights reserved.

THALES

Extension polysymplectique du modèle de Souriau

- La densité de Gibbs peut être étendue en fonction des températures géométriques d'ordre supérieur:

$$p_{Gibbs}(\xi) = e^{\Phi(\beta_1,\dots,\beta_n) - \sum_{k=1}^{n} \langle \beta_k, U^{\otimes k}(\xi) \rangle} = \frac{e^{-\sum_{k=1}^{n} \langle \beta_k, U^{\otimes k}(\xi) \rangle}}{\int_M e^{-\sum_{k=1}^{n} \langle \beta_k, U^{\otimes k}(\xi) \rangle} d\omega}$$

avec $U^{\otimes k} = U \otimes \overset{(k)}{U} \dots \otimes U$ et $\Phi(\beta_1,\dots,\beta_n) = -\log \int_M e^{-\sum_{k=1}^{n} \langle \beta_k, U^{\otimes k}(\xi) \rangle} d\omega$

où $S(Q_1,\dots,Q_n) = \sum_{k=1}^{n} \langle \beta_k, Q_k \rangle - \Phi(\beta_1,\dots,\beta_n)$ with $\beta_k = \dfrac{\partial S(Q_1,\dots,Q_n)}{\partial Q_k}$

$$\begin{cases} Q_k = \dfrac{\partial \Phi(\beta_1,\dots,\beta_n)}{\partial \beta_k} & \text{with} \quad Q = (Q_1,\dots,Q_n) \in \mathfrak{g}^* \times \overset{(n)}{\dots} \times \mathfrak{g}^* \\ \beta_k = \dfrac{\partial S(Q_1,\dots,Q_n)}{\partial Q_k} & \text{with} \quad \beta = (\beta_1,\dots,\beta_n) \in \mathfrak{g} \times \overset{(n)}{\dots} \times \mathfrak{g} \end{cases}$$

This document may not be reproduced, modified, adapted, published, translated, in any way, in whole or in part or disclosed to a third party without the prior written consent of Thales - © Thales 2015 All rights reserved.

THALES

THALES

Radar Micro-Doppler Signal Encoding in Siegel Unit Poly-Disk for Machine Learning in Fisher Metric Space

ALEAE GEOMETRIA

Géométrie du hasard

Blaise Pascal

Rationale

Micro-Doppler Analysis: New Advanced Function for Naval Fixed Antenna Panels Multi-Mission Radar

- In Naval Domain, new trend is emerging with general use of Fixed Antenna Panels Radar to face new emerging threats (Hypersonic Cruise Missile, Hypersonic Glide Vehicule, 5th Generation stealth Fighter and UCAV, Drones Swarm, …)
- Fixed Panel with agile electronic beam scanning and wider band (higher range resolution allowing Doppler analysis of individual moving/rotating elements) open the door to **dedicated long waveforms adapted for Micro-Doppler Analysis**
- Micro-Doppler Analysis could be used for:
  - **Non Cooperative Target Recognition** (NCTR): drones, helicopter, fighter and birds
  - **« Pathological » Clutter Mapping** (turbulent rain, wind burst on trees, sea braking wave, sea spikes, windfarm, …)
  - **False Alarm Filtering at low Doppler** to detect slow moving targets
  - **Kill Assessment** on Debris
  - **Wake-Vortex Detection** and Classification

This document may not be reproduced, modified, adapted, published, translated, in any way, in whole or in part or disclosed to a third party without the prior written consent of Thales - © Thales 2015 All rights reserved.

THALES

Machine Learning & Micro-Doppler Space of Coding

- **From a time series of M raw I&Q data, we split the signal in sliding consecutive N subsets of P raw I&Q data.**

- **In a 1st step, we assume that the signal is locally stationary on each subset, and we estimate the Toeplitz Hermitian Positive Definite (THPD) covariant matrix by regularized Burg algorithm .**

- **In a 2nd step, we consider the time series of THPD matrices to estimate a Burg-Like Matrix Autoregressive model based on MOPUC (Matrix Orthogonal Polynomial on the Unit Circle) theory:**
  - Based on matrix extension of Trench/Verblunski theorem, we can parameterized associated (TBTHPD) Toeplitz-Block-Toeplitz HPD matrix by: $\left(R_0, \left\{A_k^k\right\}_{k=1}^{N-1}\right) \in THPD \times SD^{N-1}$
  - where $R_0 \in THPD_n$ is an Toeplitz Hermitian Positive Definite matrix, and $A_k^k \in SD$, $k = 1,\ldots, N-1$ are the Reflection/Verblunsky Matrix coefficients in Siegel Unit Disk $SD = \left\{Z / ZZ^+ < I\right\}$ because $A_k^k \left(A_k^k\right)^+ < I$

This document may not be reproduced, modified, adapted, published, translated, in any way, in whole or in part or disclosed to a third party without the prior written consent of Thales - © Thales 2015 All rights reserved.

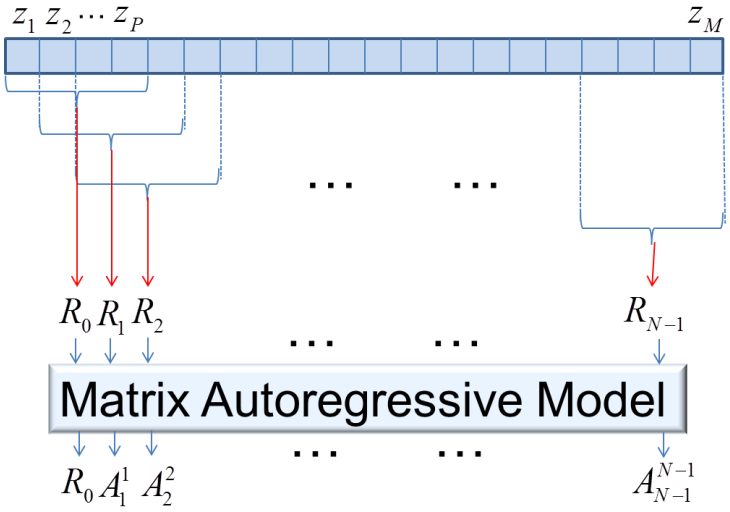
THALES

Coding Micro-Doppler Data in Siegel Poly-Disk

$$\{z_1,\ldots z_p,\ldots,z_M\} \underset{split}{\Rightarrow} \{\{z_1,\ldots z_p\},\{z_{p+1},\ldots z_{2p}\},\ldots,\{z_{M-p+1},\ldots z_M\}\}$$

Time series $\{R_0,\ldots R_{N-1}\}$ as TBTHPD matrix

$$R_{N,p} = \begin{bmatrix} R_0 & R_1 & \cdots & R_{N-1} \\ R_1^+ & R_0 & \ddots & \vdots \\ \vdots & \ddots & \ddots & R_1 \\ R_{N-1}^+ & \cdots & R_1^+ & R_0 \end{bmatrix}$$



Matrix Verblunsky/Trench Theorem

$$\{R_0, A_1^1,\ldots,A_{N-1}^{N-1}\} \quad \text{with} \quad A_k^k \in SD = \{Z \,/\, ZZ^+ < I\}$$

d, in any way
hales 2015 A
ocument
or disclose

THALES

Extension to Toeplitz Block Toeplitz Hermitian PD Matrices

Considering Toeplitz-Block-Toeplitz Matrices :

$$R_{p,n+1} = \begin{bmatrix} R_0 & R_1 & \cdots & R_n \\ R_1^+ & R_0 & \ddots & \vdots \\ \vdots & \ddots & \ddots & R_1 \\ R_n^+ & \cdots & R_1^+ & R_0 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} R_{p,n} & \tilde{R}_n \\ \tilde{R}_n^+ & R_0 \end{bmatrix}$$

$$\tilde{R}_n = V \begin{bmatrix} R_1 \\ \vdots \\ R_n \end{bmatrix}^* \quad \text{with} \quad V = \begin{bmatrix} 0 & \cdots & 0 & J_p \\ \vdots & \iddots & \iddots & 0 \\ 0 & J_p & \iddots & \vdots \\ J_p & 0 & \cdots & 0 \end{bmatrix}$$

Efficient Inversion of Toeplitz-Block Toeplitz Matrix

MATI WAX AND THOMAS KAILATH, FELLOW, IEEE

This document may not be reproduced, modified, adapted, published, translated, in any way, in whole or in part or disclosed to a third party without the prior written consent of Thales - © Thales 2015 All rights reserved.

THALES

Extension of Trench/Verblunsky Theorem for TBTHPD Matrices

Every Toeplitz-Block-Toeplitz HPD matrix can be parametrized by Matrix Verblunsky Coefficients:

$$R_{p,n+1}^{-1} = \begin{bmatrix} \alpha_n & \alpha_n.\widehat{A}_n^+ \\ \alpha_n.\widehat{A}_n & R_{p,n}^{-1} + \alpha_n.\widehat{A}_n.\widehat{A}_n^+ \end{bmatrix}$$

with $\alpha_n^{-1} = \left[1 - A_n^n A_n^{n+}\right].\alpha_{n-1}^{-1}, \quad \alpha_0^{-1} = R_0$

$$R_{p,n+1} = \begin{bmatrix} \alpha_n^{-1} + \widehat{A}_n^+.R_{p,n}.\widehat{A}_n & -\widehat{A}_n^+.R_{p,n} \\ -R_{p,n}.\widehat{A}_n & R_{p,n} \end{bmatrix}$$

and $\widehat{A}_n = \begin{bmatrix} A_1^1 \\ \vdots \\ A_n^n \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \widehat{A}_{n-1} \\ 0_p \end{bmatrix} + A_n^n.\begin{bmatrix} J_p A_{n-1}^{n-1*} J_p \\ \vdots \\ J_p A_1^{n-1*} J_p \\ I_p \end{bmatrix}$

Extension of Trench/Verblunsky Theorem: Existence of Diffeomorphism φ:

$$\varphi : TBTHPD_{n\times n} \to THPD_n \times SD^{n-1}$$

$$R \mapsto \left(R_0, A_1^1, \ldots, A_{n-1}^{n-1}\right)$$

with $SD = \left\{Z \in Herm(n) / ZZ^+ < I_n\right\}$

This document may not be reproduced, modified, adapted, published, translated, in any way, in whole or in part or disclosed to a third party without the prior written - © Thales 2015 All rights reserved.

THALES

Information Geometry Metric: Entropic Kähler Potential

Kähler potential defined by Hessian of multi-channel/Multi-variate entropy :

$$\tilde{\Phi}(R_{p,n}) = -\log(\det R_{p,n}) + cste = -Tr(\log R_{p,n})\mu + cste$$

$$\Rightarrow g_{i\bar{j}} = Hess[\phi(R_{p,n})]$$

$$\tilde{\Phi}(R_{p,n}) = \sum_{k=1}^{n-1}(n-k).\log\det\left[I_n - A_k^k A_k^{k+}\right] + n.\log[\pi.e.\det R_0]$$

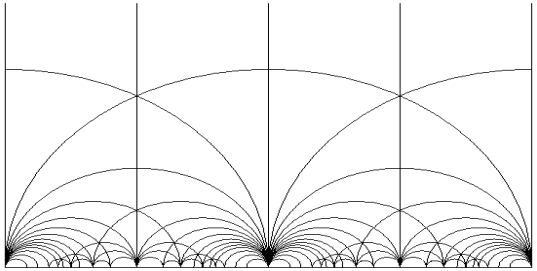
$$ds^2 = n.\boxed{Tr\left[\left(R_0^{-1}dR_0\right)^2\right]} + \sum_{k=1}^{n-1}(n-k)Tr\left[\left(I_n - A_k^k A_k^{k+}\right)^{-1} dA_k^k \left(I_n - A_k^{k+} A_k^k\right)^{-1} dA_k^{k+}\right]$$

We recover metric for THPD matrix !!

This document may not be reproduced, modified, adapted, published, translated, in any way, in whole or in part or disclosed to a third pa... or written consent of Thales - © Thales 2015 All rights reserved.

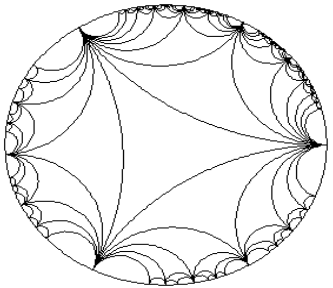
THALES

WHY WE RECOVER SIEGEL DISK METRIC



Poincaré Upper half plane

$$w = \frac{z-i}{z+i}$$



Poincaré Unit Disk $ww^* < 1$

$$ds^2 = \frac{dx^2 + dy^2}{y^2} = \frac{|dz|^2}{y^2}$$

$$ds^2 = y^{-1} dz y^{-1} dz^*$$

with $z = x + iy$ and $y > 0$

$$ds^2 = \frac{|dw|^2}{\left(1 - |w|^2\right)^2}$$

$$ds^2 = \left(1 - ww^*\right)^{-1} dw \left(1 - ww^*\right)^{-1} dw^*$$

Siegel Upper half-plane

$$W = (Z - iI)(Z + iI)^{-1}$$

Segel Unit Disk $WW^+ < I$

$$ds^2 = Tr\left(Y^{-1} dZ Y^{-1} dZ^+\right)$$

$$ds^2 = Tr\left[\left(I - WW^+\right)^{-1} dW \left(I - W^+ W\right)^{-1} dW^+\right]$$

with $Z = X + iY$

$X \in Herm(n, C)$ and $Y \in HPD(n, C)$

This document may not be reproduced, modified, adapted, published, translated, in any way, in whole or in part or disclosed to a third party without the prior written consent of Thales - © Thales 2015 All rights reserved.

THALES

Distance in the Siegel Unit Disk

Automorpisms of Siegel Unit Disks SD_n are given by:

$$\Sigma = \Phi_{Z_0}(Z) = \left(I - Z_0 Z_0^+\right)^{-1/2}(Z - Z_0)\left(I - Z_0^+ Z\right)^{-1}\left(I - Z_0^+ Z_0\right)^{1/2}$$

All automorphisms are given by:

$$\forall \Psi \in Aut(SD_n), \exists U \in U(n,C) / \Psi(Z) = U \Phi_{Z_0}(Z) U^t$$

Distance is:

$$\forall Z, W \in SD_n, d(Z,W) = \frac{1}{2}\log\left(\frac{1 + \|\Phi_Z(W)\|}{1 - \|\Phi_Z(W)\|}\right)$$

Inverse of automorphisms are given by:

$$G = \left(I - Z_0 Z_0^+\right)^{1/2} \Sigma \left(I - Z_0^+ Z_0\right)^{-1/2} = (Z - Z_0)\left(I - Z_0^+ Z\right)^{-1}$$

$$\Rightarrow \begin{cases} Z = \Phi_{Z_0}^{-1}(\Sigma) = (G Z_0^+ + I)^{-1}\left(G + Z_0^+\right) \\ \text{with } G = \left(I - Z_0 Z_0^+\right)^{1/2} \Sigma \left(I - Z_0^+ Z_0\right)^{-1/2} \end{cases}$$

This document may not be reproduced, modified, adapted, published, translated, in any way, in whole or in part or disclosed to a third party without the prior written consent of Thales - © Thales 2015 All rights reserved.

THALES

Distance in Siegel Upper Half plane

Distance in the upper half plane:

$$Z = X + iY \in SH_n \quad \text{with} \quad X \neq 0$$

$$d^2_{Siegel}(Z_1, Z_2) = \left(\sum_{k=1}^{n} \log^2 \left(\frac{1+\sqrt{\lambda_k}}{1-\sqrt{\lambda_k}} \right) \right) \quad \text{with} \quad Z_1, Z_2 \in SH_n$$

with $\det\left(R(Z_1, Z_2) - \lambda . I\right) = 0$

$$R(Z_1, Z_2) = (Z_1 - Z_2)(Z_1 - \overline{Z}_2)^{-1}(\overline{Z}_1 - \overline{Z}_2)(\overline{Z}_1 - Z_2)^{-1}$$

Particular case of purely imaginary axis:

$$Z = iR \quad \text{with} \quad R > 0$$

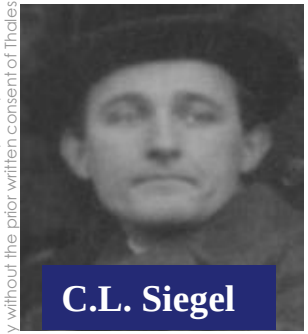
$$d^2(R_1, R_2) = \left\| \log\left(R_1^{-1/2} . R_2 . R_1^{-1/2}\right) \right\|^2 = \sum_{k=1}^{n} \log^2(\lambda_k)$$

$$\det(R_2 - \lambda R_1) = 0$$

This document may not be reproduced, modified, adapted, published, translated, in any way, in whole or in part or disclosed to a third party without the prior written consent of Thales - © Thales 2015 All rights reserved.

THALES

Geometry of Siegel Upper half plane by Siegel, Hua and Berezin



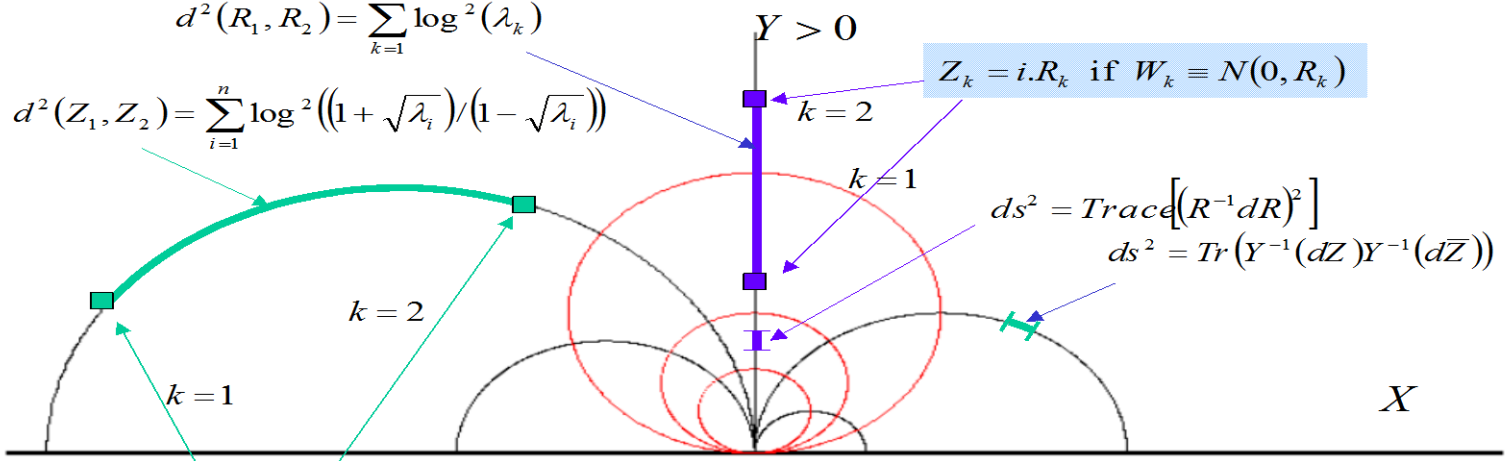
Siegel Upper Half Space

$$SH_n = \{Z = X + iY \in Sym(n, C) / \mathrm{Im}(Z) = Y > 0\}$$

$$\det\left(R_1^{-1/2}.R_2.R_1^{-1/2} - \lambda.I\right) = 0$$

$$d^2(R_1, R_2) = \sum_{k=1}^{n} \log^2(\lambda_k)$$

$$d^2(Z_1, Z_2) = \sum_{i=1}^{n} \log^2\left(\left(1+\sqrt{\lambda_i}\right)/\left(1-\sqrt{\lambda_i}\right)\right)$$



$$Z_k = X_k + i.Y_k$$

$$R(Z_1, Z_2) = (Z_1 - Z_2)(Z_1 - \overline{Z}_2)^{-1}(\overline{Z}_1 - \overline{Z}_2)(\overline{Z}_1 - Z_2)^{-1}$$

$$\det(R(Z_1, Z_2) - \lambda.I) = 0$$

This document may not be reproduced, modified, adapted, published, translated, in any way, in whole or in part or disclosed to a third party without the prior written consent of Thales - © Thales 2015 All rights reserved.

THALES

Numerical scheme for Fréchet Mean Computation with this distance

$$\mathcal{B}_{\mathcal{S}}(A_1,\dots,A_k) = \arg\min_{X\in\mathcal{S}} \frac{1}{2}\sum_{i=1}^{k} d^2_{\mathcal{S}}(X,A_i).$$

$$\begin{array}{rcl} \mathcal{T}_n^+ & \to & \mathbb{R}^{++}\times\mathbb{D}^{n-1} \\ R_n & \mapsto & (p_0,\mu_1,\dots,\mu_{n-1}), \end{array}$$

$$\Phi(R_n) = \log\left(\det R_n^{-1}\right) - \log(\pi e),$$

$$\Phi(R_n) = -n\log\left(p_0\right) - \sum_{\ell=1}^{n-1}(n-\ell)\log\left(1-|\mu_\ell|^2\right) - \log(\pi e),$$

$$[H]_{i,j} = \frac{\partial^2\Phi}{\partial\xi_i^{(n)}\overline{\partial}\xi_j^{(n)}}.$$

$$\begin{aligned} \mathrm{d}s^2 &= \mathrm{d}\xi^{(n)^H} H\,\mathrm{d}\xi^{(n)} \\ &= n\frac{\mathrm{d}p_0^2}{p_0^2} + \sum_{\ell=1}^{n-1}(n-\ell)\frac{|\mathrm{d}\mu_\ell|^2}{(1-|\mu_\ell|^2)^2}. \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} d^2_{\mathcal{T}_n^+}(T_1,T_2) &= d^2_{\mathcal{T}_n^+}\left((p_{0,1},\mu_{1,1},\dots,\mu_{n-1,1}),(p_{0,2},\mu_{1,2},\dots,\mu_{n-1,2})\right) \\ &= n\log^2\left(\frac{p_{0,2}}{p_{0,1}}\right) + \sum_{\ell=1}^{n-1}\frac{n-\ell}{4}\log^2\left(\frac{1+\left|\frac{\mu_{\ell,1}-\mu_{\ell,2}}{1-\mu_{\ell,1}\mu_{\ell,2}^*}\right|}{1-\left|\frac{\mu_{\ell,1}-\mu_{\ell,2}}{1-\mu_{\ell,1}\mu_{\ell,2}^*}\right|}\right). \end{aligned}$$

$$\begin{array}{rcl} \mathcal{B}^+_{n,N} & \to & \mathcal{P}_N\times\mathcal{SD}_N^{n-1} \\ \widetilde{R}_n & \mapsto & (P_0,\Omega_1,\dots,\Omega_{n-1}), \end{array}$$

$$\Phi\left(\widetilde{R}_n\right) = -n\log\left(\det P_0\right) - \sum_{\ell=1}^{n-1}(n-\ell)\log\left(\det\left(I-\Omega_\ell\Omega_\ell^H\right)\right) - \log(\pi e),$$

$$\begin{aligned} \mathrm{d}s^2 =& n\,\mathrm{trace}\left(P_0^{-1}\,\mathrm{d}P_0 P_0^{-1}\,\mathrm{d}P_0\right) \\ &+ \sum_{\ell=1}^{n-1}(n-\ell)\,\mathrm{trace}\left(\left(I-\Omega_\ell\Omega_\ell^H\right)^{-1}\mathrm{d}\Omega_\ell\left(I-\Omega_\ell^H\Omega_\ell\right)^{-1}\mathrm{d}\Omega_\ell^H\right). \end{aligned}$$

KU Leuven
Department of Computer Science
Celestijnenlaan 200A – B-3001 Heverlee (Belgium)

THE KÄHLER MEAN OF BLOCK-TOEPLITZ MATRICES WITH TOEPLITZ STRUCTURED BLOCKS

B. JEURIS† AND R. VANDEBRIL†

Abstract. When computing an average of positive definite (PD) matrices, the preservation of additional matrix structure is desirable for interpretations in applications. An interesting and widely present structure is that of PD Toeplitz matrices, which we endow with a geometry originating in signal processing theory. As an averaging operation, we consider the barycenter, or minimizer of the sum of squared intrinsic distances. The resulting barycenter, the Kähler mean, is discussed along with its origin. Also, a generalization of the mean towards PD (Toeplitz-Block) Block-Toeplitz matrices is discussed. For PD Toeplitz-Block Block-Toeplitz matrices, we derive the generalized barycenter, or generalized Kähler mean, and a greedy approximation. This approximation is shown to be close to the generalized mean with a significantly lower computational cost.

Key words. matrix mean, Toeplitz-Block Block-Toeplitz matrices, differential geometry, optimization on manifolds, Riemannian manifolds

Jeuris, B., Vandebril, R. (2016). The Kähler mean of block-Toeplitz matrices with Toeplitz structured blocks. SIAM Journal on Matrix Analysis and Applications
https://lirias.kuleuven.be/handle/123456789/533797

$$d_K(\Omega,\Psi) = \frac{1}{2}\log\left(\frac{1+\|\phi_\Omega(\Psi)\|_2}{1-\|\phi_\Omega(\Psi)\|_2}\right),$$

$$\left[\phi_\Omega(\Psi) = \left(I-\Omega\Omega^H\right)^{-\frac{1}{2}}(\Psi-\Omega)\left(I-\Omega^H\Psi\right)^{-1}\left(I-\Omega^H\Omega\right)^{\frac{1}{2}},\right.$$

This document, modified, adapted, published, translated, in any way, in whole or in part or distributed without the prior written consent of Thales - © Thales 2015 All rights reserved.

THALES

THALES

Machine Learning Approach: Unsupervised Method by « Mean-Shift » extended on Riemannian Manifold

ALEAE GEOMETRIA

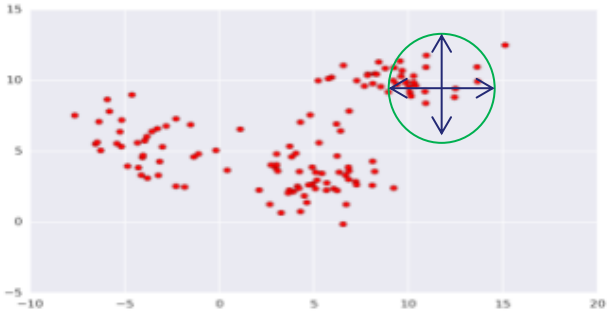
Géométrie du hasard

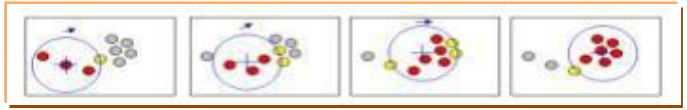
Blaise Pascal

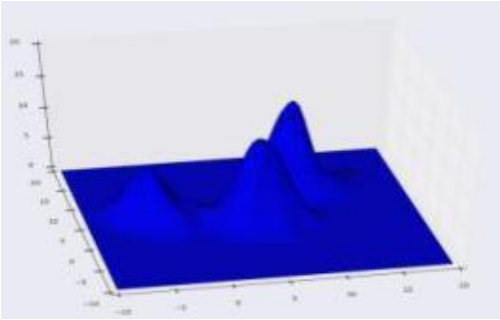
Classical « Kernel Method » for density estimation & « Mean-Shift » for clustering

Kernel Method for non-parametric density estimation

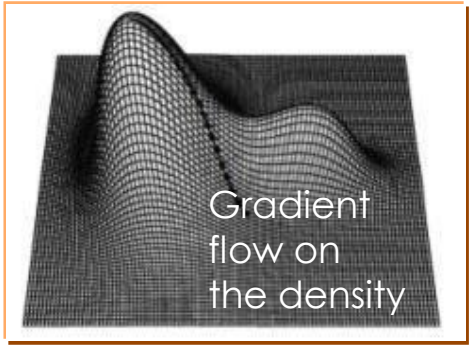
- Kernel Method: selection of an optimal kernel size and counting of points per cell

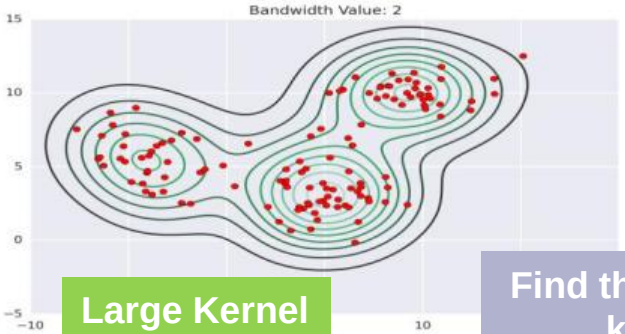






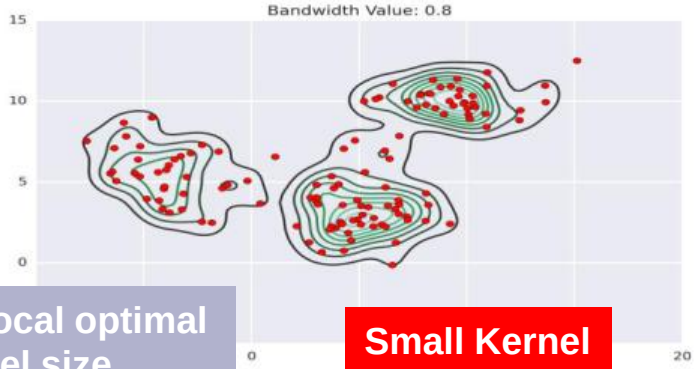
- Mean-Shift: gradient flot on the density to identify mode





Large Kernel
(3 classes)

Find the local optimal
kernel size



Small Kernel
(7 classes)

This document may not be reproduced, modified, adapted, published, translated, in any way, in whole or in part or disclosed to a third party without the prior written consent of Thales - © Thales 2015 All rights reserved.

Riemannian Kernel Density Estimation of Doppler Spectrum Statistics

- **We introduce a kernel density estimation for Riemannian manifold on the elements of the product $(P_0, \mu_1, \ldots, \mu_n) \in R^+ x D_n$, to estimate density for Doppler Spectrum.**

- **The specificity of the hyperbolic space enables to adapt the different density estimation methods at a reasonable cost.**

- **Recently convergence rates for the kernel density estimation without the compact assumption have been introduced, which enables the use of Gaussian-type kernels.**

- **Reference:**

  - Emmanuel Chevallier, Probability density estimation on the hyperbolic space applied to radar processing, SPRINGER, GSI'15 Lecture Note
  - https://hal.archives-ouvertes.fr/hal-01121090/document

This document may not be reproduced, modified, adapted, published, translated, in any way, in whole or in part or disclosed to a third party without the prior written consent of Thales - © Thales 2015 All rights reserved.

THALES

Riemannian Kernel Method of Density Estimation

- Let $K : R^+ \to R^+$ be a map which verifies the following properties:

$$\int_{R^n} K(\|x\|).dx = 1,\ \int_{R^n} x.K(\|x\|).dx = 0,\ K(x>1) = 0,\ Sup(K(x)) = 0$$

- Given a point $p \in H_n$ (the hyperbolic space of dimension *n*; H_2=D), the exponential map $\exp_p$ defines a new injective parametrization of H_n . The Lebesgue measure of the tangent space is noted Leb_p . The function $\theta_p : H_n \to R^+$ defined by:

$$\theta_p : q \to \theta_p(q) = \frac{dvol}{d\exp_p^*(Leb_p)}(q)$$

is the density of the Riemannian measure with respect to the image of the Lebesgue measure of T_pH_n by $\exp_p$. Given *K* and a scaling parameter λ, the estimator of *f* proposed by Pelletier is defined by:

$$\hat{f}_k = \frac{1}{k}\sum_i \frac{1}{\lambda^n}\frac{1}{\theta_{x_i}(x)} K\left(\frac{d(x,x_i)}{\lambda}\right)$$

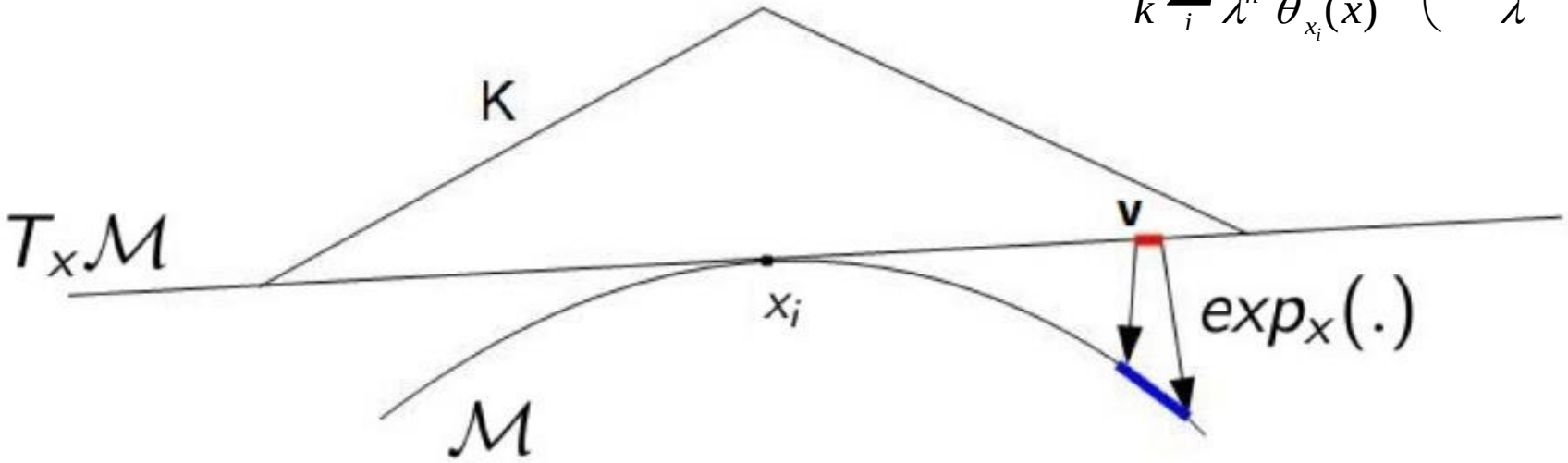
This document may not be reproduced, modified, adapted, published, translated, in any way, in whole or in part or disclosed to a third party without the prior written consent of Thales - © Thales 2015 All rights reserved.

THALES

Riemannian Kernel Method of Density Estimation

Volume change due to Exponential map

$$\hat{f}_k = \frac{1}{k}\sum_i \frac{1}{\lambda^n}\frac{1}{\theta_{x_i}(x)} K\left(\frac{d(x,x_i)}{\lambda}\right)$$



$$\theta_p : q \to \theta_p(q) = \frac{dvol}{d\exp_p^*(Leb_p)}(q)$$

This document may not be reproduced, modified, adapted, published, translated, in any way, in whole or in part or disclosed to a third party without the prior written consent of Thales - © Thales 2015 All rights reserved.

THALES

Riemannian Kernel Method of Density Estimation

- Given $p_{ref} \in H_n$, μ_k the empirical measure and "*" the natural convolution on homogeneous spaces, let:

$$\tilde{K}(q) = \frac{1}{k\lambda^n} \frac{1}{\theta_{p_{ref}}(q)} K\left(\frac{d(p_{ref}, q)}{\lambda}\right) \quad \text{then} \quad \hat{f}_k = \mu_k * \tilde{K}$$

- One still needs to obtain an explicit expression of θ_p . Given a reference point *p*, the point of polar coordinates (*r*, *a*) of the hyperbolic space H_n is defined as point at distance *r* of *p* on the geodesic with initial direction $\alpha \in S^{n-1}$. Since H_n is isotropic the expression the length element in polar coordinates depends only on *r*. Expressed in polar coordinates the hyperbolic metric expression is:

$$g_{H_n} = dr^2 + \sinh(r)^2 . g_{S^{n-1}}$$

- The polar coordinates are a polar expression of the exponential map at *p*. In an adapted orthonormal basis of the tangent plane the metric takes the following form:

$$G = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & \sinh(r)^2 \frac{1}{r^2} I_{n-1} \end{pmatrix}$$

This document may not be reproduced, modified, adapted, published, translated, in any way, in whole or in part or disclosed to a third party without the prior written consent of Thales - © Thales 2015 All rights reserved.

THALES

Riemannian Kernel Method of Density Estimation

- the metric takes the following form:

$$G = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & \sinh(r)^2 \frac{1}{r^2} I_{n-1} \end{pmatrix}$$

- where G is the matrix of the metric and I_{n-1} is the identity matrix of size n−1. The volume $dvol$ is given by:

$$dvol = \sqrt{|G|}.d\exp_p^*(Leb_p) = \left(\frac{1}{r}\sinh(r)\right)^{n-1} d\exp_p^*(Leb_p)$$

- where *r = d(p, q)*. Finally, one obtains:

$$\theta_p(q) = \left(\frac{1}{r}\sinh(r)\right)^{n-1} \qquad \hat{f}_k = \frac{1}{k}\sum_i \frac{1}{\lambda^n} \frac{d(x,x_i)^{n-1}}{\sinh\left(d(x,x_i)\right)^{n-1}} K\left(\frac{d(x,x_i)}{\lambda}\right)$$

This document may not be reproduced, modified, adapted, published, translated, in any way, in whole or in part or disclosed to a third party without the prior written consent of Thales - © Thales 2015 All rights reserved.

THALES

Extension of Kernel Method for Siegel Unit Disk

Extension in Siegel Unit Disk:

$$\frac{1}{\theta_{Z_1}(Z_2)}\mathcal{K}\left(\frac{d(Z_1,Z_2)}{r}\right)=\prod_{i<j}\frac{\tau_i-\tau_j}{\sinh(\tau_i-\tau_j)}\prod_{i\leq j}\frac{\tau_i+\tau_j}{\sinh(\tau_i+\tau_j)}\mathcal{K}\left(\frac{(2\sum\tau_i^2)^{1/2}}{r}\right)$$

$$\theta_{Z_1}(Z_2)=\theta_0(g_{Z_1}^{-1}.Z_2) \qquad \theta_0(Z)=\prod_{i<j}\frac{\sinh(\tau_i-\tau_j)}{\tau_i-\tau_j}\prod_{i\leq j}\frac{\sinh(\tau_i+\tau_j)}{\tau_i+\tau_j}$$

τ_i are diagonal elements of $H_{g_{Z_1}^{-1}.Z_2}$:

$$H_Z=\begin{pmatrix}\tau_1 & & & & & \\ & \ddots & & & & \\ & & \tau_n & & & \\ & & & -\tau_1 & & \\ & & & & \ddots & \\ & & & & & -\tau_n\end{pmatrix} \qquad Z\in\mathcal{D}_n \qquad Z=UPU^t \qquad P=\begin{pmatrix}th(\tau_1) & & \\ & \ddots & \\ & & th(\tau_n)\end{pmatrix}$$

$$g_Z=\begin{pmatrix}U & 0\\ 0 & \overline{U}\end{pmatrix}\cdot\begin{pmatrix}A_0 & B_0\\ A_0 & B_0\end{pmatrix} \qquad A_0=\begin{pmatrix}ch(\tau_1) & & \\ & \ddots & \\ & & ch(\tau_n)\end{pmatrix},\ B_0=\begin{pmatrix}sh(\tau_1) & & \\ & \ddots & \\ & & sh(\tau_n)\end{pmatrix}$$

This document may not be reproduced, modified, adapted, published, translated, in any way, in whole or in part or disclosed to a third party without the prior written consent of Thales - © Thales 2015 All rights reserved.

THALES

Extension of Kernel Method for Siegel Unit Disk

Density in Siegel Unit Disk using Cartan Coordinates:

$$\hat{f}_k = \frac{1}{k}\sum_j \frac{1}{r^n}\prod_{i<j}\frac{\tau_i-\tau_j}{\sinh\left(\tau_i-\tau_j\right)}\prod_{i\le j}\frac{\tau_i+\tau_j}{\sinh\left(\tau_i+\tau_j\right)}K\left(\frac{\left(2\sum_i \tau_j^2\right)^{1/2}}{r}\right)$$

Deduced from Hua-Cartan Decomposition on Siegel Unit Disk (Lemma of Hua for radial coordinates in Siegel Disk):

$$\tau = \begin{bmatrix}\tau_1 & \tau_2 & \cdots & \tau_n\end{bmatrix} \text{ with } 0 \le \tau_n \le \tau_{n-1} \le \cdots \le \tau_1$$

$$A_0(\tau) = diag\begin{bmatrix}ch(\tau_1) & ch(\tau_2) & \cdots & ch(\tau_n)\end{bmatrix}$$

$$B_0(\tau) = diag\begin{bmatrix}sh(\tau_1) & sh(\tau_2) & \cdots & sh(\tau_n)\end{bmatrix}$$

$$g = \begin{bmatrix}A & B\\ B^* & A^*\end{bmatrix} \in Sp(n)\ ,\ g = \begin{bmatrix}U^t & 0\\ 0 & U^+\end{bmatrix}\begin{bmatrix}A_0 & B_0\\ B_0 & A_0\end{bmatrix}\begin{bmatrix}V^* & 0\\ 0 & V\end{bmatrix}$$

there exist U and V unitary complex matrices of order n

$$\begin{cases}A = U^t A_0(\tau)V^*\\ B = U^t B_0(\tau)V\end{cases} \Rightarrow \begin{pmatrix}A_0(\tau) & B_0(\tau)\\ B_0(\tau) & A_0(\tau)\end{pmatrix} = \exp\begin{pmatrix}0 & Z_2(\tau)\\ Z_2(\tau) & 0\end{pmatrix}$$

with $Z_2(\tau) = diag\begin{bmatrix}\tau_1 & \tau_2 & \cdots & \tau_n\end{bmatrix}$

Let $Z = B\left(A^*\right)^{-1} = U^t PU,\ P^2 = B_0^2\left(A_0^{-1}\right)^2 = \mathrm{diag}\left[eigen\left(ZZ^+\right)\right]$

$$P = diag\begin{bmatrix}th(\tau_1) & th(\tau_2) & \cdots & th(\tau_n)\end{bmatrix}$$

This document may not be reproduced, modified, adapted, published, translated, in any way, in whole or in part or disclosed to a third party without the prior written consent of Thales - © Thales 2015 All rights reserved.

THALES

Adaptive Kernel Selection for Density Estimation

Density Estimation with Riemannian Kernel Method

$$(x_i)_{i=1:k} \in \mathrm{M}$$

$$r \in R_+^*$$

$$\hat{f}_k^r(x) = \frac{1}{k} \sum_{i=1:k} \frac{1}{r^n} \frac{1}{\theta_{x_i}(x)} K\left(\frac{dist(x, x_i)}{r}\right)$$

How to optimise Kenel size « r »

Minimise the product of densities evaluated for each point by cross-validation:

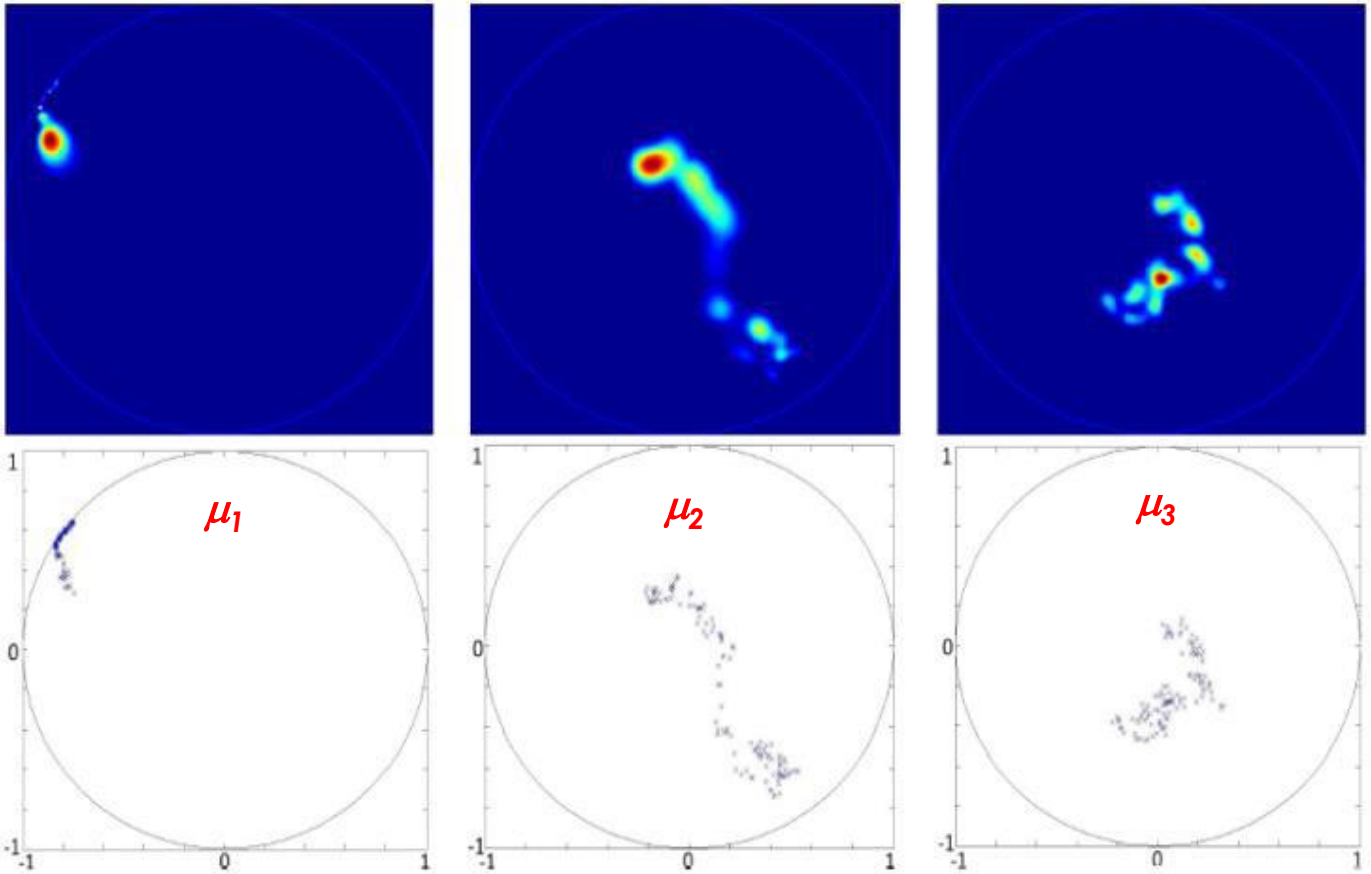
$$\min_r \prod_{i=1:k} \hat{f}_{-i}^r(\Sigma_i)$$

or $$\min_r \sum_{i=1:k} \log\left(\hat{f}_{-i}^r(\Sigma_i)\right)$$

This document may not be reproduced, modified, adapted, published, translated, in any way, in whole or in part or disclosed to a third party without the prior written consent of Thales - © Thales 2015 All rights reserved.

THALES

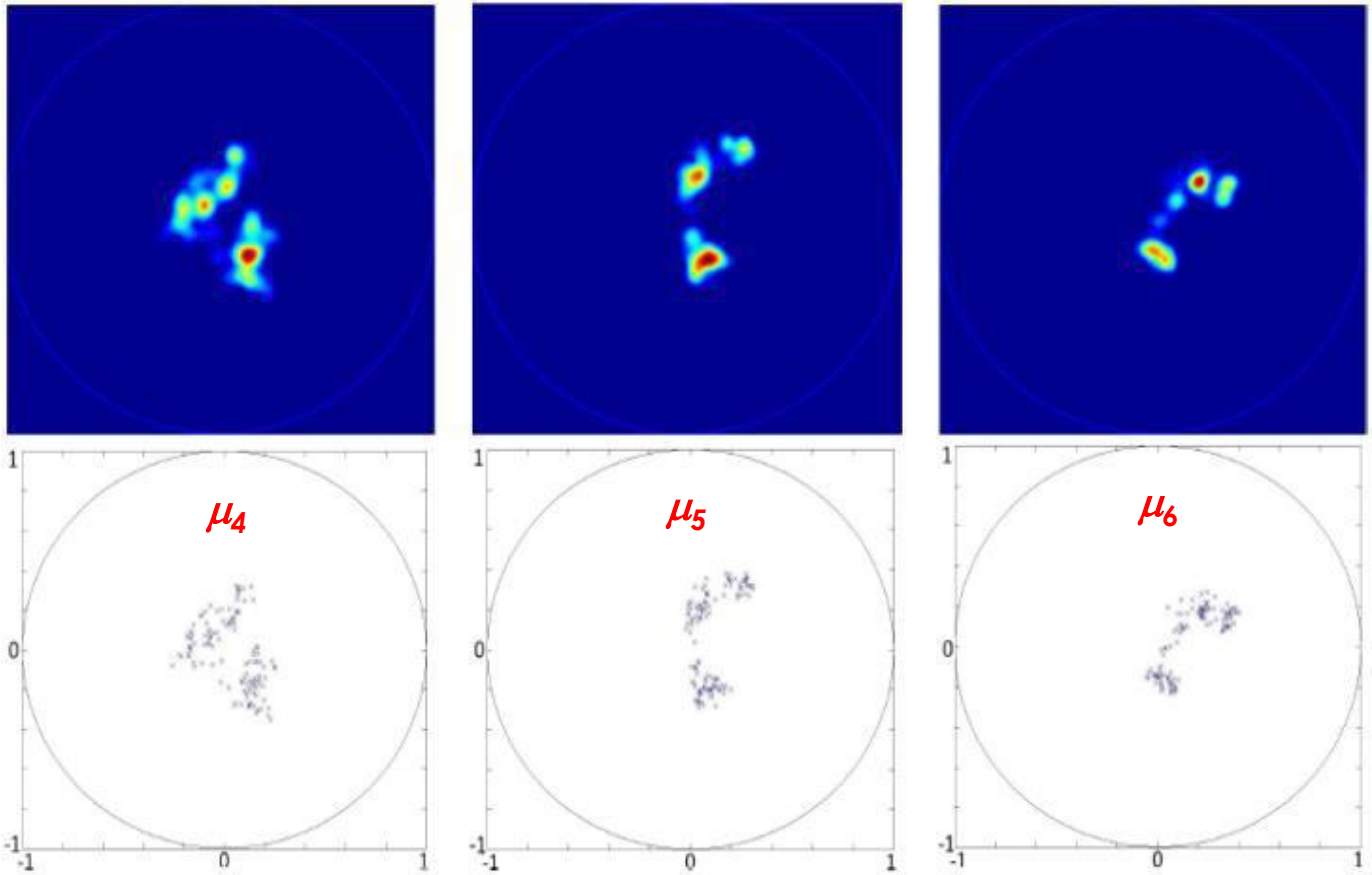
Riemannian Kernel Method of Density Estimation in Poincaré Disk 1/2



This document may not be reproduced, modified, adapted, published, translated, in any way, in whole or in part or disclosed to a third party without the prior written consent of Thales - © Thales 2015 All rights reserved.

THALES

Riemannian Kernel Method of Density Estimation in Poincaré Disk 2/2



This document may not be reproduced, modified, adapted, published, translated, in any way, in whole or in part or disclosed to a third party without the prior written consent of Thales - © Thales 2015 All rights reserved.

THALES

Mean-Shift on Riemannian Manifold

- The original mean shift algorithm is widely applied for nonparametric clustering of data in vector spaces. In this section, we will generalize it to data points lying on Riemannian manifolds of reflection coefficients.

- This allows us to extend mean shift based clustering to Doppler Data by reflection coefficient.

- Mean shift is provided by following gradient equation where the $\log_y(x_i)$ terms lie in the tangent space, and the kernel terms K are scalars. The mean shift vector is a weighted sum of tangent vectors, and is itself a tangent vector. The mean shift iteration is: $y_{j+1} \exp_{y_j}\left(m_\lambda(y_j)\right)$

- with : $g(.) = -K'(.)$

$$m_\lambda(y) = \left[\sum_{i=1}^{n} g\left(\frac{d(y,x_i)}{\lambda}\right)\right]^{-1} \sum_{i=1}^{n} g\left(\frac{d(y,x_i)}{\lambda}\right) \log_y(x_i)$$

This document may not be reproduced, modified, adapted, published, translated, in any way, in whole or in part or disclosed to a third party without the prior written consent of Thales - © Thales 2015 All rights reserved.

THALES

Mean Shift Classification

Non-Linear Mean-Shift

For i=1:n

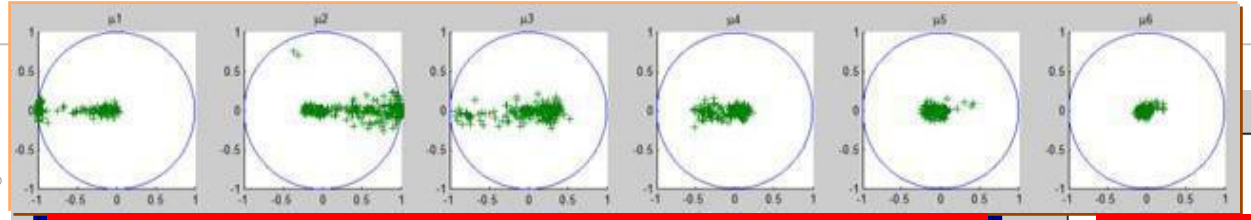
- ***y=x$_i$***
- **Repeat:**
  - $$m_r(y) \leftarrow \frac{\sum_{i=1}^{n} g\left(d^2(y,x_i)/r^2\right)\log_y(x_i)}{\sum_{i=1}^{n} g\left(d^2(y,x_i)/r^2\right)} \quad \text{with} \quad g = -(K)'$$
  - $$y \leftarrow \exp_y(m_r(y))$$

  until $\|m_r(y)\| \le \varepsilon$
- ***y* is the local mode**

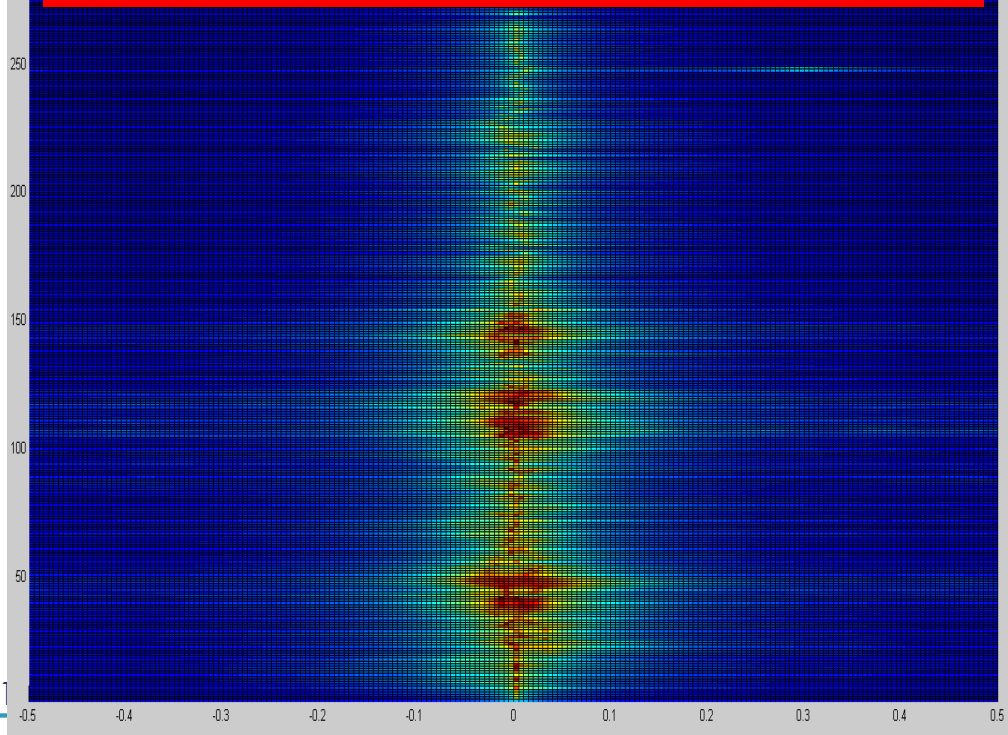
This document may not be reproduced, modified, adapted, published, translated, in any way, in whole or in part or disclosed to a third party without the prior written consent of Thales - © Thales 2015 All rights reserved.

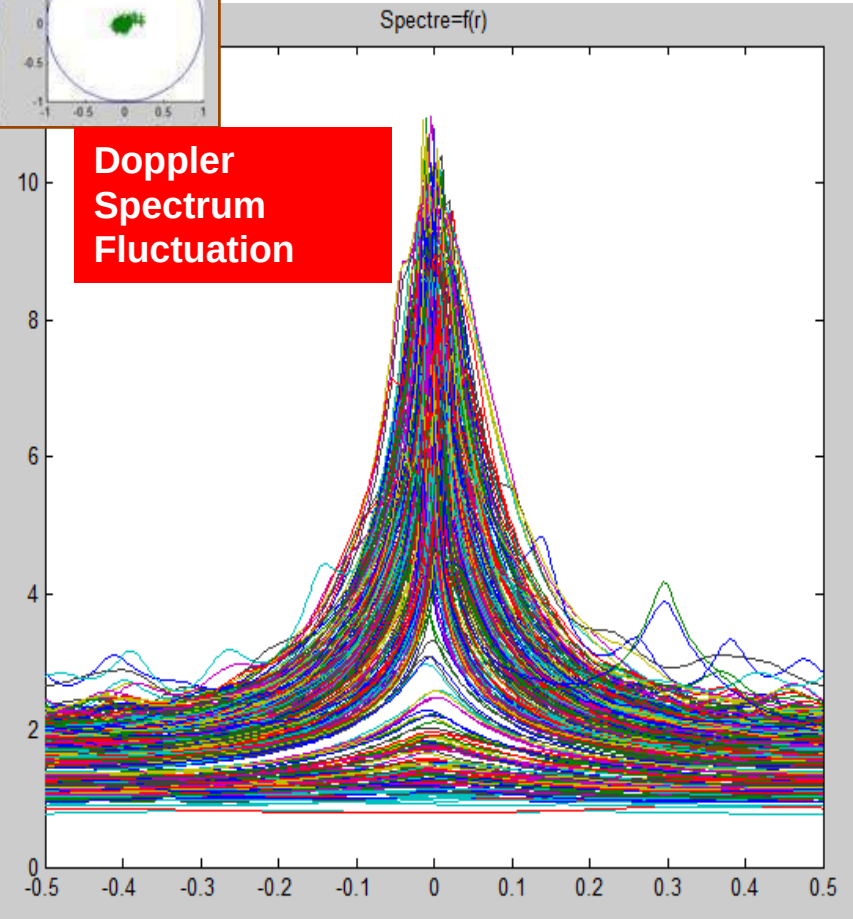
THALES

Doppler Fluctuation along range axis



Spectres Doppler/Distance (fouillis de mer GM200)

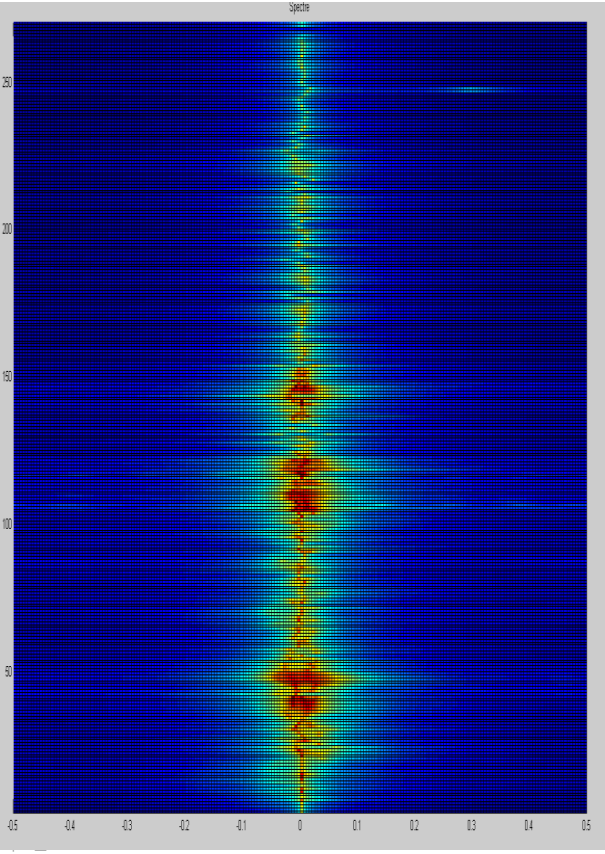


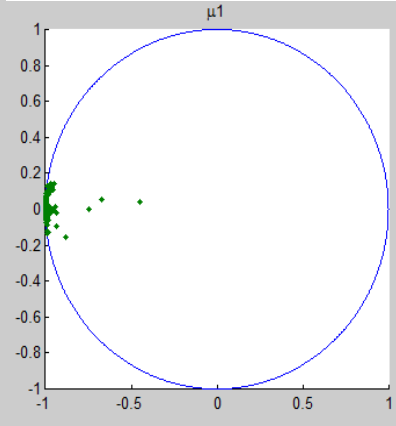


Doppler Spectrum Fluctuation

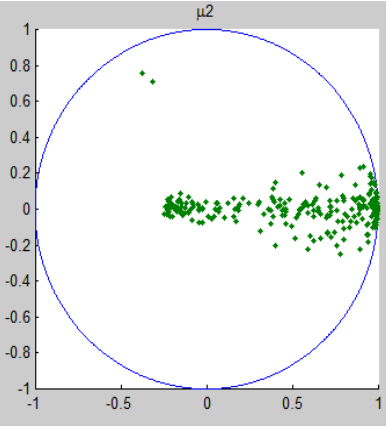
This document may not be reproduced, modified, adapted, published, translated, in any way, in whole or in part or disclosed to a third party without the prior written consent of Thales - © Thales 2015 All rights reserved.

Doppler Spectrum and Reflection Coefficients

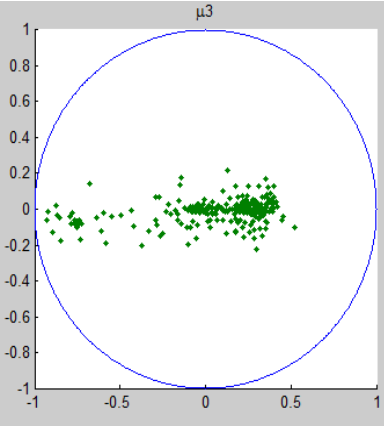




1st reflection coefficient



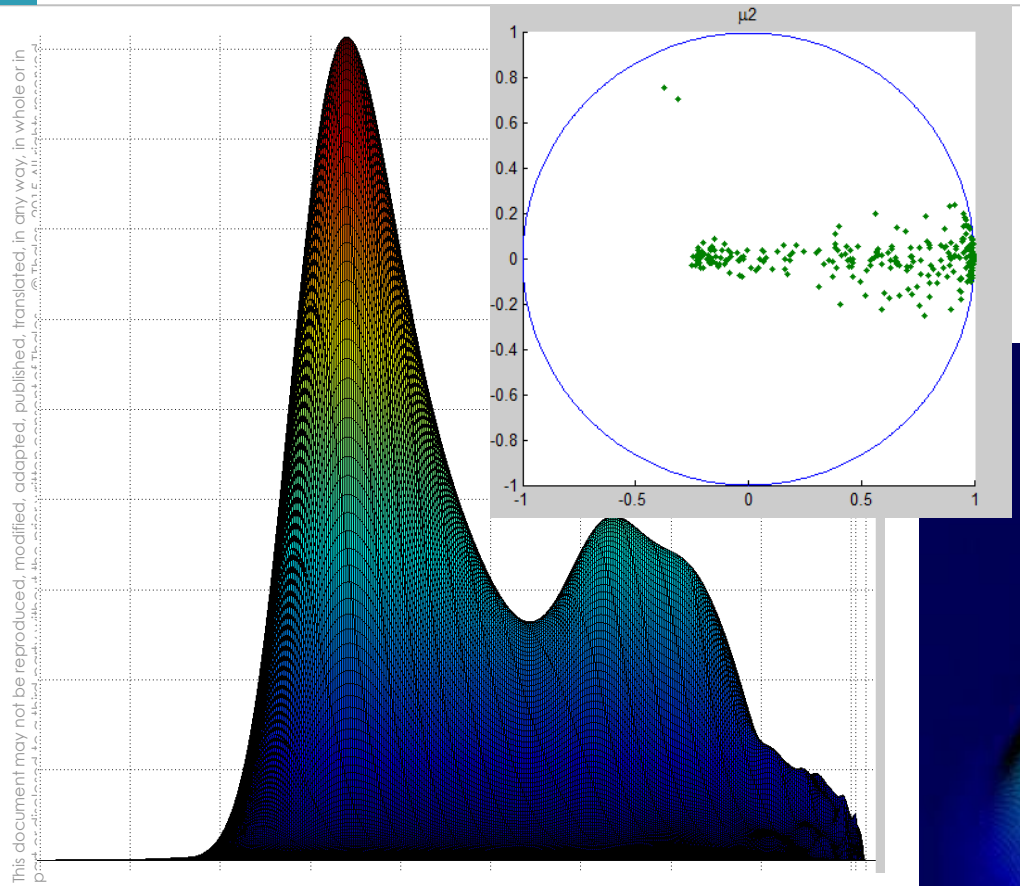
2nd reflection coefficient

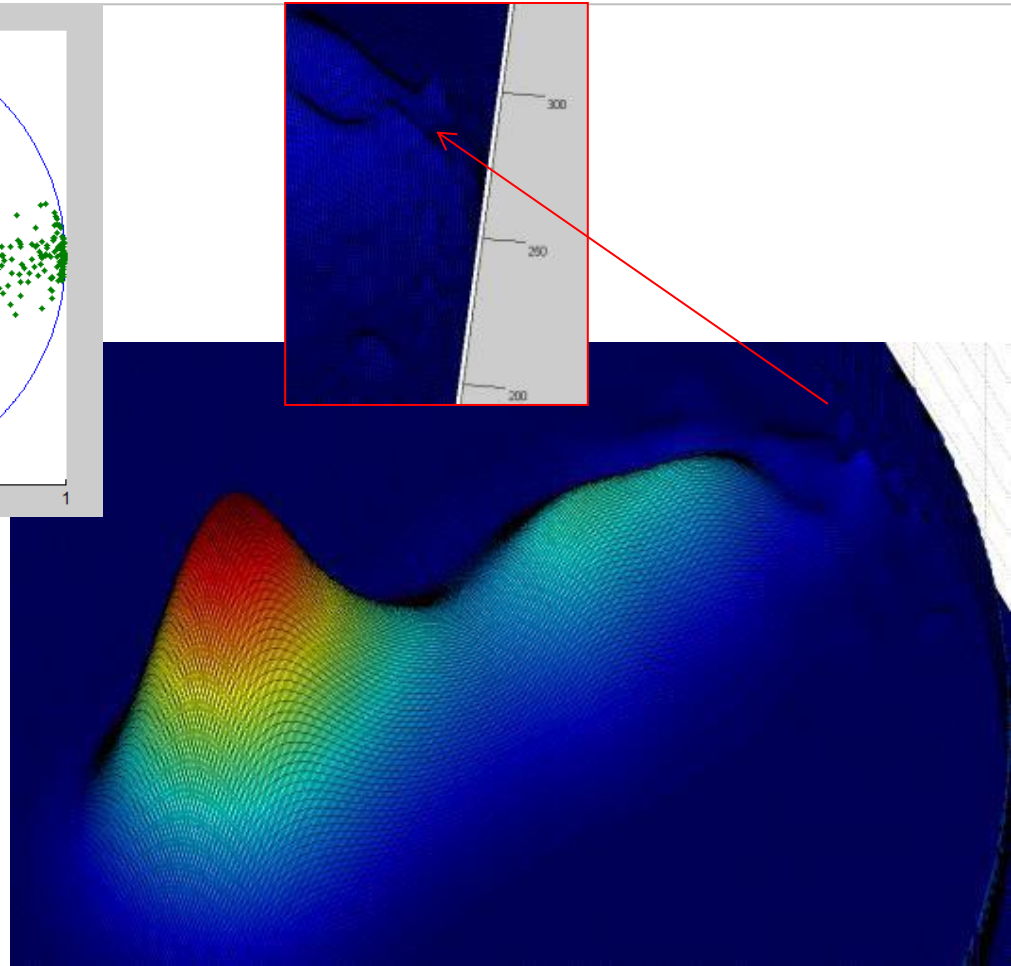


3rd reflection coefficient

THALES

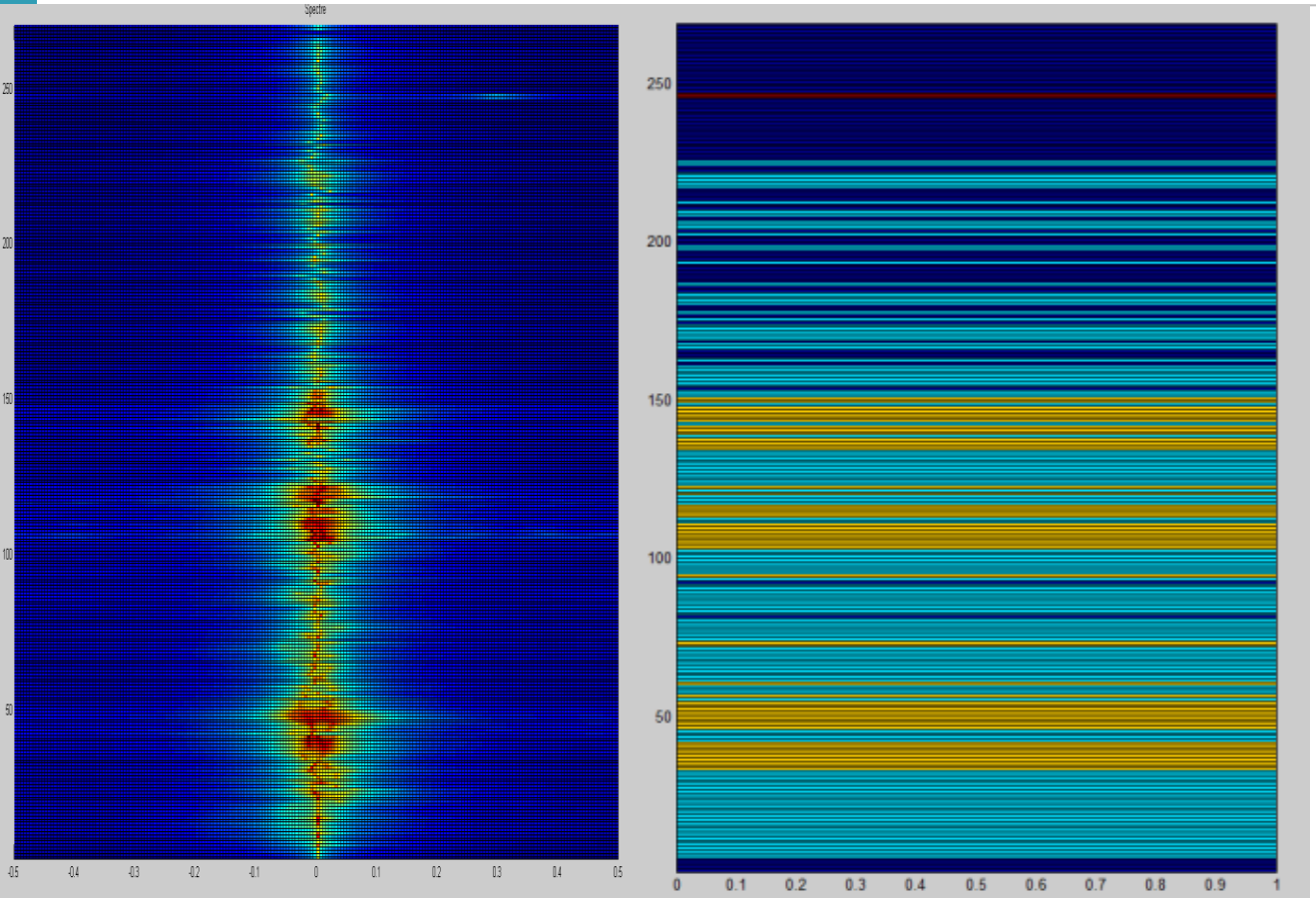
Density of 2nd reflection coefficient estimated by kernel method

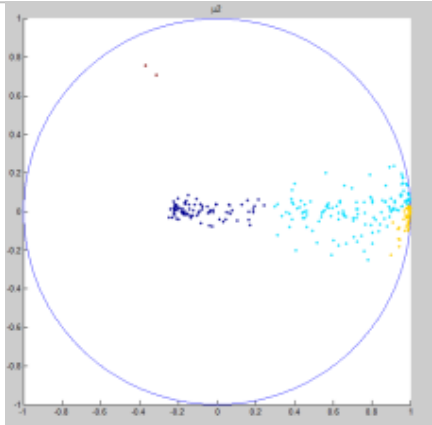


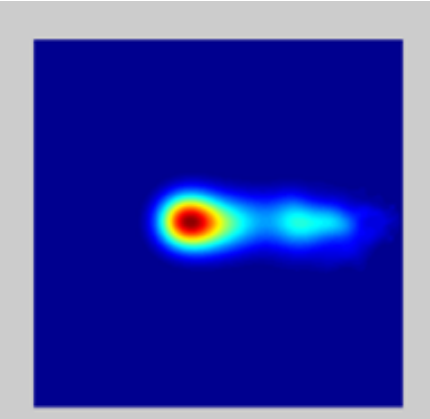


This document may not be reproduced, modified, adapted, published, translated, in any way, in whole or in part, nor disclosed to a third party, without the prior written consent of Thales. © Thales 2015. All rights reserved.

Mean-Shift Segmentation on 2nd reflection coefficients: 4 classes

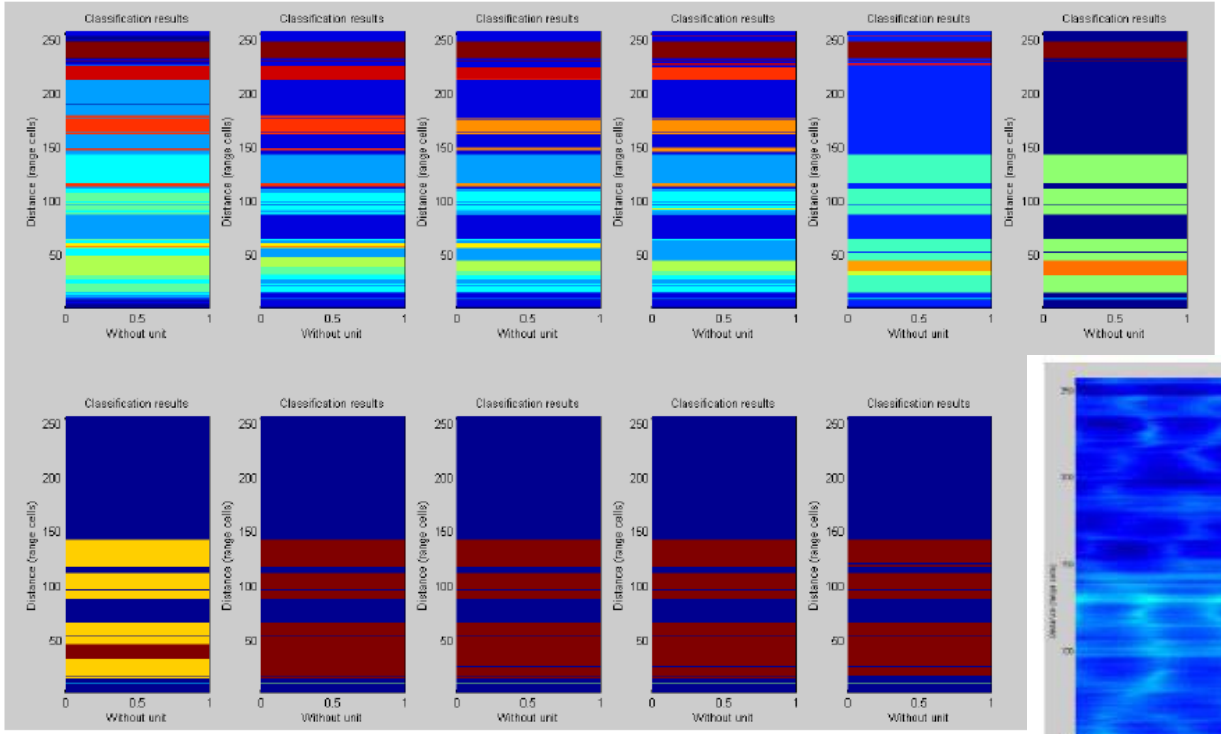


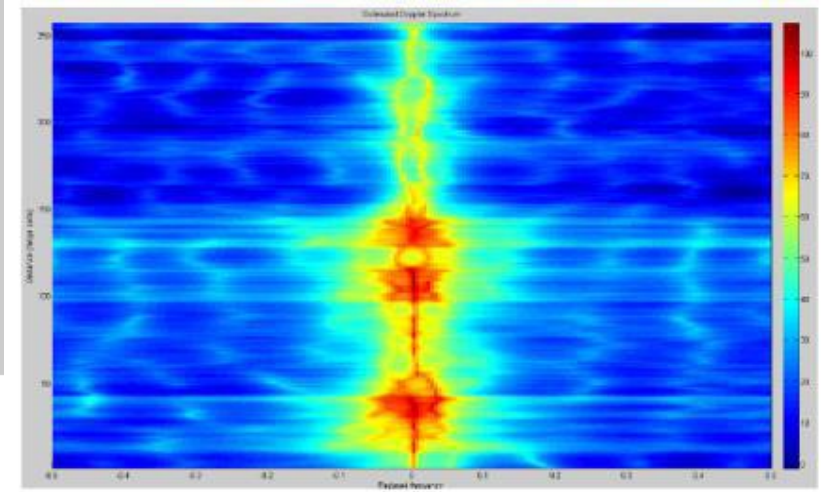




THALES

Mean-Shift Segmentation of Real Range/Doppler Data





This document may not be reproduced, modified, adapted, published, translated, in any way, in whole or in part or disclosed to a third party without the prior written consent of Thales - © Thales 2015 All rights reserved.

THALES

Future Research : Statistical Depth for THPD and TBTHPD matrices

Exploration of statistical depth for Covariances matrices

- Existing works on HPD matrices:
  - Intrinsic data depth for Hermitian positive definite matrices, Joris Chau, Hernando Ombao, Rainer von Sachs
  - https://arxiv.org/abs/1706.08289

- Extension for THPD and TBTHPD matrices, the notion of statistical depth

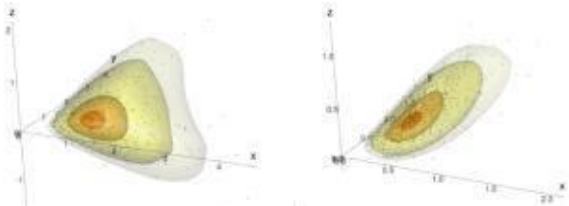
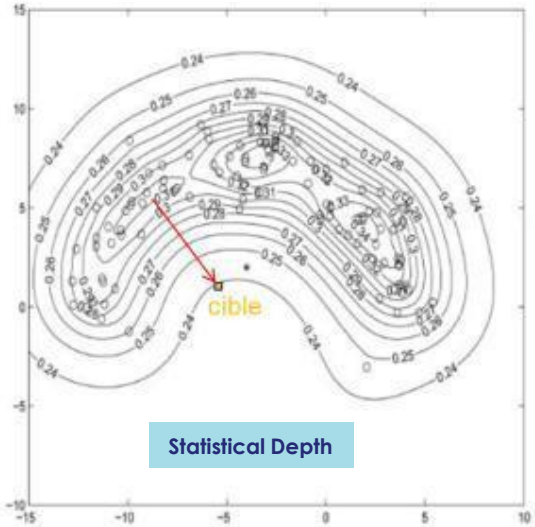


Figure 1: $100(1-\alpha)\%$ intrinsic zonoid depth regions with $\alpha = \{0.025, 0.25, 0.75, 0.9\}$ for random SPD matrices, $(d = 2, n = 500)$, from a Riemannian log-normal distribution (left) and a rescaled Wishart distribution (right), with intrinsic mean μ shown by the green cube.



This document may not be reproduced, modified, adapted, published, translated, in any way, in whole or in part or disclosed to a third party without the prior written consent of Thales - © Thales 2015 All rights reserved.

THALES

THALES

ALEAE GEOMETRIA

Géométrie du hasard

Synthèse

Que faut-il retenir après avoir tout oublié

Devant une bonne choucroute au jambon, ils oublièrent le pudding de graisse de phoque farci aux myrtilles ! — (Jean-Baptiste Charcot, Dans la mer du Groenland, 1928)

- La découverte de la borne inférieure sur la variance de tout estimateur est à attribuer à Maurice Fréchet lors de l'hiver 1939 (cours de l'IHP), 6 ans avant Rao. Borne que nous appellerons dorénavant **Borne de Fréchet**.

- L'article séminale de 1943 n'introduit pas seulement la borne de Fréchet, mais l'étude des **densités distinguées**, densités dont les paramètres atteignent cette borne. Fréchet montre que ces densités sont forcément des densités exponentielles.

- Fréchet remarque que la **matrice de Fisher est égale au hessien d'une fonction** intervenant dans son équation de Clairaut. Cette fonction c'est le logarithme de la fonction de partition (c'est la **fonction caractéristique de François Massieu**).

- Fréchet montre que ces densités distingués sont définies par l'intermédiaire de **l'Equation de Clairaut(-Legendre)**, qui met en dualité 2 fonctions (entropie et fonction caractéristique).

- Les structures des densités distinguées et l'équation de Clairaut-Fréchet sont les structures fondamentales de la **Géométrie de l'Information**, basée sur la **géométrie hessienne de J.L. Koszul**

- Jean-Marie Souriau a généralisé cette structure dans le cas d'une variété homogène en introduisant une « **Thermodynamique des groupes de Lie** ». La Densité de Gibbs est covariante et la métrique est invariante sous l'action du groupe. La métrique de Fisher est lié à la **2-forme de Souriau-Kostant-Kirillov**.

This document may not be reproduced, modified, adapted, published, translated, in any way, in whole or in part or disclosed to a third party without the prior written consent of Thales – © Thales 2015 All rights reserved.

THALES

Que faut-il retenir après avoir tout oublié

Devant une bonne choucroute au jambon, ils oublièrent le pudding de graisse de phoque farci aux myrtilles ! — (Jean-Baptiste Charcot, Dans la mer du Groenland, 1928)

- On peut étendre les probabilités et les statistiques dans les **espaces abstraits** grâce au travaux de **Maurice Fréchet** (centralité = **barycentre géodésique**)

- Pour faire des probabilités/statistiques sur des mesures de l'expérience dans les **espaces métriques**, la **métrique de Fisher** (celle associée à la **borne de Fréchet-Darmois-Cramer-Rao**) est la plus naturelle (**invariance par reparamétrisation**): métrique = Hessien de l'Entropie

- Pour étendre la **notion de lois gaussiennes**, il faut pouvoir étendre la définition d'une **densité à Maximum d'Entropie** (de **Gibbs**) dans les espaces abstraits. Pour les **espaces homogènes** (sur lequel un groupe agit), les équations sont données par la **Thermodynamique des groupes de Lie de Jean-Marie Souriau**.

- **Les structures géométriques élémentaires de l'information de l'onde Electromagnétique sont codées dans** $R \times S^1 \times D^{m-1} \times SD^{n-1}$

This document may not be reproduced, modified, adapted, published, translated, in any way, in whole or in part or disclosed to a third party without the prior written consent of Thales - © Thales - 2015 All rights reserved.

THALES

Le dernier mot à Souriau - Questions

- *« Il est évident que l'on ne peut définir de valeurs moyennes que sur des objets appartenant à un espace vectoriel (ou affine); donc - si bourbakiste que puisse sembler cette affirmation - que l'on n'observera et ne mesurera de valeurs moyennes que sur des grandeurs appartenant à un ensemble possédant physiquement une structure affine. Il est clair que cette structure est nécessairement unique sinon les valeurs moyennes ne seraient pas bien définies. »* - J.M. Souriau

- *« Les différentes versions de la science mécanique peuvent se classer par la géométrie que chacune implique pour l'espace et le temps ; géométrie qui se détermine par le groupe de covariance de la théorie. Ainsi la mécanique newtonienne est covariante par le groupe de Galilée; la relativité restreinte par le groupe de Lorentz-Poincaré ; la relativité générale par le groupe « lisse » (le groupe des difféomorphismes de l'espace-temps). Il existe cependant une partie des énoncés de la mécanique dont la covariance appartient à un quatrième groupe – rarement envisagé : le groupe affine. … Comment se fait-il qu'un point de vue unitaire, (qui serait nécessairement une véritable Thermodynamique), ne soit pas encore venu couronner le tableau ? Mystère...»* - J.M. Souriau

This document may not be reproduced, modified, adapted, published, translated, in any way, in whole or in part or disclosed to a third party without the prior written consent of Thales - © Thales 2015 All rights reserved.

THALES

THALES

ALEAE GEOMETRIA

Géométrie du hasard

Reference Bibliographique

Blaise Pascal

Bibliographie

- [1] Balian, R., Alhassid, Y. and Reinhardt, H. Dissipation in many-body systems: a geometric approach based on information theory. Phys. Reports, 131, 1986, 1-146.
- [2] Balian, R., Valentin P., Hamiltonian structure of thermodynamics with gauge, Eur. Phys. J. B 21, 2001, pp. 269-282.
- [3] Balian, R. The entropy-based quantum metric, Entropy, Vol.16, n°7, 2014, pp.3878-3888.
- [4] Balian, R., François Massieu et les potentiels thermodynamiques, Évolution des disciplines et histoire des découvertes, Académie des Sciences, Avril 2015.
- [5] Barbaresco, F. Koszul information geometry and Souriau Lie group thermodynamics, AIP Conf. Proc. n°1641, n° 74, 2015, Proceedings of MaxEnt'14 conference, Amboise, Septembre 2014
- [6] Barbaresco, F. Koszul Information Geometry and Souriau Geometric Temperature/Capacity of Lie Group Thermodynamics. Entropy, vol. 16, 2014, pp. 4521-4565. Published in the book Information, Entropy and Their Geometric Structures, MDPI Publisher, September 2015.
- [7] Barbaresco, F. Symplectic Structure of Information Geometry: Fisher Metric and Euler-Poincaré Equation of Souriau Lie Group Thermodynamics. In Geometric Science of Information, Second International Conference GSI 2015 Proceedings, Lecture Notes in Computer Science vol. 9389, Springer 2015, pp. 529–540.
- [8] Barbaresco, F., Geometric Theory of Heat from Souriau Lie Groups Thermodynamics and Koszul Hessian Geometry: Applications in Information Geometry for Exponential Families. Preprint soumis au Special Issue "Differential Geometrical Theory of Statistics", MDPI, Entropy, 2016.
- [9] Casalis, M. Familles exponentielles naturelles invariantes par un groupe. Thèse de l'Univ. Paul Sabatier, Toulouse, 1990
- [10] Casalis, M. Familles Exponentielles Naturelles sur Rd Invariantes par un Groupe, International Statistical Review (Revue Internationale de Statistique), Vol. 59, No. 2, pp. 241-262, Aug. 1991

This document may not be reproduced, modified, adapted, published, translated, in any way, in whole or in part or disclosed to a third party without the prior written consent of Thales - © Thales 2015 All rights reserved.

THALES

Bibliographie

- [11] Duhem, P. Sur les équations générales de la thermodynamique, Annales scientifiques de l'ENS, 3ème série, tome 9, 1891, pp.231-266.
- [12] Eriksen, P.S. Geodesics connected with the Fisher metric on the multivariate normal manifold. Lancaster : Proceedings of the GST Workshop, 1987
- [13] Fréchet, M.R. Sur l'extension de certaines évaluations statistiques au cas de petits échantillons. Revue de l'Institut International de Statistique 1943, vol. 11, n° 3/4, pp. 182–205.
- [14] Gromov, M. In a Search for a Structure, Part 1: On Entropy, 6 July 2012, Available online: http://www.ihes.fr/~gromov/PDF/structre-serch-entropy-july5–2012.pdf (accessed on 6 August 2015).
- [15] Gromov, M. Six Lectures on Probability, Symmetry, Linearity. Available online: http://www.ihes.fr/~gromov/PDF/probability-huge-Lecture-Nov-2014.pdf (accessed on 6 August 2015).
- [16] Koszul, J.L. Sur la forme hermitienne canonique des espaces homogènes complexes. Can. J. Math. 1955, 7, 562–576.
- [17] Koszul, J.L. Exposés sur les Espaces Homogènes Symétriques; Publicação da Sociedade de Matematica de São Paulo: São Paulo, Brazil, 1959.
- [18] Koszul, J.L. Domaines bornées homogènes et orbites de groupes de transformations affines. Bull. Soc. Math. Fr. 1961, 89, 515–533.
- [19] Koszul, J.L. Ouverts convexes homogènes des espaces affines. Math. Z. 1962, 79, 254–259.
- [20] Koszul, J.L. Variétés localement plates et convexité. Osaka. J. Math. 1965, 2, 285–290.

This document may not be reproduced, modified, adapted, published, translated, in any way, in whole or in part or disclosed to a third party without the prior written consent of Thales - © Thales 2015 All rights reserved.

THALES

Bibliographie

- [21] Koszul, J.L. Déformations des variétés localement plates. Ann. Inst. Fourier 1968, 18, 103–114.
- [22] Koszul, J.L. Trajectoires Convexes de Groupes Affines Unimodulaires. In Essays on Topology and Related Topics; Springer: Berlin, Germany, 1970; pp. 105–110.
- [23] Libermann, P.; Marle, C.M. Symplectic Geometry and Analytical Mechanics; Springer Science & Business Media: Berlin/Heidelberg, Germany, 1987.
- [24] Marle, C.M. Symmetries of Hamiltonian Systems on Symplectic and Poisson Manifolds, 15th Int. Conf. on Geometry, Integ. and Quant., Sofia, 2014, pp.1-86.
- [25] Marle, C.M. From Tools in Symplectic and Poisson Geometry to Souriau's theories of Statistical Mechanics and Thermodynamics, MDPI Entropy, special issue on "Differential Geometrical Theory of Statistics", 2016
- [26] Massieu, F. Sur les Fonctions caractéristiques des divers fluides. Comptes Rendus de l'Académie des Sciences 1869, 69, 858–862.
- [27] Massieu, F. Addition au précédent Mémoire sur les Fonctions caractéristiques. Comptes Rendus de l'Académie des Sciences 1869, 69, 1057–1061.
- [28] Massieu, F. Exposé des principes fondamentaux de la théorie mécanique de la chaleur (note destinée à servir d'introduction au Mémoire de l'auteur sur les fonctions caractéristiques des divers fluides et la théorie des vapeurs), 31 p., S.l. - s.n., 1873
- [29] Massieu, F. Thermodynamique: Mémoire sur les Fonctions Caractéristiques des Divers Fluides et sur la Théorie des Vapeurs; Académie des Sciences: Paris, France, 1876; p. 92.
- [30] Poincaré, H. Sur les tentatives d'explication mécanique des principes de la thermodynamique. Comptes rendus de l'Académie des sciences 1889, 108, 550–553.

This document may not be reproduced, modified, adapted, published, translated, in any way, in whole or in part or disclosed to a third party without the prior written consent of Thales - © Thales 2015 All rights reserved.

THALES

Bibliographie

- [31] Poincaré, H. Thermodynamique, Cours de Physique Mathématique; Carré, G., Ed.; 1892; en ligne: http://gallica.bnf.fr/ark:/12148/bpt6k2048983
- [32] Poincaré, H. Calcul des Probabilités; Gauthier-Villars: Paris, France, 1896.
- [33] Poincaré, H. Réflexions sur la théorie cinétique des gaz. J. Phys. Theor. Appl. 1906, 5, 369–403.
- [34] de Saxcé, G., Entropy and Structure for the Thermodynamic Systems. In Geometric Science of Information, Second International Conference GSI 2015 Proceedings, (F. Nielsen and F. Barbaresco, editors), Lecture Notes in Computer Science, vol. 9389, Springer 2015, pp. 519–528.
- [35] de Saxcé, G. Link between Lie Group Statistical Mechanics and Thermodynamics of Continua, Special Issue MDPI ENTROPY "Differential Geometrical Theory of Statistics", 2016, 18, 254
- [36] de Saxcé, G.; Vallée, C. Galilean Mechanics and Thermodynamics of Continua; Wiley-ISTE: London, UK, 2016.
- [37] Shima, H. The Geometry of Hessian Structures; World Scientific: Singapore, Singapore, 2007.
- [38] Shima, H. Geometry of Hessian Structures. In Springer Lecture Notes in Computer Science; Nielsen, F., Frederic, B., Eds.; Springer: Berlin/Heidelberg, Germany, 2013; Volume 8085, pp. 37–55.
- [39] Souriau, J.M. Géométrie de l'espace de phases. Comm. Math. Phys. 1966, 374, 1–30
- [40] Souriau, J.M. Définition covariante des équilibres thermodynamiques. Suppl. Nuov. Cimento 1966, 1, pp.203–216. (In French)

This document may not be reproduced, modified, adapted, published, translated, in any way, in whole or in part or disclosed to a third party without the prior written consent of Thales - © Thales 2015 All rights reserved.

THALES

Bibliographie

- [41] Souriau, J.M. Structure des systèmes dynamiques; Editions Jacques Gabay: Paris, France, 1970.
- [42] Souriau, J.-M., Mécanique statistique, groupes de Lie et cosmologie, Colloques internationaux du CNRS numéro 237, Géométrie symplectique et physique mathématique, 1974, pp. 59–113.
- [43] Souriau, J.M. Géométrie Symplectique et Physique Mathématique; Éditions du C.N.R.S.: Paris, France, 1975.
- [44] Souriau, J.M. Thermodynamique Relativiste des Fluides; Centre de Physique Théorique: Marseille, France, 1977.
- [45] Souriau, J.M. Thermodynamique et géométrie. In Differential Geometrical Methods in Mathematical Physics II; Bleuler, K., Reetz, A., Petry, H.R., Eds.; Springer: Berlin/Heidelberg, Germany, 1978; pp. 369–397.
- [46] Souriau, J.M. Dynamic Systems Structure (chap.16 convexité, chap. 17 Mesures, chap. 18 Etats statistiques, Chap. 19 Thermodynamique), available in Souriau archive (document sent by C. Vallée), unpublished technical notes, 1980.
- [47] Souriau, J.M. Mécanique classique et géométrie symplectique. CNRS Marseille. Cent. Phys. Théor. 1984, Report ref. CPT-84/PE-1695.
- [48] Souriau, J.M. On Geometric Mechanics. Discret. Cont. Dyn. Syst. J. 2007, 19, 595–607.
- [49] Vallée, C. Relativistic thermodynamics of continua. Int. J. Eng. Sci. 1981, 19, 589–601.
- [50] Vallée, C.; Lerintiu, C., Convex analysis and entropy calculation in statistical mechanics, Proceedings of A. Razmadze mathematical Institute 137, 2005, pp. 111-129.
- [51] Vey, J. Sur les Automorphismes Affines des Ouverts Convexes Saillants. Annali della Scuola Normale Superiore di Pisa, Classe di Science 1970, 24, 641–665.
- [52] Yoshizawa, S.; Tanabe, K. Dual differential geometry associated with the Kullback-Leibler information on the Gaussian distributions and its 2-parameters deformations. SUT Journal of Mathematics, vol.35, n°1, 1999, 113-137

This document may not be reproduced, modified, adapted, published, translated, in any way, in whole or in part or disclosed to a third party without the prior written consent of Thales - © Thales 2015 All rights reserved.

THALES

Joseph Fourier 250th birthday

Special session: Fourier 250th Birthday: Geometric Theory of Thermodynamics

MDPI ENTROPY Special Issue "*Joseph Fourier 250th Birthday: Modern Fourier Analysis and Fourier Heat Equation in Information Sciences for the XXIst century*"
Editors: Frédéric Barbaresco, Prof. Jean-Pierre Gazeau
http://www.mdpi.com/journal/entropy/special_issues/fourier

Fourier 250 French official website: http://perso.ens-lyon.fr/patrick.flandrin/Fourier250/

Président d'honneur

Cédric Villani, Professeur à l'Université Claude Bernard Lyon 1, membre de l'Académie des sciences

Co-présidents

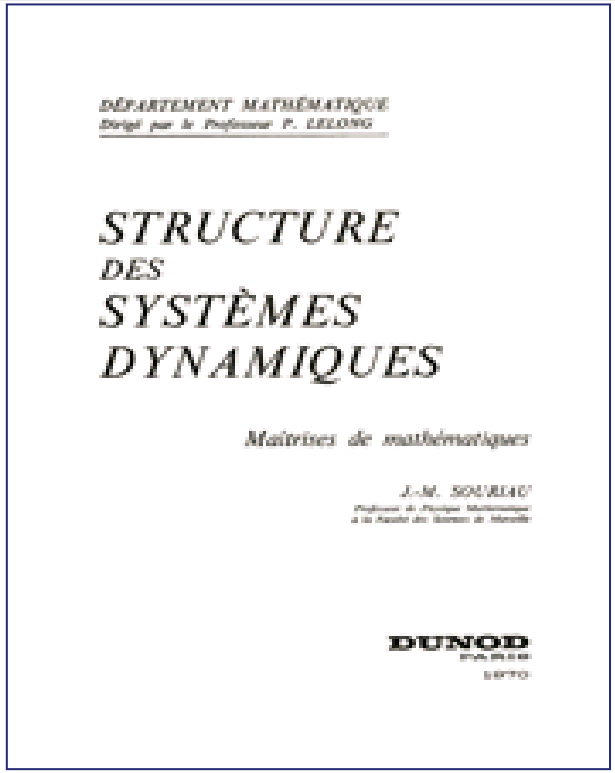
Jean Dhombres, Directeur de recherche CNRS émérite, directeur d'études à l'EHESS, Centre Alexandre Koyré
Patrick Flandrin, Directeur de recherche CNRS, ENS de Lyon, membre de l'Académie des sciences

Membres

Frédéric Barbaresco, THALES Land and Air Systems, Limours
Nancy Bertin, Chargée de recherche CNRS, IRISA
Frédéric Bimbot, Directeur de recherche CNRS, IRISA
Antoine Deleforge, Chargé de recherche Inria, IRISA
Pierre Comon, Directeur de recherche CNRS, Université Grenoble-Alpes, GIPSA-lab
Geneviève Duchamp, Professeure à l'Université de Bordeaux, IMS, présidente du Club EEA
Thierry Gallay, Professeur à l'Université Grenoble-Alpes, Institut Fourier
Rémi Gribonval, Directeur de recherche Inria, IRISA
Stéphane Jaffard, Professeur à l'Université Paris-Est Créteil, LAMA, ancien président de la Société Mathématique de France
Alain Juhel, Professeur retraité CPGE, Lycée Faidherbe, Lille
Christian Jutten, Professeur à l'Université Grenoble-Alpes, GIPSA-lab
Patrick Leclerc, membre du CA de la SEE
Olivier Michel, Professeur à l'Université Grenoble-Alpes, GIPSA-lab
Éric Moreau, Professeur à l'Université de Toulon, Seatech, membre du CA de la Conférence des Directeurs d'Écoles d'Ingénieurs
Hervé Pajot, Professeur à l'Université Grenoble-Alpes, Institut Fourier, rédacteur en chef des Annales de l'Institut Fourier
Gaël Richard, Professeur à Télécom-ParisTech, LTCI
Olivier Rioul, Professeur à Télécom-ParisTech, LTCI
Stéphane Seuret, Professeur à l'Université Paris-Est Créteil, LAMA, Président de la Société Mathématique de France
Tadeusz Sliwa, Professeur à l'Université de Bourgogne Franche-Comté, Président de la Société Fourier

This document may not be reproduced, modified, adapted, published, translated, in any way, in whole or in part or disclosed to a third party without the prior written consent of Thales - © Thales 2015 All rights reserved.

Souriau Book in French and in English



http://www.jmsouriau.com/structure_des_systemes_dynamiques.htm
http://www.springer.com/us/book/9780817636951

This document may not be reproduced, modified, adapted, published, translated, in any way, in whole or in part or disclosed to a third party without the prior written consent of Thales - © Thales 2015 All rights reserved.

THALES

Reference Book: Libermann & Marle

Symplectic Geometry and Analytical Mechanics

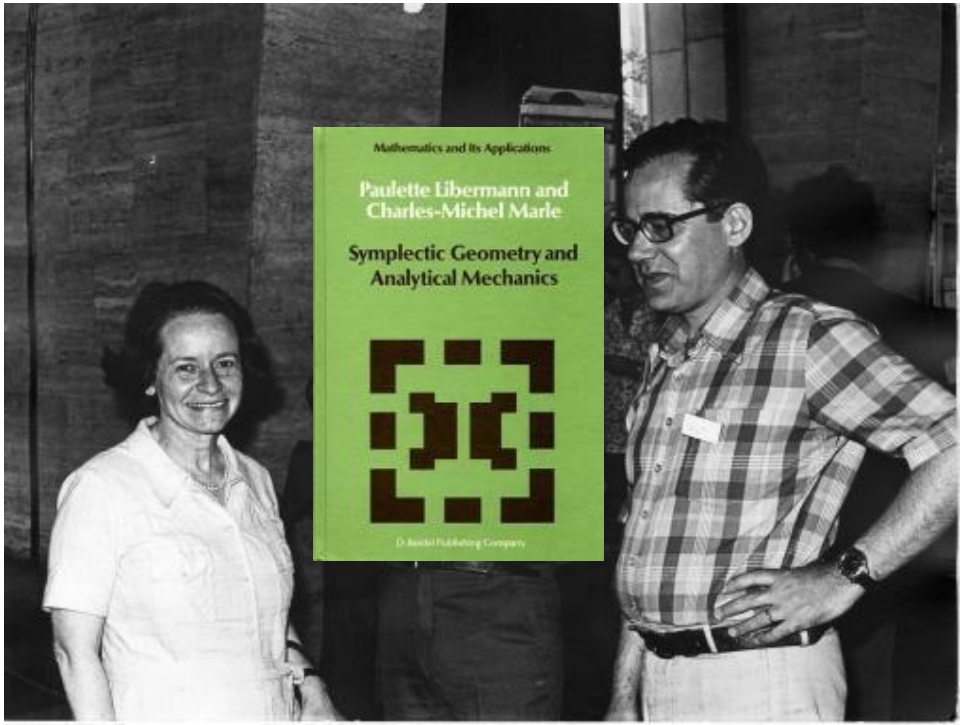
- Paulette Libermann & Charles-Michel Marle

https://www.agnesscott.edu/lriddle/WOMEN/abstracts/libermann_abstract.htm

Paulette Libermann, Legendre foliations on contact manifolds, Differential Geometry and Its Applications, n°1, pp.57-76, 1991

See also:

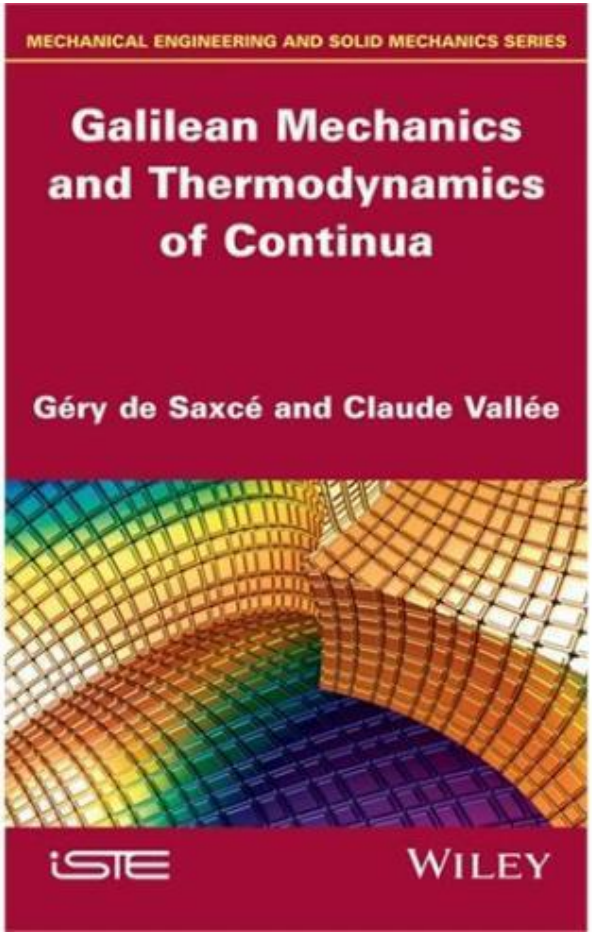
- Marle, C.-M. From Tools in Symplectic and Poisson Geometry to J.-M. Souriau's Theories of Statistical Mechanics and Thermodynamics. Entropy 2016, 18, 370.
- http://www.mdpi.com/1099-4300/18/10/370



This document may not be reproduced, modified, adapted, published, translated, in any way, in whole or in part or disclosed to a third party without the prior written consent of Thales - © Thales 2015 All rights reserved.

THALES

Reference Book: de Saxcé & Vallée



Galilean Mechanics and Thermodynamics of Continua
Author(s):
Géry de SaxcéClaude Vallée

First published:8 January 2016
Print ISBN:9781848216426
Copyright © 2016 John Wiley & Sons, Inc.
https://onlinelibrary.wiley.com/doi/book/10.1002/9781119057956

This document may not be reproduced, modified, adapted, published, translated, in any way, in whole or in part or disclosed to a third party without the prior written consent of Thales - © Thales 2015 All rights reserved.

THALES

Finesse et géométrie dans le style raffiné de Joseph de Maistre et de Erick Kähler

This document may not be reproduced, modified, adapted, published, translated, in any way, in whole or in part or disclosed to a third party without the prior written consent of Thales - © Thales 2015 All rights reserved.

Pour la théorie de la connaissance mais aussi pour les sciences est fondamentale la notion de perspective.
Or, les expériences faites dans la géométrie algébriques, dans la théorie des nombres, et dans l'algèbre abstraite m'induisent à tenter une formulation mathématique de cette notion pour surmonter ainsi au moyen de raisonnements d'origine géométrique la géométrie. Il me semble en effet, que la tendance vers l'abstraction observée dans les mathématiques d'aujourd'hui, loin d'être l'ennemi de l'intuition ait le sens profond de quitter l'intuition pour la faire renaitre dans une alliance entre « esprit de géométrie » et « esprit de finesse », alliance rendue possible par les réserves énormes des mathématiques pures dont Pascal et Goethe ne pouvaient pas encore se douter.
Erich Kähler – Sur la théorie des corps purement algébriques, 1952

Si on ajoute que la critique qui accoutume l'esprit, surtout en matière de faits, à recevoir de simples probabilités pour des preuves, est, par cet endroit, moins propre à le former, que ne le doit être la géométrie qui lui fait contracter l'habitude de n'acquiescer qu'à l'évidence; nous répliquerons qu'à la rigueur on pourrait conclure de cette différence même, que la critique donne, au contraire, plus d'exercice à l'esprit que la géométrie: parce que l'évidence, qui est une et absolue, le fixe au premier aspect sans lui laisser ni la liberté de douter, ni le mérite de choisir; au lieu que les probabilités étant susceptibles du plus et du moins, il faut, pour se mettre en état de prendre un parti, les comparer ensemble, les discuter et les peser. Un genre d'étude qui rompt, pour ainsi dire, l'esprit à cette opération, est certainement d'un usage plus étendu que celui où tout est soumis à l'évidence; parce que les occasions de se déterminer sur des vraisemblances ou probabilités, sont plus fréquentes que celles qui exigent qu'on procède par démonstrations: pourquoi ne dirions –nous pas que souvent elles tiennent aussi à des objets beaucoup plus importants ?
Joseph de Maistre