Déduction modulo et coupures

Lisa Allali

June 24, 2008

La déduction modulo

Déduction modulo

Déduction modulo = raisonnement + calcul

- Les règles d'inférence de la déduction naturelle
- Une congruence $\equiv$

Exemples de règles en déduction modulo :

$$\frac{}{\Gamma \vdash_{\equiv} B} \text{Ax si } A \in \Gamma \text{ et } A \equiv B$$

$$\frac{\Gamma \vdash_{\equiv} C \qquad \Gamma \vdash_{\equiv} A}{\Gamma \vdash_{\equiv} B} \Rightarrow\text{e si } C \equiv A \Rightarrow B$$

$$\frac{\Gamma \vdash_{\equiv} A \qquad \Gamma \vdash_{\equiv} B}{\Gamma \vdash_{\equiv} C} \wedge\text{i si } C \equiv A \wedge B$$

Exemple

Soit la théorie définie par la logique propositionnelle à laquelle on ajoute la congruence $\equiv$ définie par les règles de réécriture suivantes :
(1) $A \longrightarrow B$
(2) $B \longrightarrow C$
Voici une preuve en déduction modulo de $\vdash_{\equiv} A \Rightarrow C$:

$$\dfrac{\dfrac{}{A \vdash_{\equiv} C}\ \text{Ax}\ A \equiv C}{\vdash_{\equiv} A \Rightarrow C}\ \Rightarrow\text{i}$$

Théories en déduction modulo

Une théorie axiomatique est un ensemble d'axiomes.

Une théorie modulo est un ensemble d'axiomes et une congruence définie comme la clôture réflexive, transitive et symétrique d'un ensemble de règles de réécritures.

Une théorie purement calculatoire est une théorie modulo dont l'ensemble des axiomes est vide.

Qu'est-ce qu'on prouve ?

Comment une théorie peut-elle être exprimée sans axiomes ?

$$\frac{}{\Gamma \vdash_{\equiv} A}\ \top\text{i si } A \equiv \top$$

$$\frac{}{\Gamma \vdash_{\equiv} B}\ \text{Ax si } A \in \Gamma \text{ et } A \equiv B$$

Qu'est-ce qu'on gagne ?

$1001 = 1000 \Rightarrow 1 = 0$ en Arithmétique de Heyting axiomatique

Axiome nécessaire à la preuve :
$\forall x\ \forall y\ (S(x) = S(y) \Rightarrow\ x = y)$

$$\dfrac{\dfrac{}{1001 = 1000 \vdash 1001 = 1000}\,\text{Ax} \qquad \dfrac{\dfrac{}{1001 = 1000 \vdash \forall x\ \forall y\ (S(x) = S(y) \Rightarrow\ x = y)}\,\text{Ax}}{1001 = 1000 \vdash 1001 = 1000 \Rightarrow 1000 = 999}\,\forall\text{e x2}}{1001 = 1000 \vdash 1000 = 999}\,\Rightarrow\text{e}$$

$$\vdots$$

$$\dfrac{\dfrac{\pi_1}{1001 = 1000 \vdash 1000 = 999} \qquad \dfrac{\dfrac{}{1001 = 1000 \vdash \forall x\ \forall y\ (S(x) = S(y) \Rightarrow\ x = y)}\,\text{Ax}}{1001 = 1000 \vdash 1000 = 999 \Rightarrow 999 = 998}\,\forall\text{e x2}}{1001 = 1000 \vdash 999 = 998}\,\Rightarrow\text{e}$$

$$\vdots$$

$$\dfrac{\dfrac{\dfrac{\pi_{999}}{1001 = 1000 \vdash 2 = 1} \qquad \dfrac{\dfrac{}{1001 = 1000 \vdash \forall x\ \forall y\ (S(x) = S(y) \Rightarrow\ x = y)}\,\text{Ax}}{1001 = 1000 \vdash 2 = 1 \Rightarrow 1 = 0}\,\forall\text{e x2}}{1001 = 1000 \vdash 1 = 0}\,\Rightarrow\text{e}}{\vdash 1001 = 1000 \Rightarrow 1 = 0}\,\Rightarrow\text{i}$$

$1001 = 1000 \Rightarrow 1 = 0$ en Arithmétique de Heyting modulo

Règle de réécriture :
$S(x) = S(y) \longrightarrow x = y$

$$\dfrac{\overline{1001 = 1000 \vdash_{\equiv} 1 = 0}}{\vdash_{\equiv} 1001 = 1000 \Rightarrow 1 = 0} \Rightarrow\text{i}$$

$1001 = 1000 \Rightarrow 1 = 0$ en Arithmétique de Heyting modulo

Règle de réécriture :
$S(x) = S(y) \longrightarrow x = y$

$$\dfrac{\dfrac{}{1000 = 999 \vdash_{\equiv} 1 = 0}}{\vdash_{\equiv} 1001 = 1000 \Rightarrow 1 = 0} \Rightarrow\text{i}$$

$1001 = 1000 \Rightarrow 1 = 0$ en Arithmétique de Heyting modulo

Règle de réécriture :
$S(x) = S(y) \longrightarrow x = y$

$$\dfrac{\dfrac{}{999 = 998 \vdash_{\equiv} 1 = 0}}{\vdash_{\equiv} 1001 = 1000 \Rightarrow 1 = 0} \Rightarrow\text{i}$$

$1001 = 1000 \Rightarrow 1 = 0$ en Arithmétique de Heyting modulo

Règle de réécriture :
$S(x) = S(y) \longrightarrow x = y$

$$\dfrac{\overline{998 = 997 \vdash_{\equiv} 1 = 0}}{\vdash_{\equiv} 1001 = 1000 \Rightarrow 1 = 0} \Rightarrow\text{i}$$

$1001 = 1000 \Rightarrow 1 = 0$ en Arithmétique de Heyting modulo

Règle de réécriture :
$S(x) = S(y) \longrightarrow x = y$

$$\dfrac{\overline{997 = 996 \vdash_{\equiv} 1 = 0}}{\vdash_{\equiv} 1001 = 1000 \Rightarrow 1 = 0} \Rightarrow\mathrm{i}$$

$1001 = 1000 \Rightarrow 1 = 0$ en Arithmétique de Heyting modulo

Règle de réécriture :
$S(x) = S(y) \longrightarrow x = y$

$$\dfrac{\dfrac{}{996 = 995 \vdash_{\equiv} 1 = 0}}{\vdash_{\equiv} 1001 = 1000 \Rightarrow 1 = 0} \Rightarrow\text{i}$$

$1001 = 1000 \Rightarrow 1 = 0$ en Arithmétique de Heyting modulo

Règle de réécriture :
$S(x) = S(y) \longrightarrow x = y$

$$\dfrac{\overline{995 = 994 \vdash_{\equiv} 1 = 0}}{\vdash_{\equiv} 1001 = 1000 \Rightarrow 1 = 0} \Rightarrow\text{i}$$

$1001 = 1000 \Rightarrow 1 = 0$ en Arithmétique de Heyting modulo

Règle de réécriture :
$S(x) = S(y) \longrightarrow x = y$

$$\dfrac{\overline{994 = 993 \vdash_{\equiv} 1 = 0}}{\vdash_{\equiv} 1001 = 1000 \Rightarrow 1 = 0} \Rightarrow i$$

$1001 = 1000 \Rightarrow 1 = 0$ en Arithmétique de Heyting modulo

Règle de réécriture :
$S(x) = S(y) \longrightarrow x = y$

$$\dfrac{\dfrac{}{993 = 992 \vdash_{\equiv} 1 = 0}}{\vdash_{\equiv} 1001 = 1000 \Rightarrow 1 = 0}\Rightarrow \mathrm{i}$$

$1001 = 1000 \Rightarrow 1 = 0$ en Arithmétique de Heyting modulo

Règle de réécriture :
$S(x) = S(y) \longrightarrow x = y$

$$\cfrac{\cfrac{}{992 = 991 \vdash_{\equiv} 1 = 0}}{\vdash_{\equiv} 1001 = 1000 \Rightarrow 1 = 0} \Rightarrow\text{i}$$

$1001 = 1000 \Rightarrow 1 = 0$ en Arithmétique de Heyting modulo

Règle de réécriture :
$S(x) = S(y) \longrightarrow x = y$

$$\dfrac{\dfrac{}{991 = 990 \vdash_{\equiv} 1 = 0}}{\vdash_{\equiv} 1001 = 1000 \Rightarrow 1 = 0} \Rightarrow\text{i}$$

$1001 = 1000 \Rightarrow 1 = 0$ en Arithmétique de Heyting modulo

Règle de réécriture :
$S(x) = S(y) \longrightarrow x = y$

$$\dfrac{\dfrac{}{\ldots \vdash_{\equiv} 1 = 0}}{\vdash_{\equiv} 1001 = 1000 \Rightarrow 1 = 0} \Rightarrow\text{i}$$

$1001 = 1000 \Rightarrow 1 = 0$ en Arithmétique de Heyting modulo

Règle de réécriture :
$S(x) = S(y) \longrightarrow x = y$

$$\dfrac{\dfrac{}{1 = 0 \vdash_{\equiv} 1 = 0}\,\mathrm{Ax}}{\vdash_{\equiv} 1001 = 1000 \Rightarrow 1 = 0}\Rightarrow\mathrm{i}$$

Technologie/Théorie

La notion de coupure

Coupure en déduction naturelle

$$\dfrac{\dfrac{\dfrac{\pi_1}{\Gamma \vdash A} \qquad \dfrac{\pi_2}{\Gamma \vdash B}}{\Gamma \vdash A \wedge B}\ \wedge\mathrm{i}}{\Gamma \vdash A}\ \wedge\mathrm{e}$$

$$\dfrac{\dfrac{\dfrac{\pi_1}{\Gamma, A \vdash B}}{\Gamma \vdash A \Rightarrow B}\ \Rightarrow\mathrm{i} \qquad \dfrac{\pi_2}{\Gamma \vdash A}}{\Gamma \vdash B}\ \Rightarrow\mathrm{e}$$

$$\dfrac{\dfrac{\dfrac{\pi}{\Gamma \vdash B}}{\Gamma \vdash \forall x\ B}\ \forall\mathrm{i}}{\Gamma \vdash B\{x := t\}}\ \forall\mathrm{e}$$

Coupure en déduction naturelle

$$\dfrac{\dfrac{\dfrac{\pi_1}{\Gamma \vdash A} \quad \dfrac{\pi_2}{\Gamma \vdash B}}{\Gamma \vdash A \wedge B}\wedge\mathrm{i}}{\Gamma \vdash A}\wedge\mathrm{e} \quad \longrightarrow \quad \dfrac{\pi_1}{\Gamma \vdash A}$$

$$\dfrac{\dfrac{\dfrac{\pi_1}{\Gamma, A \vdash B}}{\Gamma \vdash A \Rightarrow B}\Rightarrow\mathrm{i} \quad \dfrac{\pi_2}{\Gamma \vdash A}}{\Gamma \vdash B}\Rightarrow\mathrm{e}$$

$$\dfrac{\dfrac{\dfrac{\pi}{\Gamma \vdash B}}{\Gamma \vdash \forall x\ B}\forall\mathrm{i}}{\Gamma \vdash B\{x := t\}}\forall\mathrm{e}$$

Coupure en déduction naturelle

$$\dfrac{\dfrac{\dfrac{\pi_1}{\Gamma \vdash A} \qquad \dfrac{\pi_2}{\Gamma \vdash B}}{\Gamma \vdash A \wedge B}\,\wedge\mathrm{i}}{\Gamma \vdash A}\,\wedge\mathrm{e} \quad \longrightarrow \quad \dfrac{\pi_1}{\Gamma \vdash A}$$

$$\dfrac{\dfrac{\dfrac{\pi_1}{\Gamma, A \vdash B}}{\Gamma \vdash A \Rightarrow B}\,\Rightarrow\mathrm{i} \qquad \dfrac{\pi_2}{\Gamma \vdash A}}{\Gamma \vdash B}\,\Rightarrow\mathrm{e}$$

$$\dfrac{\dfrac{\dfrac{\pi}{\Gamma \vdash B}}{\Gamma \vdash \forall x\; B}\,\forall\mathrm{i}}{\Gamma \vdash B\{x := t\}}\,\forall\mathrm{e} \quad \longrightarrow \quad \dfrac{\pi\{x := t\}}{\Gamma \vdash B\{x := t\}}$$

Coupure en déduction naturelle

$$\cfrac{\cfrac{\cfrac{\pi_1}{\Gamma \vdash A} \qquad \cfrac{\pi_2}{\Gamma \vdash B}}{\Gamma \vdash A \wedge B}\ \wedge\mathrm{i}}{\Gamma \vdash A}\ \wedge\mathrm{e} \quad\longrightarrow\quad \cfrac{\pi_1}{\Gamma \vdash A}$$

$$\cfrac{\cfrac{\cfrac{\pi}{\Gamma \vdash B}}{\Gamma \vdash \forall x\ B}\ \forall\mathrm{i}}{\Gamma \vdash B\{x := t\}}\ \forall\mathrm{e} \quad\longrightarrow\quad \cfrac{\pi\{x := t\}}{\Gamma \vdash B\{x := t\}}$$

$$\cfrac{\cfrac{\cfrac{\pi_1}{\Gamma, A \vdash B}}{\Gamma \vdash A \Rightarrow B}\ \Rightarrow\mathrm{i} \qquad \cfrac{\pi_2}{\Gamma \vdash A}}{\Gamma \vdash B}\ \Rightarrow\mathrm{e}$$

$$\big\downarrow$$

$$\cfrac{\pi}{\Gamma \vdash B}$$

Propriété d'une preuve sans coupure en déduction naturelle

Une preuve sans coupure finit toujours par une règle d'intro.

La notion de coupure en présence d'axiomes

?

exemple de redéfinition : la coupure de récurrence

Un exemple de coupure de récurrence :

$$\dfrac{\dfrac{\dfrac{\dfrac{\pi_1}{P(O)} \qquad P(O) \Rightarrow (\forall x\ (P(x) \Rightarrow P(S(x))) \Rightarrow (\forall n\ P(n))}{(\forall x\ (P(x) \Rightarrow P(S(x)))) \Rightarrow (\forall n\ P(n))}\Rightarrow\mathrm{e} \qquad \dfrac{\pi_2}{\forall x\ (P(x) \Rightarrow P(S(x)))}}{\forall n\ P(n)}\Rightarrow\mathrm{e}}{P(100)}\forall\mathrm{e}$$

une preuve sans coupure de P(100) c'est prouver P(0), P(1), P(2), P(3), P(4), P(5), P(6), P(7), ... , P(100).

Coupure et déduction modulo

Coupure en déduction naturelle : une intro suivi d'un élim

La déduction naturelle a la propriété d'élimination des coupures.

(Prawitz)

Coupure et déduction modulo

Coupure en déduction naturelle : une intro suivi d'un élim
La déduction naturelle a la propriété d'élimination des coupures. (Prawitz)

Coupure en déduction modulo : une intro suivi d'un élim
La déduction modulo n'a pas en général la propriété d'élimination des coupures. (Dowek-Hardin-Kirchner)

Déduction modulo : ajout puissance calculatoire / perte l'élimination des coupures.

Exemple : $A \longrightarrow A \Rightarrow B$

$$\cfrac{\cfrac{\cfrac{}{A \vdash A \Rightarrow B} \qquad \cfrac{}{A \vdash A}}{A \vdash B}\Rightarrow\mathrm{e}}{\vdash A}\Rightarrow\mathrm{i}$$

$$\cfrac{\cfrac{\cfrac{}{A \vdash A} \qquad \cfrac{}{A \vdash A \Rightarrow B}}{A \vdash B}\Rightarrow\mathrm{e}}{\vdash A \Rightarrow B}\Rightarrow\mathrm{i}$$

$$\cfrac{\cfrac{\pi_1}{\vdash A}\Rightarrow\mathrm{i} \qquad \cfrac{\pi_2}{\vdash A \Rightarrow B}}{\vdash B}\Rightarrow\mathrm{e}$$

Exemple : $A \longrightarrow A \Rightarrow B$

$$\dfrac{\dfrac{\dfrac{}{x : A \vdash x : A \Rightarrow B} \qquad \dfrac{}{x : A \vdash x : A}}{x : A \vdash xx : B} \Rightarrow\mathrm{e}}{\vdash (\lambda x.xx) : A} \Rightarrow\mathrm{i}$$

$$\dfrac{\dfrac{\dfrac{}{x : A \vdash x : A} \qquad \dfrac{}{x : A \vdash x : A \Rightarrow B}}{x : A \vdash xx : B} \Rightarrow\mathrm{e}}{\vdash \lambda x.xx : A \Rightarrow B} \Rightarrow\mathrm{i}$$

$$\dfrac{\dfrac{\pi_1}{\vdash (\lambda x.xx) : A} \Rightarrow\mathrm{i} \qquad \dfrac{\pi_2}{\vdash (\lambda x.xx) : A \Rightarrow B}}{\vdash (\lambda x.xx)(\lambda x.xx) : B} \Rightarrow\mathrm{e}$$

Déduction modulo et coupures ?

Objectif : définir un critère pour assurer l'élimination des coupures d'une théorie purement calculatoire

On propose ici un critère sémantique.

Les modèles

Sémantique

- Une $\mathcal{A}$lgèbre de *valeurs de vérités* $\mathcal{A}$
- Interprétation pour les connecteurs sur cette $\mathcal{A}$lgèbre
- Domaine D d'interprétation pour les variables
- Symboles de fonction : fonctions de D^n dans D
- Symboles de prédicat : fonctions de D^n dans $\mathcal{A}$

Cohérence, correction et complétude en déduction naturelle

- Une théorie est cohérente s'il existe un modèle qui valide tous ses axiomes.
- Complétude + correction : Une proposition P est valide dans tous les modèles d'une théorie $\mathcal{T}$ si et seulement si P est un théorème de $\mathcal{T}$.

Classique/Intuitionisme

$$A \vee \neg A$$

Classique/Intuitionisme

$$A \vee \neg A$$

- est un théorème de la logique classique
- n'est pas théorème de la logique intuitioniste

Les $\mathcal{A}$lgèbres de Boole : modèles de la logique classique

Contrainte : $A \vee \neg A$ doit etre vrai dans tous les modèles

Solution : tout élément de l'$\mathcal{A}$lgèbre de vérité $\mathcal{A}$ a un complément

Les $\mathcal{A}$lgèbres de Boole : modèles de la logique classique

Contrainte : $A \vee \neg A$ doit etre vrai dans tous les modèles

Solution : tout élément de l'$\mathcal{A}$lgèbre de vérité $\mathcal{A}$ a un complément

Remarque : il n'y pas que Ḷ'$\mathcal{A}$lgèbre de Boole¨

Les $\mathcal{A}$lgèbres de Heyting : modèles de la logique intuitioniste

Contrainte : $A \vee \neg A$ doit pouvoir être faux dans certains modèles

Solution : tout élément de l'$\mathcal{A}$lgèbre de vérité $\mathcal{A}$ a un pseudo-complément

Les $\mathcal{A}$lgèbres de Heyting : modèles de la logique intuitioniste

Contrainte : $A \vee \neg A$ doit pouvoir être faux dans certains modèles

Solution : tout élément de l'$\mathcal{A}$lgèbre de vérité $\mathcal{A}$ a un pseudo-complément

Remarque : Les $\mathcal{A}$lgèbres de Boole sont des $\mathcal{A}$lgèbres de Heyting.

Vers les modèles intuitionistes modulo

Contraintes :

- distinguer les interprétations des propositions équivalentes
- identifier les interprétations des propositions congruentes

Vers les modèles intuitionistes modulo

Contraintes :

- distinguer les interprétations des propositions équivalentes
- identifier les interprétations des propositions congruentes

Pour toute règle de réécriture $P \longrightarrow \phi$, on veut

$$[\![P]\!] = [\![\phi]\!]$$

Vers les modèles intuitionistes modulo

Que se passe-t-il dans une $\mathcal{A}$lgèbre de Heyting si la proposition $B \Leftrightarrow C$ est vraie ?

Si $B \Rightarrow C$ et $C \Rightarrow B$ alors $[\![B]\!]_{\mathcal{A}} \leq [\![C]\!]_{\mathcal{A}}$ et $[\![C]\!]_{\mathcal{A}} \leq [\![B]\!]_{\mathcal{A}}$

L'anti-symétrie de la relation $\leq$ de l'$\mathcal{A}$lgèbre $\mathcal{A}$ implique $[\![B]\!]_{\mathcal{A}} = [\![C]\!]_{\mathcal{A}}$

Vers les modèles intuitionistes modulo

Que se passe-t-il dans une $\mathcal{A}$lgèbre de Heyting si la proposition $B \Leftrightarrow C$ est vraie ?

$$\text{Si } B \Rightarrow C \text{ et } C \Rightarrow B \text{ alors } [\![B]\!]_{\mathcal{A}} \leq [\![C]\!]_{\mathcal{A}} \text{ et } [\![C]\!]_{\mathcal{A}} \leq [\![B]\!]_{\mathcal{A}}$$

L'anti-symétrie de la relation $\leq$ de l'$\mathcal{A}$lgèbre $\mathcal{A}$ implique $[\![B]\!]_{\mathcal{A}} = [\![C]\!]_{\mathcal{A}}$

On affaiblit les $\mathcal{A}$lgèbres de Heyting en $\mathcal{P}$seudo algèbres de Heyting en cassant l'anti-symétrie.

La super-cohérence

Définitions

- Une théorie modulo $\mathcal{T}$ est cohérente s'il existe un $\mathcal{P}$-modèle (ie un modèle de $\mathcal{T}$ avec une certaine $\mathcal{P}$seudo algèbre de Heyting $\mathcal{P}$ pour l'ensemble des valeurs de vérités).

Définitions

- Une théorie modulo $\mathcal{T}$ est cohérente s'il existe un $\mathcal{P}$-modèle (ie un modèle de $\mathcal{T}$ avec une certaine $\mathcal{P}$seudo algèbre de Heyting $\mathcal{P}$ pour l'ensemble des valeurs de vérités).
- Une théorie modulo est super-cohérente si à partir de toute $\mathcal{P}$seudo algèbre de Heyting $\mathcal{P}$ on est capable de construire un $\mathcal{P}$-modèle.

THE théorème

Si une théorie purement calculatoire est super-cohérente alors toute proposition prouvable dans cette théorie a une preuve sans coupure.

Parce que...

- L'algèbre des candidats est une pseudo algèbre de Heyting
- Avoir un modèle dans lequel l'algèbre des valeurs de vérité est l'algèbre des candidats implique normalisation
- la normalisation implique la cut élim
- super-cohérent = avoir un modèle pour n'importe quelle PHA

$$\dfrac{\dfrac{\dfrac{\dfrac{\dfrac{}{\text{S-C} \vdash \forall\text{PHA modele}}\,\text{Ax}}{\text{S-C} \vdash \text{Cand. mod.}}\,\forall\text{e} \qquad \dfrac{\text{Théo}}{\vdash \text{Cand. mod.} \Rightarrow \text{SN}}}{\text{S-C} \vdash \text{SN}}\,\Rightarrow\!\text{e} \qquad \dfrac{\text{Théo}}{\vdash \text{SN} \Rightarrow \text{cut elim}}}{\text{S-C} \vdash \text{cut elim}}\,\Rightarrow\!\text{i}}{\vdash \text{S-C} \Rightarrow \text{cut elim}}$$

Quelques résultats

- Il existe des théories purement calculatoires qui ont l'élimination des coupures mais qui ne normalisent pas (Olivier Hermant).
- La normalisation d'une théorie purement calculatoire implique-t-elle sa super-cohérence ? (réponse dans le prochain exposé de Denis Cousineau ?)

Applications

L'Arithmetique de Heyting purement calculatoire

- extension conservative de l'arithmétique de Heyting axiomatique
- super-cohérente

Induction

$x \in f_{z,y_1,\ldots,y_n,P}(y_1,\ldots,y_n) \longrightarrow P\{z := x\}$
$N(n) \longrightarrow \forall f\ (0 \in f \Rightarrow \forall y\ (N(y) \Rightarrow y \in f \Rightarrow S(y) \in f) \Rightarrow n \in f)$

Egalité

$0 = 0 \longrightarrow \top$ $\quad S(x) = 0 \longrightarrow \bot$
$0 = S(x) \longrightarrow \bot$ $\quad S(x) = S(y) \longrightarrow x = y$

Addition et multiplication

$0 + y \longrightarrow y$ $\quad S(x) + y \longrightarrow S(x + y)$
$0 \times y \longrightarrow 0$ $\quad S(x) \times y \longrightarrow x \times y + y$

Tiens ?

Induction

$$x \in f_{z,y_1,\ldots,y_n,P}(y_1,\ldots,y_n) \longrightarrow P\{z := x\}$$
$$N(n) \longrightarrow \forall f\ (0 \in f \Rightarrow \forall y\ (N(y) \Rightarrow y \in f \Rightarrow S(y) \in f) \Rightarrow n \in f)$$

Une approche équationnelle des types inductifs

$$N(n) \longrightarrow \forall f \; (0 \in f \Rightarrow \forall y \; (N(y) \Rightarrow y \in f \Rightarrow S(y) \in f) \Rightarrow n \in f)$$

Une approche équationnelle des types inductifs

$$N(n) \longrightarrow \forall f \; (0 \in f \Rightarrow \forall y \; (N(y) \Rightarrow y \in f \Rightarrow S(y) \in f) \Rightarrow n \in f)$$

$$T_i \longrightarrow CasDeBase \Rightarrow (T_i \Rightarrow CasHereditaire) \Rightarrow CasGeneral$$

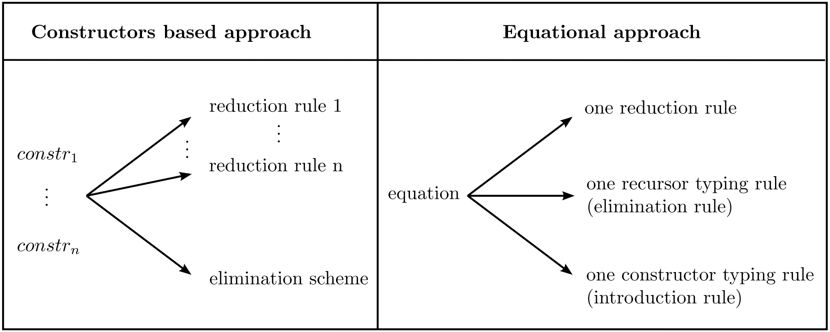
Une approche équationnelle des types inductifs

$$N(n) \longrightarrow \forall f \; (0 \in f \Rightarrow \forall y \; (N(y) \Rightarrow y \in f \Rightarrow S(y) \in f) \Rightarrow n \in f)$$

$$T_i \longrightarrow \mathit{CasDeBase} \Rightarrow (T_i \Rightarrow \mathit{CasHereditaire}) \Rightarrow \mathit{CasGeneral}$$

Toute théorie purement calculatoire avec ce genre de règles de réécriture (T_i réapparait en positition positive) est super-cohérente.

Une approche équationnelle des types inductifs



Questions

Les Algèbres de Boole : modèles de la logique classique

Définition : Une algèbre de Boole $\mathcal{B}$ est une structure composée de

- un domaine B muni d'un ordre $\leq$
- deux opérations binaires $\tilde{\wedge}$ et $\tilde{\vee}$
- deux éléments $\tilde{\bot}$ et $\tilde{\top}$ (ou 0 et 1)
- une opération unaire pour le complémentaire $\tilde{\neg}$

tels que pour tout élément a, b et c de B, on a :

$$\begin{array}{rrcl rcl}
\textit{associativity} & a\tilde{\vee}(b\tilde{\vee}c) & = & (a\tilde{\vee}b)\tilde{\vee}c & a\tilde{\wedge}(b\tilde{\wedge}c) & = & (a\tilde{\wedge}b)\tilde{\wedge}c \\
\textit{commutativity} & a\tilde{\vee}b & = & b\tilde{\vee}a & a\tilde{\wedge}b & = & b\tilde{\wedge}a \\
\textit{absorption} & a\tilde{\vee}(a\tilde{\wedge}b) & = & a & a\tilde{\wedge}(a\tilde{\vee}b) & = & a \\
\textit{distributivity} & a\tilde{\vee}(b\tilde{\wedge}c) & = & (a\tilde{\vee}b)\tilde{\wedge}(a\tilde{\vee}c) & a\tilde{\wedge}(b\tilde{\vee}c) & = & (a\tilde{\wedge}b)\tilde{\vee}(a\tilde{\wedge}c) \\
\textit{complements} & a\tilde{\vee}\tilde{\neg}a & = & \tilde{\top} & a\tilde{\wedge}\tilde{\neg}a & = & \tilde{\bot}
\end{array}$$

L'algèbre de Boole la plus usuelle

- $B = \{0, 1\}$
- On définit les 3 opérations $\tilde{\wedge}$, $\tilde{\vee}$ et $\tilde{\neg}$

$\tilde{\wedge}$	0	1
0	0	0
1	0	1

$\tilde{\vee}$	0	1
0	0	1
1	1	1

a	0	1
$\tilde{\neg} a$	1	0

Les algèbres de Heyting comme modèles intuitionistes

Définition : Une algèbre de Heyting $\mathcal{H}$ est une structure composée de

- un domaine H muni d'un ordre $\leq$
- deux opérations binaires $\tilde{\wedge}$ et $\tilde{\vee}$
- deux éléments $\tilde{\bot}$ et $\tilde{\top}$ (ou 0 et 1)

Les algèbres de Heyting comme modèles intuitionistes

Définition : Une algèbre de Heyting $\mathcal{H}$ est une structure composée de

- un domaine H muni d'un ordre $\leq$
- deux opérations binaires $\tilde{\wedge}$ et $\tilde{\vee}$
- deux éléments $\tilde{\bot}$ et $\tilde{\top}$ (ou 0 et 1)
- une opération binaire $\tilde{\Rightarrow}$ tel que pour tout a, b et c de H, on a :

$$\begin{array}{rcl} a\tilde{\Rightarrow}a & = & 1 \\ a\tilde{\wedge}(a\tilde{\Rightarrow}b) & = & a\tilde{\wedge}b \\ b\tilde{\wedge}(a\tilde{\Rightarrow}b) & = & b \\ a\tilde{\Rightarrow}(b\tilde{\wedge}c) & = & (a\tilde{\Rightarrow}b)\tilde{\wedge}(a\tilde{\Rightarrow}c) \end{array}$$

- La négation est codée ainsi : $\tilde{\neg}a = (a\tilde{\Rightarrow}0)$
  $\tilde{\neg}$ est un pseudo-complément

Une algèbre de Heyting qui falsifie le tiers exclu

- $B = \{0, 1/2, 1\}$
- On définit les 3 opérations $\tilde{\wedge}$, $\tilde{\vee}$ et $\tilde{\Rightarrow}$

$\tilde{\wedge}$	0	1/2	1
0	0	0	0
1/2	0	1/2	1/2
1	0	1/2	1

$\tilde{\vee}$	0	1/2	1
0	0	1/2	1
1/2	1/2	1/2	1
1	1	1	1

$\tilde{\Rightarrow}$	0	1/2	1
0	1	1	1
1/2	0	1	1
1	0	1/2	1

$$1/2 \tilde{\vee} \tilde{\neg} 1/2 = 1/2 \tilde{\vee} (1/2 \tilde{\Rightarrow} 0) = 1/2 \tilde{\vee} 0 = 1/2.$$

Une algèbre de Heyting qui falsifie le tiers exclu

- $B = \{0, 1/2, 1\}$
- On définit les 3 opérations $\tilde{\wedge}$, $\tilde{\vee}$ et $\tilde{\Rightarrow}$

$\tilde{\wedge}$	0	1/2	1
0	0	0	0
1/2	0	1/2	1/2
1	0	1/2	1

$\tilde{\vee}$	0	1/2	1
0	0	1/2	1
1/2	1/2	1/2	1
1	1	1	1

$\tilde{\Rightarrow}$	0	1/2	1
0	1	1	1
1/2	0	1	1
1	0	1/2	1

$$1/2 \tilde{\vee} \tilde{\neg} 1/2 = 1/2 \tilde{\vee} (1/2 \tilde{\Rightarrow} 0) = 1/2 \tilde{\vee} 0 = 1/2.$$

Remarque : une algèbre de Heyting qui vérifie le tiers exclu : l'algèbre de Boole usuelle.

Vers les modèles intuitionistes modulo

Que se passe-t-il dans une algèbre de Heyting si la proposition $A \Leftrightarrow B$ est vraie ?
$A \Rightarrow B$ et $B \Rightarrow A$
$\tilde{A} \leq \tilde{B}$ et $\tilde{B} \leq \tilde{A}$
Or $\leq$ est un ordre
$\tilde{A} = \tilde{B}$ ie A et B s'interprètent par le même élément de B.

Par ailleurs, si $A \equiv B$, on a aussi $\tilde{A} = \tilde{B}$.

Vers les modèles intuitionistes modulo

Objectif :

- distinguer les interprétations des propositions équivalentes
- identifier les interprétations des propositions équivalentes

Solution : affaiblir la relation $\leq$ en préordre

$A \Leftrightarrow B$ $A \Rightarrow B$ et $B \Rightarrow A$

$\tilde{A} \leq \tilde{B}$ et $\tilde{B} \leq \tilde{A}$

mais pas nécessairement $\tilde{A} = \tilde{B}$

On a toujours $A \equiv B$, on a aussi $\tilde{A} = \tilde{B}$.

Les Pseudos Algèbres de Heyting comme modèles de la logique intuitioniste modulo

Tout comme les algèbres de Heyting excepté que la relation $\leq$ est un preordre.

Exemple : $A \longrightarrow A \Rightarrow A$

$$\cfrac{\cfrac{\cfrac{}{A \Rightarrow A \vdash (A \Rightarrow A) \Rightarrow (A \Rightarrow A)} \qquad \cfrac{}{A \Rightarrow A \vdash A \Rightarrow A}}{A \Rightarrow A \vdash A \Rightarrow A} \Rightarrow e}{\vdash (A \Rightarrow A) \Rightarrow (A \Rightarrow A)} \Rightarrow i$$

$$\cfrac{\cfrac{\cfrac{}{A \vdash A} \qquad \cfrac{}{A \vdash A \Rightarrow A}}{A \vdash A} \Rightarrow e}{\vdash A \Rightarrow A} \Rightarrow i$$

$$\cfrac{\cfrac{\pi_1}{\vdash (A \Rightarrow A) \Rightarrow (A \Rightarrow A)} \Rightarrow i \qquad \cfrac{\pi_2}{\vdash A \Rightarrow A}}{\vdash A \Rightarrow A} \Rightarrow e$$

Exemple : $A \longrightarrow A \Rightarrow A$

$$\dfrac{\dfrac{\dfrac{}{x : A \Rightarrow A \vdash x : (A \Rightarrow A) \Rightarrow (A \Rightarrow A)} \qquad \dfrac{}{x : A \Rightarrow A \vdash x : A \Rightarrow A}}{x : A \Rightarrow A \vdash xx : A \Rightarrow A}\Rightarrow\mathrm{e}}{\vdash (\lambda x.xx) : (A \Rightarrow A) \Rightarrow (A \Rightarrow A)}\Rightarrow\mathrm{i}$$

$$\dfrac{\dfrac{\dfrac{}{x : A \vdash x : A} \qquad \dfrac{}{x : A \vdash x : A \Rightarrow A}}{x : A \vdash xx : A}\Rightarrow\mathrm{e}}{\vdash \lambda x.xx : A \Rightarrow A}\Rightarrow\mathrm{i}$$

$$\dfrac{\dfrac{\pi_1}{\vdash (\lambda x.xx) : (A \Rightarrow A) \Rightarrow (A \Rightarrow A)}\Rightarrow\mathrm{i} \qquad \dfrac{\pi_2}{\vdash (\lambda x.xx) : A \Rightarrow A}}{\vdash (\lambda x.xx)(\lambda x.xx) : A \Rightarrow A}\Rightarrow\mathrm{e}$$