1 Présentation des problèmes

Problème SAT. Etant donné une formule logique F de m clauses sur n variables, la question est : F est elle satisfiable ? – c'est-à-dire, existe-t-il une facon d'assigner les valeurs “ vrai ” ou “ faux ” aux variables afin de rendre la formule vraie ? SAT est un problème NP-complet.

Problème du cycle hamiltonien. Un graphe hamiltonien est un graphe possédant au moins un cycle passant par tous les sommets une et une seule fois. Un tel cycle simple (ne passant pas deux fois par le même sommet) est alors appelé cycle hamiltonien. Le problème et de trouver un cycle hamiltonien pour un graphe donné. Ce problème est aussi NP-complet.

Problème de partition. On est donné un ensemble $A = \{a_1, a_2, \dots, a_n\}$ et une fonction $s : A \to R$ telle que $\sum_{a \in A} s(a) = 2B$. Existe-t-il un sous-ensemble A' de A tel que $\sum_{a \in A'} s(a) = B$? Ce problème est NP-complet.

Problème de programmation linaire en nombres entiers (PLNE). PLNE est un programme linéaire, c'est-à-dire une fonction objectif linéaire à maximiser ou minimiser, sous des contraintes linéaires, dans lequel il y a la contrainte supplémentaire que les variables sont entières.

Problème de PLNE de décision (PLNE-D). Dans ce problème il faut savoir s'il existe une solution entière qui satisfait les contraintes linéares données.

Problème du voyageur de commerce. Etant donné n points (des “ villes ”) et les distances séparant chaque point, trouver un chemin de longueur totale minimale qui passe exactement une fois par chaque point et revienne au point de départ.

Problème du plus long chemin. Etant donné un graphe $G = (V, E)$ valué, trouver un chemin simple (que passe par chaque sommet au maximum une fois) de longueur totale maximale du sommet a au sommet b $(a, b \in V)$.

Problème du chemin de longueur donnée. Etant donné un graphe valué (les valeurs peuvent être négatives), existe-t-il un chemin simple de longueur spécifiée ?

Problème de la clique. On cherche un clique de taille maximum dans un graphe.

2 Exercises

1. Démontrez que le problème de PLNE est NP-complet par la réduction polynomiale à partir du problème SAT (en passant par le problème PLNE-D).

2. Démontrez que le problème du voyageur de commerce est NP-complet par la réduction polynomiale à partir du problème du cycle hamiltonien.

3. Démontrez que le problème du chemin de longueur donnée est NP-complet par la réduction polynomiale à partir du problème de partition (c'est possible aussi à partir du problème du cycle hamiltonien).

4. Démontrez que le problème du plus long chemin est NP-complet par la réduction polynomiale à partir du problème du cycle hamiltonien.

5. Démontrez que le problème de la clique est NP-complet. Utilisez la réduction polynomiale suivante à partir du problème 3-SAT (on est donné une formule logique F de m clauses sur n variables, dans chaque clause C_r il y a 3 littéraux $\{l_1^r, l_2^r, l_3^r\}$, un littéral est soit une variable soit sa forme complémentée) :

   - pour chaque clause $C_r = \{l_1^r, l_2^r, l_3^r\}$, $1 \leq r \leq m$, on crée 3 nouveaux sommets v_1^r, v_2^r, v_3^r dans le graphe G ;
   - pour chaque paire de sommets v_i^r et v_j^s, $r \neq s$, on crée une arête $\{v_i^r, v_j^s\}$ dans G si le littéral l_i^r n'est pas la forme complémentée de littéral l_j^s.
   - F est satisfiable $\Leftrightarrow$ il existe un clique de taille m dans G.