C. R. Acad. Sci. Paris, t. 328, Série I, p. 749-754, 1999
Théorie des nombres/*Number Theory*

Premiers chiffres significatifs et nombres algébriques

Ilan VARDI

IHES, 35, route de Chartres, 91440 Bures-sur-Yvette, France
Courriel : ilan@ihes.fr

(Reçu le 10 octobre 1998, accepté après révision le 26 février 1999)

Résumé. Je démontre qu'il y a un prolongement méromorphe de la série $\sum_{\{\log_\beta n/\alpha\}<\log_\beta \alpha} n^{-s}$ au plan entier si et seulement si β est un nombre de Pisot, $\alpha \in \mathbf{Q}(\beta)$, et soit le deuxième conjugué de β est réel soit le conjugué de α correspondant au deuxième conjugué de β est positif. © Académie des Sciences/Elsevier, Paris

Leading digits and algebraic numbers

Abstract. *I show that there is a meromorphic continuation of* $\sum_{\{\log_\beta n\}<\log_\beta \alpha} n^{-s}$ *to the whole plane if and only if* β *is a Pisot number,* $\alpha \in \mathbf{Q}(\beta)$, *and either the second largest conjugate of* β *is real or the conjugate of* α *corresponding to the second largest conjugate of* β *is positive.* © Académie des Sciences/Elsevier, Paris

Abridged English Version

The leading digit problem is the empirical phenomenon that among "naturally" occurring numbers the leading digit in base β is less than α with probability $\log_\beta \alpha = \frac{\log \alpha}{\log \beta}$ (this is usually called *Benford's law* (*see* [12], [15], Section 4.2.4). Recall that expressing a number in floating point, say $n = 196884$, means writing $n = 1.96884 \cdot 10^5$, where $5 = \lfloor \log_{10} n \rfloor$ and $1.96884 = 10^{\{\log_{10} n\}}$ (here $\lfloor z \rfloor$ denotes the largest integer $\leq z$ and $\{z\} = z - \lfloor z \rfloor$ the fractional part of z). Thus asking for the first digit of n in base β to be less than α (where $1 \leq \alpha < \beta$ will always be assumed) is equivalent to the condition $\{\log_\beta n\} < \log_\beta \alpha$ so Benford's law would then follow from the equidistribution of $\{\log_\beta n\}$ [17], p. 131. In fact, this is not true [23], p. I-24, and it is easy to see that Benford's law does not hold directly.

There have been numerous attempts to resolve this (*see* [11], [15], Section 4.2.4), but they require special probabilistic interpretations. A result not using such interpretations was proved by Duncan [5]:

$$\frac{1}{H_x} \sum_{n<x}{}^{*} \frac{1}{n} \longrightarrow \log_\beta \alpha, \quad \text{where } H_x = \sum_{n<x} \frac{1}{n}, \tag{1}$$

Note présentée par Jean-Pierre SERRE.

and $\sum^*$ limits summation to n with first digit $< \alpha$ in base β (Benford's law holds harmonically). Since it is known [3] that (1) is equivalent to $\lim_{s\to 1^+}(s-1)\zeta_{\alpha,\beta}(s) = \log_\beta \alpha$, where $\zeta_{\alpha,\beta}(s) = \sum^*_{n\geq 1} n^{-s}$, it is interesting to find the complete analytic continuation of $\zeta_{\alpha,\beta}(s)$. The key is to write $\zeta_{\alpha,\beta}(s) = L(s,\alpha,\beta) - L(s,1,\beta) + \zeta(s)\log_\beta \alpha$, where $L(s,\alpha,\beta) = \sum_{n=1}^\infty \{\log_\beta n/\alpha\} n^{-s}$. The analytic properties of $\zeta_{\alpha,\beta}(s)$ therefore follow from those of $L(s,\alpha,\beta)$.

This reduction is natural from a number-theoretic standpoint as $L(s,\alpha,\beta)$ relates to the lattice point problem under a logarithmic curve (this question has been considered by G. Kuba [16]). The corresponding question for right triangles was examined by Hecke [10] who showed that $\sum_{n=1}^\infty \{\vartheta n\} n^{-s}$ has a meromorphic continuation to the whole plane when ϑ is quadratic irrational (this has been generalized to cones by W. Duke [4]) and Hardy and Littlewood [8] who showed that there is a natural boundary for ϑ well approximable by rationals (their result only holds for a set of ϑ of measure zero).

THEOREM 1. – *The function $L(s,\alpha,\beta)$ has an analytic continuation to $\sigma > 0$ but either has a natural boundary at $\sigma = 0$ or a meromorphic continuation to the whole plane. There is a continuation to the whole plane only if β is a Pisot or Salem number and $\alpha \in \mathbf{Q}(\beta)$. If $\alpha \in \mathfrak{M}_\beta = \mathbf{Z}[1/\beta]/f'(\beta)$, there is an analytic continuation if and only if the second largest conjugate of β is real (so β is not a Salem number). If $\alpha \notin \mathfrak{M}_\beta$, then for β a Pisot number there is a continuation if and only if there is an $m \in \mathbf{Z}$ such that $\mathrm{trace}(m\alpha\beta^k)$ is an integer not divisible by m for all large k (for Salem numbers this condition is necessary).*

COROLLARY 1. – *The function $\zeta_{\alpha,\beta}(s)$ either has a natural boundary at $\sigma = 0$ or a meromorphic continuation to the whole plane. The latter happens if and only if β is a Pisot number $\alpha \in \mathbf{Q}(\beta)$, and either* (a) *the second largest conjugate of β is real or* (b) *$\alpha \in \mathfrak{M}_\beta$ and the conjugate of α corresponding to the second largest conjugate of β is positive.*

A connection between Pisot numbers and the lattice point problem was previously noted by G. Kuba [16]. This result shows that the appropriate generalization of the leading digit problem is to Pisot bases (this is consistent with other results on generalized expansions, e.g., [2]). The condition on the second largest conjugate is satisfied for integers and quadratic irrationals. For $n > 2$ one has:

THEOREM 2. – *Consider the polynomial $p(X) = X^{n+1} + aX^n + bX + c$, $n > 1$, then the following conditions are necessary and sufficient for $p(X)$ to be the minimal polynomial of a Pisot number whose second largest conjugate is real: $c \neq 0$, $a < -1$ and one of*

$$bc < 0 \text{ and } |a| \geq |b| + |c|, \quad \text{or } b, c < 0 \text{ and } |a| \geq |b| + |c| + 1, \quad \text{or } b, c \geq 0 \text{ and } |a| > |b| + |c| + 1,$$

(these conditions already insure that $p(X)$ is a Pisot polynomial) as well as one of the following conditions:

$$\text{(i) } c > 0,\ b \geq 0; \qquad \text{(ii) } c > 0,\ b < 0,\ n \text{ even}; \qquad \text{(iii) } c < 0,\ b > 0,\ n \text{ odd}.$$

1. Le premier chiffre significatif

Le phénomène bien connu [12], [15], Section 4.2.4, du premier chiffre significatif est l'observation que les nombres « naturels » ont leur premier chiffre significatif $\leq \alpha$ en base β avec probabilité $\log_\beta \alpha = \frac{\log \alpha}{\log \beta}$ (loi de Benford). En effet, si on écrit n en flottant, le premier chiffre est $\leq \alpha$ exactement quand $\lfloor \log_\beta n \rfloor \leq \log_\beta \alpha$ (ici $\lfloor z \rfloor =$ est le plus grand entier $\leq z$ et $\{z\} = z - \lfloor z \rfloor$ est la partie fractionnaire de z), donc la loi de Benford suivra de l'équidistribution de $\{\log_\beta n\}$ [17], p. 131. Mais ceci est faux [23], p. I-24, puisqu'il est facile de voir que $(\sum^*_{n<x} 1)/x$ n'a pas de limite, où $\sum^*$ veut dire que la somme n'inclut que les termes où le premier chiffre est inférieur à α.

Il y a eu beaucoup d'articles essayant de résoudre cette question [11] mais ils utilisent tous des interprétations probabilistes spéciales. En revanche, un résultat rigoureux a été prouvé par Duncan [5] :

$$\frac{1}{H_x} \sum_{n<x}{}^* \frac{1}{n} \longrightarrow \log_\beta \alpha, \quad \text{où} \quad H_x = \sum_{n<x} \frac{1}{n},$$

donc la loi de Benford est correcte en moyenne harmonique. L'objet de cette Note est d'étendre ce résultat. Il est bien connu [3] que le théorème de Duncan est équivalent à $\lim_{s\to 1^+}(s-1)\zeta_{\alpha,\beta}(s) = \log_\beta \alpha$, où $\zeta_{\alpha,\beta}(s) = \sum^*_{n\geq 1} n^{-s}$. Il est donc intéressant d'essayer de trouver le prolongement complet. Ceci est possible en utilisant le fait que $\{z-a\}-\{z\}+\{a\}$ est la fonction caractéristique de $\{z\} < \{a\}$, donc $\zeta_{\alpha,\beta}(s) = L(s,\alpha,\beta) - L(s,1,\beta) + \zeta(s)\log_\beta \alpha$, où $L(s,\alpha,\beta) = \sum_{n=1}^\infty \{\log_\beta n/\alpha\} n^{-s}$.

Cette réduction est naturelle du point de vue de la théorie des nombres puisque $L(s,\alpha,\beta)$ décrit le nombre de points entiers sous une courbe logarithmique (ce problème a déjà été traité par G. Kuba [16]). Le problème correspondant pour un triangle rectangle a été étudié par Hecke [10] et Hardy et Littlewood [8]. Hecke a démontré que $\Lambda(s,\vartheta)$, défini par $\sum_{n=1}^\infty \{\vartheta n\} n^{-s}$, a un prolongement méromorphe si ϑ est un nombre quadratique irrationnel (ceci a été généralisé aux cônes par W. Duke [16]) et Hardy et Littlewood ont démontré qu'il y a une frontière naturelle pour certains irrationnels bien approchés par les rationnels (leur résultat dépend d'une condition satisfaite sur un ensemble de mesure nulle).

THÉORÈME 1. – *La fonction $L(s,\alpha,\beta)$ a un prolongement analytique jusqu'à $\sigma > 0$, mais soit une frontière naturelle en $\sigma = 0$, soit est méromorphe sur le plan entier. S'il y a un prolongement au plan entier, β est un nombre de Pisot ou de Salem et $\alpha \in \mathbf{Q}(\beta)$. Si $\alpha \in \mathfrak{M}_\beta = \mathbf{Z}[1/\beta]/f'(\beta)$, il y a un prolongement si et seulement si le deuxième plus petit conjugué de β est réel (donc β n'est pas un nombre de Salem). Si $\beta \notin \mathfrak{M}_\beta$ et β est un nombre de Pisot, il y'a un prolongement si et seulement si il existe un nombre entier m tel que* $\mathrm{trace}(m\alpha\beta^k)$ *ne soit pas divisible par m pour k assez grand (pour les nombres de Salem cette condition est nécessaire).*

COROLLAIRE 1. – *La fonction $\zeta_{\alpha,\beta}(s)$ a un prolongement méromorphe pour $\sigma > 0$ et soit a une frontière naturelle en $\sigma = 0$ ou un prolongement méromorphe sur tout le plan. Cette deuxième possibilité se produit si et seulement si β est un nombre de Pisot, $\alpha \in \mathbf{Q}(\beta)$, et* (a) *le deuxième conjugué de β est réel, ou* (b) *$\alpha \in \mathfrak{M}_\beta$ et le conjugué de α correspondant au deuxième conjugué de β est positif.*

G. Kuba [16] a déjà noté un lien entre les nombres de Pisot et le problème de points entiers. Ce résultat montre que la généralisation correcte du problème du premier chiffre est liée aux bases de Pisot [2]. La condition que le deuxième conjugué soit réel est évidemment vraie pour les entiers ou irrationnels quadratiques et un argument connu [22], p. 3, montre qu'il en existe de degré $n > 2$ dans des extensions totalement réelles. Des exemples plus explicites sont donnés par :

THÉORÈME 2. – *Le polynôme $p(X) = X^{n+1} + aX^n + bX + c$, $n > 1$, a pour racine un nombre de Pisot avec deuxième conjugué réel si et seulement si : $c \neq 0$, $a < -1$, et une des conditions suivantes est satisfaite :*

(i) $b, c < 0$ *et* $|a| \geq |b| + |c|$, *ou* (ii) $b, c < 0$ *et* $|a| \geq |b| + |c| + 1$, *ou* (iii) $b, c \geq 0$ *et* $|a| > |b| + |c| + 1$,

(ces conditions démontrent que $p(X)$ est un polynôme de Pisot) ainsi que l'une de ces conditions :

(iv) $c > 0$, $b \geq 0$, (v) $c > 0$, $b < 0$, *n pair,* (vi) $c < 0$, $b > 0$, *n impair.*

Par exemple, les nombres de Pisot ϕ_n engendrés par $X^{n+1} - 2X^n + X - 1$, n impair, ont leur deuxième conjugué réel (Amara [1] a prouvé qu'ils sont des points limites de nombres de Pisot). Il existe aussi des exemples de $\alpha \in \mathbf{Q}(\beta)$ qui ont un deuxième conjugué réel tandis que le deuxième conjugué de β est complexe. Par exemple, $\beta = 1 + 2^{1/4} + 2^{1/2} + 2^{3/4}$, $\alpha = -8\beta - 9\beta^2 + 2\beta^3$. La condition (b) du théorème 1 peut être caractérisée dans certains cas :

THÉORÈME 3. – *Soit β un entier algébrique tel que son polynôme minimal $f(X)$ soit de degré n, et soit $\alpha \in \mathbf{Q}(\beta)$. Alors* trace $(\alpha\beta^k)$ *est un entier pour k suffisamment grand si et seulement si $\alpha \in \mathfrak{M}_\beta$. Si $f(X)$* mod *p a une racine $\neq 0$, alors il existe α tel que* trace$(\alpha\beta^k) \not\equiv 0$ mod *p pour tout k (cette condition est nécessaire pour $p = 2$). Si tous les facteurs irréductibles de $f(X)$* mod *p sont primitifs (chaque racine engendre le groupe multiplicatif de son corps de décomposition), alors il n'existe pas un tel α.*

L'ensemble $\mathfrak{M}_\beta = \{h(\beta)\beta^{-k}/f'(\beta);, \ h(X) \in \mathbf{Z}[X], k \in \mathbf{Z}\}$ a déjà été identifié par Y. Meyer [18], p. 27, Proposition 4. Des exemples du cas (b) du théorème 1 sont les nombres de Pisot engendrés par $X^{n+1} - (2m+1)X^n - mX - m$, et n, $m \geq 2$. Dans ce cas, $L(s, \alpha, \beta_m)$ a une frontière naturelle si $\alpha \in \mathfrak{M}_\beta$, mais $L(s, 1/m, \beta_m)$ a un prolongement au plan entier. Il existe toujours un α quand $f(X)$ a un facteur linéaire donc le théorème de densité de Chebotarev [25] montre :

COROLLAIRE 2. – *Pour tout nombre de Pisot ou de Salem β, il existe un nombre infini de $\alpha \in \mathbf{Q}(\beta)$ tel que $L(s, \alpha, \beta)$ ait un prolongement au plan entier.*

Par exemple, si τ est le nombre de Salem engendré par $f(X) = X^4 - 3X^3 + 3X^2 - 3X + 1$, alors $\beta = \tau + \tau^3$ est un nombre de Pisot de degré 4, et $L(s, \alpha, \tau)$ a un prolongement au plan entier, où

$$\alpha = \frac{(1 - 3/\tau)(1 + 13/\tau + 1/\tau^2)\beta^9}{19 f'(\tau)}.$$

La deuxième condition du théorème 3 donne une condition pour qu'il y ait un nombre infini de p tel que $L(s, \alpha/p, \beta)$ ait une frontière naturelle pour tout $\alpha \in \mathfrak{M}_\beta$. Mais ceci dépend d'un analogue de la conjecture d'Artin (on peut espérer que les méthodes de [13], [7], [9] s'appliquent aussi dans ce cas) :

CONJECTURE D'ARTIN–CHEBOTAREV. – *Soit $f(X)$ un polynôme irréductible tel que $f(0) \neq -1$ n'est pas un carré, alors pour chaque type de factorisation de densité positive, il y a un nombre infini de nombres premiers p tel que chaque facteur de $f(X)$* mod *p soit primitif.*

2. Esquisse de démonstration

Le résultat principal (corollaire 1) découle de la méthode suivante [27]. On commence donc par la formule d'Euler–Maclaurin qui donne

$$\begin{aligned} L(s, \alpha, \beta) = &- \zeta(s)\log_\beta \alpha - \frac{\zeta'(s)}{\log \beta} + \frac{\alpha^{1-s}}{(1-s)(\beta^{s-1} - 1)} \\ &+ \alpha^{-s}\sum_{m=0}^{r-1} \frac{\alpha^{-m}}{m+1}\binom{-s}{m} F_{m+1}\big(\alpha, \beta, \beta^{-(s+m)}\big) + \binom{-s}{r}\int_\alpha^\infty \frac{B_r(\{1-z\})\lfloor \log_\beta z/\alpha \rfloor}{z^{s+r}}\,\mathrm{d}z, \end{aligned} \tag{2}$$

où les $B_m(z)$ sont les polynômes de Bernoulli et $F_m(\alpha, \beta, X) = \sum_{k=1}^\infty B_m(\{1 - \alpha\beta^k\})X^k$. G. Tenenbaum [26] a démontré que le prolongement jusqu'à $\sigma > 0$ est possible pour la classe de séries $\sum_{n=1}^\infty g(\log n)n^{-s}$, où $g(t) = \sum_{k=-\infty}^\infty a_k \,\mathrm{e}^{2\pi i k t}$ est périodique de variation bornée, et normalisée par $g(t) = \big(g(t^+) + g(t^-)\big)/2$. Il utilise la formule

$$\sum_{n=1}^\infty \frac{g(\log n)}{n^s} = \sum_{k=-\infty}^\infty a_k \,\zeta(s - 2\pi i k),$$

et démontre que la somme de droite converge en valeur principale de Cauchy pour $\sigma > 0$. La formule (2) montre que le prolongement analytique de $L(s, \alpha, \beta)$ pour $\sigma \leq 0$ est équivalent au prolongement analytique de $F_m(\alpha, \beta, X)$, $m = 1, 2, \ldots$, pour $|X| \geq 1$. Il est facile de démontrer [27] que le prolongement analytique de toutes ces fonctions est équivalent au prolongement de $F_{\alpha,\beta}(X) = \sum_{k=1}^{\infty} \{\alpha\beta^k\} X^k$, et je prouve que $F_{\alpha,\beta}(X)$ n'a pas de frontière naturelle en $|X| = 1$ si et seulement si α et β satisfont les conditions du théorème 1.

Ce résultat utilise un théorème de R. Salem [21] qui dit que $F_{\alpha,\beta}(X)$ a une frontière naturelle en $|X| = 1$ sauf si β est un nombre de Pisot ou de Salem (la preuve dépend du fameux théorème de Pólya–Carlson [20]). Il faut donc démontrer qu'il n'y a pas de prolongement quand β n'est pas un nombre donné par les conditions du théorème 1. L'idée principale est que les nombres de Pisot et de Salem ont une partie fractionnaire explicite. En revanche, il faut préciser que la partie fractionnaire utilisée dans l'analyse usuelle des nombres de Pisot [14], [18], [22], est différente de celle de cette note : ces auteurs utilisent $z = [z] + (z)$, où $[z] \in \mathbf{Z}$, $-1/2 \leq (z) < 1/2$. Donc, si β est un nombre de Pisot de conjugués $\beta = \beta_1, \beta_2, \ldots, \beta_n$, et $\alpha \in \mathbf{Q}(\beta)$ est un entier algébrique avec conjugués $\alpha = \alpha_1, \ldots, \alpha_n$, alors

$$\alpha\beta^k + \alpha_2\beta_2^k + \cdots + \alpha_n\beta_n^k = a_k \in \mathbf{Z}. \quad k = 1, 2, \ldots, \tag{3}$$

Puisque $|\beta_2|, \ldots, |\beta_n| < 1$ on a $(\alpha\beta^k) = -\alpha_2\beta_2^k - \cdots - \alpha_n\beta_n^k \to 0$. Mais si on utilise $\{z\}$, la situation n'est plus aussi simple parce que $\{z\}$ n'est pas continu en $z = 0$. Donc, pour enlever les parenthèses dans la formule $\{\alpha\beta^k\} = \{ -\alpha_2\beta_2^k - \cdots - \alpha_n\beta_n^k\}$ il faut connaître le signe de la somme. Il est naturel que ce signe soit déterminé par le deuxième conjugué (démontré dans [27] en utilisant une estimation de formes linéaires de logarithmes [6]). Dans le cas où $\alpha \in \mathfrak{M}_\beta$, on écrit $\beta_2 = |\beta_2| e^{2\pi i\omega}$ et $\alpha_2 = |\alpha_2| e^{2\pi i\xi}$. Le signe de la partie réelle de $\alpha_2\beta_2^k$ est donc $\chi(k\omega + \xi)$, où $\chi(z) = 1$ si $-1/4 < (z) < 1/4$ et $= 0$ sinon. Ceci donne

$$\{\alpha\beta^k\} = \chi(k\omega + \xi) - \alpha_2\beta_2^k - \cdots - \alpha_n\beta_n^k.$$

Puisqu'il est bien connu [19] que ω est irrationnel pour les nombres de Pisot sauf si β_2 est réel, on peut supposer que le prolongement analytique de $F_{\alpha,\beta}(X)$ dépend de cette condition. De plus, une méthode analogue (utilisant le théorème d'approximation simultanée de Kronecker [14], [18]) exclurait aussi les nombres de Salem puisque leurs deuxièmes conjugués ne sont pas réels. Il en est ainsi, et ces résultats sont prouvés dans [27]. On peut conclure que pour les nombres de Pisot, le signe du deuxième conjugué détermine le caractère analytique de $F_{\alpha,\beta}(X)$ quand $\alpha \in \mathfrak{M}_\beta$.

Par contre, la situation est plus compliquée si $\alpha \notin \mathfrak{M}_\beta$. Dans ce cas, soit $m \in \mathbf{Z}$ tel que $m\alpha \in \mathfrak{M}_\beta$, d'après (3) on a, pour k suffisamment grand,

$$\{\alpha\beta^k\} = \left\{\frac{a_k}{m} - \alpha_2\beta_2^k - \cdots - \alpha_n\beta_n^k\right\},$$

où $a_k \in \mathbf{Z}$. Si $a_k \not\equiv 0 \bmod m$ pour tout k assez grand, alors $\{\alpha\beta^k\}$ ne sera jamais très près de zéro, donc la discontinuité de $\{z\}$ ne paraîtra pas et $F_{\alpha,\beta}(X)$ sera une fonction rationnelle. Par exemple, soit β la racine de $X^3 - 5X^2 - 2X - 2$. Alors $\{\beta^k\}$ oscille entre 0 et 1 tandis que $\{\beta^k/2\} \to 1/2$.

Dans le cas de $\zeta_{\alpha,\beta}(s)$, les propriétés subtiles de $\operatorname{trace}(\alpha\beta^k) \bmod p$ n'interviennent pas et il suffit d'examiner les cas indiqués ci-dessus [27]. Dans le cas de $L(s, \alpha, \beta)$ on doit analyser le comportement de $\operatorname{trace}(\alpha\beta^k)$. Ceci découle de la formule d'interpolation de Lagrange : si $\alpha = h(1/\beta)/f'(\beta)$, où $h(X) \in \mathbf{Q}[X]$, alors

$$\sum_{k=0}^{\infty} \operatorname{trace}(\alpha\beta^k) X^k = X^{n-1} \frac{h(X)}{\bar{f}(X)} + P(X), \tag{4}$$

où $P(X) \in \mathbf{Q}[X]$ et $\bar{f}(X) = X^n f(1/X)$. Il est facile de voir que le développement en série mod m est caractérisé pour ceux modulo les puissances de nombres premiers p^r. On commence par analyser le cas $m = p$. En appliquant (4) modulo p, il est clair que si $f(X)$ a un facteur linéaire $X - a$ alors on peut prendre $h(X) = \bar{f}(X)/(1 - a^{-1}X)$ et le développement en série de

$$\frac{h(X)}{\bar{f}(X)} \equiv \frac{(1 - X^q)/(1 - a^{-1}X)}{1 - X^q} \pmod p$$

n'a pas de coefficient nul (où $\mathbf{F}_q$ est le corps de décomposition de $f(X)$). En revanche, si $f(X)$ est primitif, alors pour chaque choix de α, la suite $\alpha\beta^k$ va prendre toutes les valeurs dans $\mathbf{F}_q$, donc il y aura toujours un membre de trace zéro. On peut ensuite déduire le résultat pour un produit de polynômes primitifs [27].

Références bibliographiques

[1] Amara M., Ensembles fermés de nombres algébriques, Ann. Sci. École Norm. Sup. 83 (1966) 215–270.
[2] Berend D., Frougny Ch., Computability by finite automata and Pisot bases, Math. Systems Th. 27 (1994) 274–282.
[3] Diaconis D., Weak and strong averages in probability and the theory of numbers, Ph.D. Dissertation, Department of Statistics, Harvard University, 1974.
[4] Duke W., Lattice points in cones, prépublication, 1990.
[5] Duncan R.L., A note on the initial digit problem, Fibonacci Quarterly 7 (1969) 474–475.
[6] Feldman N.I., Estimation of a linear form in the logarithms of algebraic numbers, (Russian) Math. Sb. (N.S.) 76 (118) (1968) 304–319.
[7] Gupta R., Murty R., A remark on Artin's conjecture, Invent. Math. 78 (1984) 127–130.
[8] Hardy G.H., Littlewood J.E., Some problems of Diophantine approximation, Trans. Cambridge Phil. Soc. 22 (1923) 519–33.
[9] Heath-Brown D.R., Artin's conjecture for primitive roots, Quarterly J. Math. 37 (1986) 27–38.
[10] Hecke E., Über analytische Funktionen und die Verteilung von Zahlen mod Eins, Abh. Math. Sem. Univ. Hamburg 1 (1921) 54–76.
[11] Hill T.P., Base-invariance implies Benford's law, Proc. Amer. Math. Soc. 123 (1995) 887–895.
[12] Hill T.P., Le premier chiffre significatif fait sa loi, La Recherche (janvier 1999) 72–75.
[13] Hooley C., On Artin's conjecture, J. Reine Angew. Math. 225 (1967) 209–220.
[14] Kahane J.-P., Salem R., Ensembles parfaits et séries trigonométriques, Hermann, Paris, 1994.
[15] Knuth D.E., The Art of Computer Programming, Vol. 2, 3rd Edition, Addison-Wesley, 1998.
[16] Kuba G., The number of lattice points below a logarithmic curve, Arch. Math. (Basel) 69 (1997) 156–163.
[17] Lang S., Algebraic Numbers, Addison-Wesley, Reading, MA, 1964.
[18] Meyer Y., Algebraic numbers and harmonic analysis, North-Holland, Elsevier, New York, 1972.
[19] Mignotte M., Sur les conjugués des nombres de Pisot, C. R. Acad. Sci. Paris 298 Série I (1984) 21–24.
[20] Pólya G., Sur les séries entières à coefficients entiers, Proc. London Math. Soc. 21 (1923) 22–38.
[21] Salem R., Power series with integral coefficient, Duke Math. J. 12 (1945) 153–172.
[22] Salem R., Algebraic numbers and Fourier analysis, D.C. Heath, Boston, 1963.
[23] Serre J.-P., Abelian ℓ-adic representations and elliptic curves, Research Notes in Math. 7, A.K. Peters, Wellesley, MA, 1998.
[24] Shanks D., Fibonacci primitive roots, Fibonacci Quaterly 10 (1972) 163–168.
[25] Stevenhagen P., Lenstra H.W., Jr., Chebotarev and his density theorem, Math. Intell. 18 (1996) 26–37.
[26] Tenenbaum G., communication personnelle, 1998.
[27] Vardi I., Leading digits, lattice points, and algebraic numbers, prépublication, 1998.