Examen partiel MPRI

29 Novembre 2012

On attachera une grande importance à la clarté de la rédaction. On précisera en tête de copie son **nom et son prénom.**

Les notes de ce cours sont autorisées (manuscrites ou imprimées). Tous les autres documents (livres, notes d'autres cours du MPRI, ordinateurs, ...) sont interdits.

On n'hésitera pas à **sauter des questions**. *En particulier, si le résultat de la question est donné dans l'énoncé, on pourra le réutiliser aux questions suivantes, même si la question n'a pas été traitée. Les différentes questions sont de difficulté très variable, et leur ordre n'a rien à voir avec leur difficulté.*

Exercice I (Arbres plans)

(I-1) Montrer que le nombre d'arbres plans enracinés ayant n arêtes et l feuilles est égal au nombre d'arbres plans enracinés ayant n arêtes et l noeuds internes. En déduire le nombre moyen de feuilles d'un arbre plan enraciné à n sommets.

Exercice II (Polynôme de Tutte)

Dans cette exercice, les graphes peuvent avoir des boucles ou des arêtes multiples. Si G est un graphe, on note respectivement $s(G)$, $a(G)$, $\kappa(G)$ le nombre de sommets, d'arêtes, et de composantes connexes de G. On note $T_G(x, y)$ le polynôme de Tutte de G.

(II-1) Montrer que l'on a $s(G) - a(G) \leq \kappa(G)$ avec égalité si et seulement si G est une forêt.

(II-2) En déduire :
- que $T_G(1, 1)$ est égal au nombre de forêts couvrantes de G (sous-graphes acycliques ayant le même nombre de composantes connexes que G).
- que $T_G(2, 1)$ est égal au nombre de sous-graphes de G qui sont des forêts.

(II-3) (*) Une *orientation acyclique* d'un graphe est une orientation de ses arêtes telle qu'il n'existe aucun circuit dirigé, c'est à dire aucun $r \geq 1$ et aucune suite d'arêtes

$$e_1, e_2, \dots, e_r$$

telle que $\textit{origine}(e_i) = \textit{extremité}(e_{i-1})$ pour $1 \leq i \leq r$ (avec $e_0 = e_r$).
Montrer que le nombre d'orientations acycliques de G est égal à $T_G(2, 0)$.
(on pourra montrer que ce nombre satisfait les relations caractérisant le polynôme de Tutte.)

Exercice III (Balles et paniers)

Soient n et k des entiers positifs, avec $n \geq k \geq 1$. Soient n balles, numérotées de 1 à n, et k paniers, numérotés de 1 à k. On note $a_{n,k}$ le nombre de façons de mettre les n balles dans les k paniers de sorte que chaque panier contienne au moins 1 balle. Par exemple, $a_{3,2} = 6$ et $a_{4,4} = 24$.

(III-1) Montrer que $a_{n,k} = \sum_{i=0}^{k} (-1)^i \binom{k}{i} (k-i)^n$.

Exercice IV (Chemins de Schröder)

Dans cet exercice, on considère des chemins sur le réseau $\mathbb{Z} \times \mathbb{N}$, formés de trois types de pas :

- des pas $(1, 1)$, c'est à dire des pas montants ;
- des pas $(1, -1)$, c'est à dire des pas descendants ;
- des pas $(2, 0)$, c'est à dire des pas horizontaux de longueur 2.

Pour $n \geq 0$, un *chemin de Schröder de taille* n est un chemin utilisant ces trois types de pas et allant de la position $(0, 0)$ à la position $(2n, 0)$ en restant dans le demi-plan supérieur $\mathbb{Z} \times \mathbb{N}$. Voir la figure 1. On note s_n le nombre de chemins de Schröder de taille n.

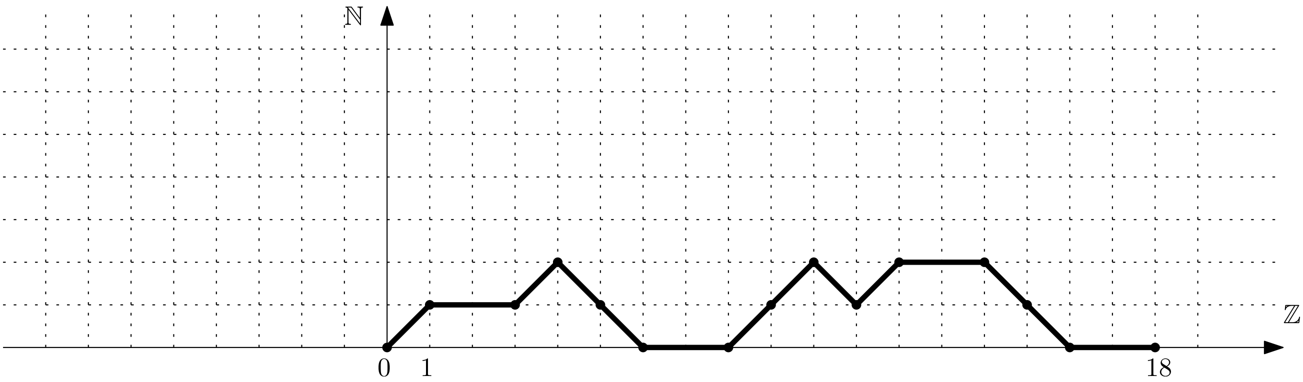

FIGURE 1 – Un chemin de Schröder de taille 9.

(IV-1) Dessiner tous les chemins de Schröder de tailles 1 et 2, et vérifier ainsi que $s_1 = 2$ et $s_2 = 6$. Un chemin de Schröder est dit *petit* s'il n'a aucun pas horizontal à l'ordonnée 0. On note r_n le nombre de petits chemins de Schröder de taille n. Entourer les petits chemins sur vos dessins, et vérifier ainsi que $r_1 = 1$ et $r_2 = 3$.

(IV-2) Un chemin de Schröder est dit *pur* s'il est non vide et s'il ne touche pas l'axe des abscisses, sauf en son point initial et son point final. Montrer que les chemins purs sont en bijection avec les chemins commençant par un pas horizontal (la bijection préservant la taille).

(IV-3) (*) En déduire que pour $n \geq 1$ les chemins de Schröder de taille n qui ne sont pas petits sont en bijection avec les chemins de Schröder de taille n qui sont petits. En déduire que pour tout $n \geq 1$ on a $s_n = 2r_n$.
(On pourra décomposer les chemins non-petits en leur premier pas horizontal à l'ordonnée 0*.)*

(IV-4) Pour $1 \leq i \leq n$ on considère les points $u_i = (1 - 2i, 0)$ et $v_i = (2i - 1, 0)$. On note L_n le nombre de systèmes de chemins de Schröder non-intersectants allant de $\{u_1, u_2, \ldots, u_n\}$ à $\{v_1, v_2, \ldots, v_n\}$. Dessiner un exemple de tel système pour $n = 3$, puis donner une expression de L_n comme un déterminant faisant apparaître les nombres $(s_k)_{k \geq 1}$.
(on prendra garde à justifier sa réponse)

(IV-5) On note P_n le nombre de systèmes de *petits* chemins de Schröder non-intersectants allant de $\{u_1, u_2, \ldots, u_n\}$ à $\{v_1, v_2, \ldots, v_n\}$. Donner une expression de L_n comme un déterminant faisant apparaître les nombres $(r_k)_{k \geq 1}$.

(IV-6) Montrer en raisonnant bijectivement que pour $n \geq 2$ on a $P_n = L_{n-1}$.

(IV-7) Déduire des trois questions précédentes que pour tout $n \geq 1$ on a

$$L_n = 2^{\frac{n(n+1)}{2}}.$$

(on pourra commencer par exhiber une relation de récurrence)

(IV-8) Vérifier le résultat de la question précédente en dessinant les 8 systèmes de chemins non-intersectants pour $n = 2$.

Exercice V (Encore des arbres plans)

Soit $T(x)$ la série génératrice des arbres plans enracinés dont tous les sommets ont une arité paire, comptés par le nombre de sommets.

(V-1) Montrer qu'un tel arbre a toujours un nombre impair de sommets.

(V-2) Montrer que $T(x)$ est solution de l'équation $T = x\dfrac{1}{1-T^2}$.

(V-3) En déduire le nombre de tels arbres ayant $2n+1$ sommets, pour $n \geq 0$.
(on rappelle l'identité suivante : $[y^n](1-y)^{-r} = \binom{n+r-1}{r-1}$)

(V-4) Quels nombres reconnaissez-vous à la question précédente ? Donner une explication bijective.

(V-5) Généraliser tout cet exercice aux arbres dont tous les sommets ont arité 0 modulo m, pour $m \geq 2$.