Examen final MPRI

3 mars 2011

On attachera une grande importance à la concision, à la clarté, et à la précision de la rédaction. On précisera en tête de copie son nom et son prénom.

1 Séries génératrices et langages

Question 1 On considère le langage $\mathcal{R}$ des mots sur l'alphabet $\{a, b\}$ qui contiennent le motif aba. Donner une formule pour la série génératrice

$$R(t) = \sum_{\omega \in \mathcal{R}} t^{|\omega|}$$

des mots de ce langage en fonction de leur longueur. De quel type est cette série ?

On considère maintenant le langage $\mathcal{A}$ des mots sur l'alphabet $\{a, b\}$ engendré à partir du symbole non terminal S par la grammaire algébrique (ou "context-free") suivante :

$$\begin{aligned} S &\rightarrow aSbT + bT \\ T &\rightarrow baS + a \end{aligned}$$

Question 2 Montrer que cette grammaire est non ambiguë. (Indication : on pourra par exemple expliquer comment reconstruire l'arbre de dérivation d'un mot du langage).

Question 3 Donner un système d'équations faisant intervenir la série génératrice

$$A(t) = \sum_{\omega \in \mathcal{A}} t^{|\omega|}$$

des mots de ce langage en fonction de leur longueur. De quel type est cette série ?

Question 4 Simplifier le système d'équations précédent pour obtenir une unique équation liant $A(t)$ et t. En déduire une expression explicite de $A(t)$ et le nombre de mots de longueur n du langage.

2 Stratégie récursive pour engendrer les arbres k-réguliers

On se propose de décrire une variante de l'algorithme de Rémy pour la génération aléatoire uniforme d'arbres plans réguliers (on rappelle que l'algorithme de Rémy opère sur les arbres binaires). On fixe un entier $k \geq 3$. Un arbre plan est un arbre (non enraciné) plongé dans le plan. Les feuilles sont les sommets de degré 1, les noeuds sont les sommets non feuilles. Un arbre k-régulier est un arbre plan dont tous les noeuds ont degré k ($k = 3$ correspond aux arbres binaires non enracinés). Un arbre quasi k-régulier est un arbre plan ayant un noeud marqué et dont tous les noeuds non marqués ont degré k.

Question 5 Soit t un arbre quasi k-régulier ayant n noeuds et dont le noeud marqué a degré i ($i \geq 2$). Soit e le nombre d'arêtes et ℓ le nombre de feuilles de t. Montrer que

$$e = (k-1)n + i, \qquad \ell = (k-2)n + i.$$

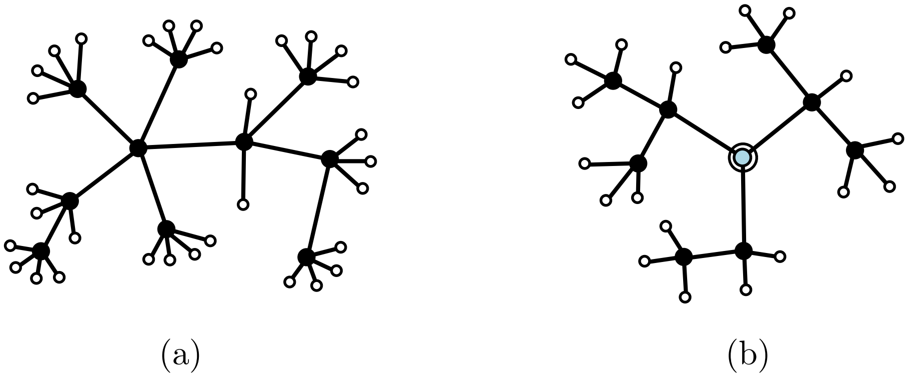

FIG. 1 – (a) Un arbre 5-régulier (noeuds en noir, feuilles en blanc). (b) Un arbre quasi 4-régulier dont le noeud marqué a degré 3.

Question 6 Pour $i \geq 2$ et $n \geq 0$, on note $\mathcal{Q}_i[n]$ l'ensemble des arbres quasi k-réguliers ayant n noeuds non marqués et dont le noeud marqué a degré i, on note $\mathcal{E}_i[n]$ l'ensemble des paires (t, e) tel que $t \in \mathcal{Q}_i[n]$ et e est une arête de t, et on note $\mathcal{P}_i[n]$ l'ensemble des paires (t, ℓ) tel que $t \in \mathcal{Q}_i[n]$ et ℓ est une feuille de t. On note $E_i[n]$ le cardinal de $\mathcal{E}_i[n]$ et $P_i[n]$ le cardinal de $\mathcal{P}_i[n]$. Montrer que

$$E_i[n] \cdot ((k-2)n + i) = P_i[n] \cdot ((k-1)n + i).$$

Question 7 Par certaines opérations de découpage/recollage, montrer que, pour tout $i \geq 2$ et $n \geq 0$, $\mathcal{E}_i[n]$ est en bijection avec $\mathcal{P}_{i+1}[n]$. En déduire que

$$\frac{P_{i+1}[n]}{P_i[n]} = \frac{(k-1)n + i}{(k-2)n + i}.$$

Question 8 Pour $n \geq 1$, soit $\mathcal{A}[n]$ l'ensemble des arbres k-réguliers ayant une feuille marquée (enracinés en une feuille) et ayant n noeuds.

Pour $n \geq 1$ montrer que l'ensemble des paires (t, e) tel que $t \in \mathcal{A}[n]$ et e est une arête de t est en bijection avec $\mathcal{P}_2[n]$. En déduire que

$$A[n] \cdot ((k-1)n + 1) = P_2[n].$$

Question 9 Pour $n \geq 1$ montrer que l'ensemble des paires (t, v) tel que $t \in \mathcal{A}[n+1]$ et v est un noeud de t est en bijection avec $\mathcal{P}_k[n]$. En déduire que

$$A[n+1] \cdot (n+1) = P_k[n].$$

Question 10 En déduire que pour $n \geq 1$

$$\frac{A[n+1]}{A[n]} = \frac{1}{n+1} \frac{((k-1)n+1)((k-1)n+2) \cdots ((k-1)n+k-1)}{((k-2)n+2) \cdots ((k-2)n+k-1)},$$

puis que

$$A[n] = \frac{((k-1)n)!}{n!((k-2)n+1)!}.$$

Question 11 En utilisant ce qui précède, décrire un algorithme récursif de génération aléatoire uniforme sur $\mathcal{A}[n]$.

3 Comptage de lacets

Un chemin sur la grille $\mathbf{Z}^2$ est une suite $\omega = (\omega(0), \omega(1), \ldots, \omega(k))$ de points de $\mathbf{Z}^2$ tel que $\omega(0) = (0,0)$ et pour tout $i \in [0..k-1]$ les points $\omega(i)$ et $\omega(i+1)$ sont adjacents sur la grille. Chaque transition de $\omega(i)$ vers $\omega(i+1)$ est appelée un pas du chemin, et l'entier k est la longueur du chemin. Un chemin de longueur k peut être vu comme un mot de longueur k sur l'alphabet $\{N, S, O, E\}$ (la i-ème lettre du mot est $\{N, S, E, O\}$ si le i-ème pas du chemin est vers le nord, le sud, l'est, l'ouest, respectivement).

Un *lacet* est un chemin finissant à l'origine, i.e., $\omega(k) = \omega(0) = (0,0)$.

Pour ω un chemin sur $\mathbf{Z}^2$, on note $x_{\min}(\omega)$ le minimum des abscisses de points de ω, $x_{\max}(\omega)$ le maximum des abscisses de points de ω, $y_{\min}(\omega)$ le minimum des ordonnées de points de ω, $y_{\max}(\omega)$ le maximum des ordonnées de points de ω. On appelle l'ensemble $[x_{\min}(\omega), x_{\max}(\omega)] \times [y_{\min}(\omega), y_{\max}(\omega)]$ la boite de ω, on la note $B(\omega)$. On note $p := x_{\max}(\omega) - x_{\min}(\omega)$ sa largeur et $q := y_{\max}(\omega) - y_{\min}(\omega)$ sa hauteur.

Question 12 Montrer que la longueur d'un lacet est au moins le périmètre de sa boite.

Un lacet est dit *minimal* si sa longueur k est égale au périmètre de sa boite.

Question 13 De combien de pas de chaque type (Nord, Est, Sud et Ouest) est constitué un lacet minimal dont la boite a dimensions $p \times q$ (justifier la réponse).

Un lacet ω est dit *escalier* si il est minimal et part du coin en bas à gauche de sa boite et passe par le coin en haut à droite de sa boite.

Question 14 Dessiner les 9 lacets escaliers de boite 2×1.

Question 15 Soit ω un lacet escalier. Montrer que ω (vu comme un mot sur $\{N, E, O, S\}$) s'écrit comme $\omega_1\omega_2$ (concaténation) où ω_1 est un mot sur $\{N, E\}$ et ω_2 est un mot sur $\{O, S\}$. Où se trouve l'extrémité du chemin ω_1 ?

Question 16 En déduire que le nombre de lacets escaliers de boite $p \times q$ est $\binom{p+q}{p}^2$.

Un chemin $\omega = (\omega(0), \ldots, \omega(k))$ sur la grille $\mathbf{Z}^2$ est dit *auto-évitant* si tous les points $\omega(i)$ sont distincts deux à deux (autrement dit le chemin ne repasse pas par un point par lequel il est déjà passé). Un *polygone* est un lacet qui est auto-évitant sauf au dernier pas (pour qu'il puisse revenir à l'origine).

Question 17 Soit $\mathcal{P}_{p,q}$ l'ensemble des lacets escaliers de boite $p \times q$ tel que ω_1 (la partie du chemin avant le coin supérieur droit) est de la forme $N\omega_1'E$ et ω_2 (la partie du chemin après le coin supérieur droit) est de la forme $S\omega_2'O$. Montrer que le cardinal de $\mathcal{P}_{p,q}$ est $\binom{p+q-2}{p-1}^2$.

Question 18 Soit $\omega \in \mathcal{P}_{p,q}$ et $m = p + q$, de sorte que la longueur du lacet ω est $2m$. On note P_1 le chemin $\omega(1), \omega(2), \ldots \omega(m-1)$ et P_2 le chemin $\omega(2m-1), \omega(2m-2), \ldots, \omega(m+1)$. Montrer que le nombre d'éléments de $\mathcal{P}_{p,q}$ tels que P_1 et P_2 se touchent est $\binom{p+q-2}{p-2}\binom{p+q-2}{q-2}$ (Indication : on considérera le premier endroit v où P_1 et P_2 se touchent et on appliquera une opération d'échange bien choisie).

Question 19 En déduire que le nombre de polygones escaliers de boite $p \times q$ est

$$2\binom{p+q-2}{p-1}^2 - 2\binom{p+q-2}{p-2}\binom{p+q-2}{q-2} = \frac{2}{p+q-1}\binom{p+q-1}{p-1}\binom{p+q-1}{q-1}.$$

On appelle *portion* d'un chemin ω une suite consécutive maximale de pas du même type dans ω. Les portions peuvent être de type Nord, Ouest, Est, Sud ; si c'est Nord ou Sud, la portion est dite verticale, si c'est Est ou Ouest la portion est dite horizontale. L'abscisse d'une portion verticale est l'abscisse commune de tous ses points, l'ordonnée d'une portion horizontale est l'ordonnée commune de tous ses points.

Un lacet de boite $p \times q$ est dit *italien* si l'ensemble des abscisses de ses portions verticales est $[0..p]$, et l'ensemble des ordonnées de ses portions horizontales est $[0..q]$. Autrement dit un chemin est italien si chaque droite $x = i$ avec $i \in [0..p]$ ou $y = j$ avec $j \in [0..q]$ est empruntée par exactement une portion du chemin.

Question 20 Dessiner les 10 lacets italiens escaliers de longueur 12 qui commencent par un pas horizontal.

Question 21 Montrer que la boite d'un lacet italien est nécessairement carrée.

Question 22 On note $\mathcal{L}_n$ l'ensemble des lacets italiens escaliers de boite $n \times n$. Pour un tel lacet ω on note $P(\omega)$ le chemin formé des $2n$ premiers pas de ω. Montrer que pour tout chemin P de $(0,0)$ à (n,n) dont les pas sont dans $\{N, E\}$ il existe un unique lacet italien escalier ω tel que $P(\omega) = P$. En déduire que le cardinal de $\mathcal{L}_n$ est $\binom{2n}{n}$.

Question 23 Combien des 10 lacets dessinés précédemment sont ils des polygones ?

Question 24 Soit ω un lacet italien escalier commençant par un pas Nord. Donner une condition nécessaire et suffisante sur $P(\omega)$ pour que ω soit un polygone (justifier votre caractérisation). En déduire que le nombre de polygones italiens escaliers de boite $n \times n$ commançant par un pas Nord est $\frac{1}{n+1}\binom{2n}{n}$.

4 Algorithme de pivot pour engendrer les chemins autoévitants

Un chemin sur la grille $\mathbf{Z}^2$ est une suite $\omega = (\omega(0), \omega(1), \ldots, \omega(k))$ de points de $\mathbf{Z}^2$ tel que $\omega(0) = (0,0)$ et pour tout $i \in [0..k-1]$ les points $\omega(i)$ et $\omega(i+1)$ sont adjacents sur la grille. Chaque transition de $\omega(i)$ vers $\omega(i+1)$ est appelée un pas du chemin, et l'entier k est la longueur du chemin.

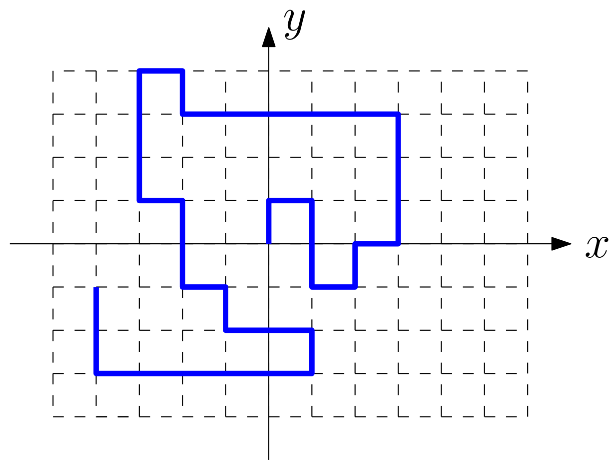

Fig. 2 – Un chemin auto-évitant.

Un chemin $\omega = (\omega(0), \ldots, \omega(k))$ sur la grille $\mathbf{Z}^2$ est dit *auto-évitant* si tous les points $\omega(i)$ sont distincts deux à deux (le chemin ne repasse pas par un point par lequel il est déjà passé).

On note $\mathcal{A}[k]$ l'ensemble des chemins auto-évitants à k pas, et on se propose de définir une chaine de Markov ergodique sur $\mathcal{A}[k]$.

Pour $v \in \mathbf{Z}^2$ on note G_v le groupe des symétries laissant la grille $\mathbf{Z}^2$ globalement invariante, et fixant le point v. Le groupe G_v est de cardinalité 8, il contient 4 réflexions (selon les axes passant par v de pentes $0, -1, +1, \infty$), l'identité, et 3 rotations centrées en v (d'angles $\pi/2, \pi, 3\pi/2$).

Pour $\omega \in \mathcal{A}[k]$ et $s \in [0..k]$, soit $v = \omega(s)$. Soit $g \in G_v$. On définit $\Phi_{s,g}(\omega)$ comme étant le chemin ω' tel que $\omega'(i) = \omega(i)$ pour $0 \leq i \leq s$ et $\omega'(i) = g(\omega(i))$ pour $s \leq i \leq k$ (i.e., on applique la symétrie g à la portion de chemin à partir de v), voir figure ci-dessous.

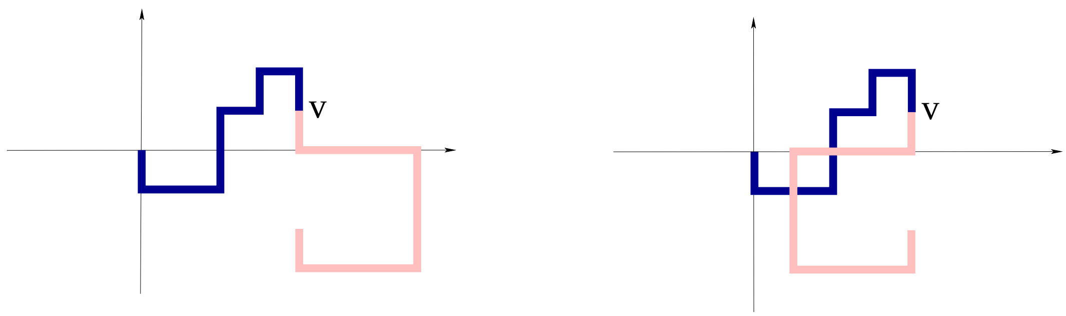

Fig. 3 – À gauche, un chemin auto-évitant ω. À droite, le chemin $\omega' = \Phi_{s,g}(\omega)$, où $s = 9$ et g est la réflexion d'axe $\{x = 4\}$.

On considère la chaine de Markov M suivante sur $\mathcal{A}[k]$: si $\omega \in \mathcal{A}[k]$ est l'état de M à l'instant t on tire un entier $s \in [0..k]$ uniformément au hasard, on note $v = \omega(s)$, et on tire $g \in G_v$ uniformément au hasard. Soit $\omega' = \Phi_{s,g}(\omega)$. Si $\omega' \in \mathcal{A}[k]$ alors on prend ω' comme état de M à l'instant $t+1$, sinon on garde ω.

Question 25 Montrer que M est apériodique.

Question 26 Montrer que M est symétrique.

Question 27 Si on arrive à prouver que M est irréductible, vers quelle distribution sur $\mathcal{A}[k]$ converge t-on en faisant tourner M de plus en plus longtemps ?

On se propose maintenant de montrer que M est irréductible et dans ce but on donne/rappelle quelques définitions. Pour $\omega \in \mathcal{A}[k]$ on note $x_{\min}(\omega)$ le minimum des abscisses de points de ω, $x_{\max}(\omega)$ le maximum des abscisses de points de ω, $y_{\min}(\omega)$ le minimum des ordonnées de points de ω, $y_{\max}(\omega)$ le maximum des ordonnées de points de ω. On appelle l'ensemble $[x_{\min}(\omega), x_{\max}(\omega)] \times [y_{\min}(\omega), y_{\max}(\omega)]$ la boite de ω, on la note $B(\omega)$. On note $L(\omega) := x_{\max}(\omega) - x_{\min}(\omega)$ sa largeur et $H(\omega) := y_{\max}(\omega) - y_{\min}(\omega)$ sa hauteur. Les points $\omega(0)$ et $\omega(k)$ sont appelés les extrémités de ω. Un point $\omega(i)$ non extrémité $(1 \leq i \leq k-1)$ est appelé *droit* si $\omega(i) = (\omega(i-1) + \omega(i+1))/2$, *i.e.*, si le chemin ω passe tout droit en $\omega(i)$. On note $D(\omega)$ le nombre de points droits de ω. Enfin on note $P(\omega) := L(\omega) + H(\omega) + D(\omega)$. Dans les questions qui suivent, ω désigne un chemin dans $\mathcal{A}[k]$.

Question 28 Montrer que $P(\omega) \leq 2k - 1$ et que $P(\omega) = 2k - 1$ si et seulement si ω va tout droit du début à la fin.

On note s le plus petit indice i tel que $\omega(i)$ est d'abscisse $x_{\max}(\omega)$, on note g la réflexion d'axe $\{x = x_{\max}(\omega)\}$, et on note $\omega' = \Phi_{s,g}(\omega)$.

Question 29 Montrer que $\omega' \in \mathcal{A}[k]$ et que $D(\omega') = D(\omega)$.

Question 30 On note $\omega_{[0,s]}$ la portion $(\omega(0), \dots, \omega(s))$ de ω et $\omega_{[s,k]}$ la portion $(\omega(s), \dots, \omega(k))$ de ω. Exprimer $L(\omega)$ en fonction de $L(\omega_{[0,s]})$ et $L(\omega_{[s,k]})$. Exprimer $L(\omega')$ en fonction de $L(\omega_{[0,s]})$ et $L(\omega_{[s,k]})$. En déduire que $L(\omega') > L(\omega)$ si les extrémités de ω ne sont pas sur l'axe $\{x = x_{\max}(\omega)\}$.

Question 31 En déduire que si au moins un des 4 côtés de $B(\omega)$ ne contient pas d'extrémité de ω, alors il existe une transition de M allant de ω vers un $\omega' \in \mathcal{A}[k]$ tel que $P(\omega') > P(\omega)$.

Question 32 Dans le cas où chacun des 4 côtés de $B(\omega)$ contient au moins une extrémité de ω, montrer que $\omega(0)$ et $\omega(k)$ occupent des coins opposés de $B(\omega)$.

Question 33 Dans ce cas-là on peut supposer, sans perte de généralité, que ω finit par un virage à gauche en un sommet $\omega(s)$ puis emprunte une portion montante jusque $\omega(k)$. Soit g la rotation d'angle $\pi/2$ (sens des aiguilles d'une montre) centrée en $\omega(s)$, et soit $\omega' = \Phi_{s,g}(\omega)$. Montrer que $\omega' \in \mathcal{A}[k]$, que $D(\omega') > D(\omega)$ et que $L(\omega') + H(\omega') \geq L(\omega) + H(\omega)$.

Question 34 En déduire que si chaque côté de $B(\omega)$ contient au moins une extrémité de ω et que ω ne va pas tout droit du début à la fin, alors il existe une transition de M allant de ω vers un $\omega' \in \mathcal{A}[k]$ tel que $P(\omega') > P(\omega)$.

Question 35 Déduire de tout ce qui précède que M est irréductible.

Question 36 Une stratégie de couplage par le passé est-elle adéquate pour M ?