Examen final MPRI

26 février 2018

On attachera une grande importance à la concision, à la clarté, et à la précision de la rédaction. On précisera en tête de copie ET sur chaque feuille son nom et son prénom. Les notes de cours sont autorisées.

I. Questions sur la partie de Matthieu Josuat-Vergès

Question 1 Une partition d'entier $\lambda = (\lambda_1, \ldots, \lambda_k) \in \mathcal{P}$ est dite *sans saut* si $\lambda_i - \lambda_{i+1} \leq 1$ pour $1 \leq i \leq k-1$. Calculer la série génératrice des partitions sans sauts.

Question 2 La trace $\mathrm{tr}(\pi)$ d'une partition plane $\pi \in \mathcal{PP}$ est la somme des éléments sur la diagonale principale, par exemple :

$$\begin{array}{cccc} 2 & & & \\ 2 & 2 & 1 & \\ 3 & 3 & 1 & \\ 5 & 4 & 3 & 1 \end{array}$$

a pour trace $5 + 3 + 1 = 9$. Calculer la série $\sum_{\pi \in \mathcal{PP}} z^{\mathrm{tr}(\pi)} q^{|\pi|}$.

Question 3 Soit $t \geq 1$. Montrer que si une partition contient une équerre de longueur kt pour un $k \geq 1$, alors elle contient aussi une équerre de longueur t.

Question 4 Soit $\sigma \in \mathfrak{S}_n$ une permutation, et (P, Q) son image par RSK. On veut montrer un cas particulier du théorème de Greene : la longueur maximale d'une sous-suite croissante de σ est égale à la longueur de la première ligne de P (ou Q).

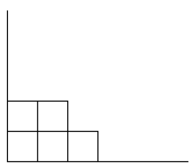
Pour cela, montrer qu'on a une équivalence entre :

— dans l'éxécution de RSK, σ_k s'insère dans la $j$ème colonne du tableau contenant $\sigma_1, \ldots, \sigma_{k-1}$,

— la plus longue sous-suite croissante de σ terminant en σ_k est de longueur j.

Conclure.

Question 5 On représente une partition par une suite binaire en suivant le bord supérieur droit de son diagramme, et en écrivant 1 pour un pas vers le bas, 0 pour un pas vers la droite. Par exemple, pour la partition $(3, 2)$:



$\mapsto \quad \ldots 11100|1010000 \ldots$

Pour éviter de considérer des suites à translation des indices près, on met une barre | au moment où on traverse la diagonale. Formaliser cette représentation en décrivant une bijection entre deux ensembles.

À une suite binaire, on peut associer une paire de suites : on extrait les éléments d'indices pairs d'une part, les éléments d'indices impairs d'autre part. Cela définit une application $\mathcal{P} \to \mathcal{P} \times \mathcal{P}$. En étudiant les propriétés de cette application, démontrer :

$$\prod_{n\geq 1} \frac{(1-q^{2n})^2}{1-q^n} = \sum_{k\geq 0} q^{\frac{k(k+1)}{2}}.$$

II. Questions sur la partie d'Éric Fusy

1 Comptage et génération aléatoire de cactus arborescents

On définit un cactus à r polygones comme étant un assemblage de polygones $P_1, \ldots, P_r$ (étiquetés de 1 à r, les 1-gones et 2-gones sont autorisés) tel que (un exemple est montré en Figure 1(a)) :
— pour tout $1 \leq i < j \leq r$, $P_i \cap P_j$ est soit vide, soit réduit à un sommet, auquel cas on dit que P_i et P_j sont adjacents,
— l'assemblage est "arborescent", i.e., il n'y a pas de cycle simple d'arêtes hormis les contours des polygones.

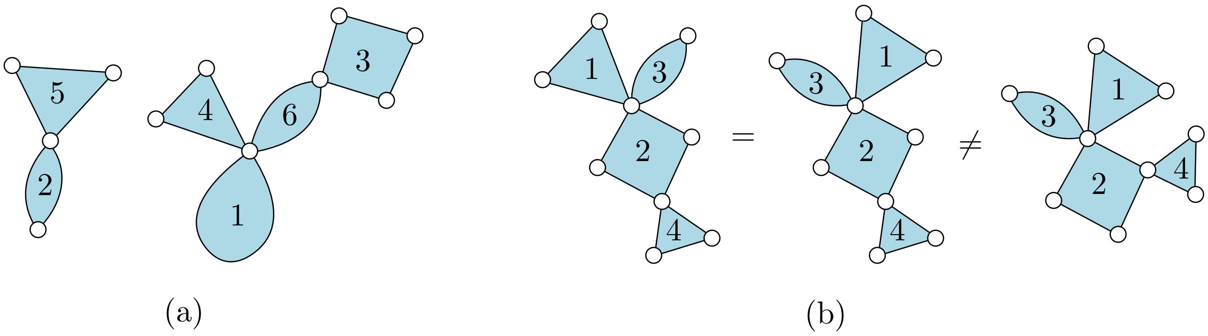


Figure 1 – (a) Un cactus dans $\mathcal{A}_2[1, 2, 4, 3, 3, 2]$ (une composante connexe a 4 sommets, l'autre a 7 sommets). (b) Illustration que l'ordre des polygones autour de chaque sommet n'est pas pris en compte, tandis que l'ordre des sommets autour de chaque polygone est pris en compte.

On note que ce sont les polygones qui sont étiquetés (pas les sommets). De plus, l'ordre cyclique des sommets autour de chaque polygone est pris en compte, mais pas l'ordre cyclique des polygones autour de chaque sommet (cf Figure 1(b)). On autorise un cactus à avoir plusieurs composantes connexes (un cactus est dit connexe si il a une seule composante connexe). Soit $\mathcal{A}_k[\ell_1, \ldots, \ell_r]$ la famille des cactus à k composantes connexes, et r polygones tel que P_i a longueur ℓ_i pour $1 \leq i \leq r$.

Question 6 Pour $\gamma \in \mathcal{A}_k[\ell_1, \ldots, \ell_r]$ soit m le nombre de sommets de γ. Montrer que

$$m = \ell_1 + \cdots + \ell_r + k - r.$$

(on pourra déjà vérifier que c'est vrai pour $k = r$).

Question 7 On appelle *feuille* d'un cactus un sommet incident à un unique polygone. On note $\mathcal{B}_k[\ell_1, \ldots, \ell_r]$ l'ensemble des objets de $\mathcal{A}_k[\ell_1, \ldots, \ell_r]$ où on a distingué une feuille dans chaque composante connexe (cette feuille est appelée la racine de la composante connexe). Pour $1 \leq k \leq r$ on définit $\mathcal{B}_k^\circ[\ell_1, \ldots, \ell_r]$ comme l'ensemble des objets de $\mathcal{B}_k[\ell_1, \ldots, \ell_r]$ où on a en plus distingué un sommet qui est distinct des feuilles racines. Et pour $1 \leq k \leq r-1$ on définit $\mathcal{B}_k^{\square}[\ell_1, \ldots, \ell_r]$ comme l'ensemble des objets de $\mathcal{B}_k[\ell_1, \ldots, \ell_r]$ où on a en plus distingué un polygone qui ne contient pas de feuille racine.

Montrer que pour $1 \leq k \leq r-1$, l'ensemble $\mathcal{B}_k^{\square}[\ell_1, \ldots, \ell_r]$ est en bijection avec l'ensemble $[1..k] \times \mathcal{B}_{k+1}^{\circ}[\ell_1, \ldots, \ell_r]$.
(Hint : on notera qu'un polygone ne contenant pas de feuille racine a un polygone 'parent')

Question 8 On note $b_k[\ell_1, \ldots, \ell_r] = \mathrm{Card}\big(\mathcal{B}_k[\ell_1, \ldots, \ell_r]\big)$ et $n = \ell_1 + \cdots + \ell_r + 1 - r$. Montrer que, pour $1 \leq k \leq r-1$, on a

$$(r-k)\, b_k[\ell_1, \ldots, \ell_r] = k(n-1)\, b_{k+1}[\ell_1, \ldots, \ell_r]$$

et en déduire que pour $1 \leq k \leq r$ on a

$$b_k[\ell_1, \ldots, \ell_r] = (n-1)^{r-k} \frac{(r-1)!}{(r-k)!(k-1)!}$$

et en particulier $b_1[\ell_1, \ldots, \ell_r] = (n-1)^{r-1}$.

Question 9 On note $\mathcal{C}[\ell_1, \ldots, \ell_r]$ l'ensemble des objets de $\mathcal{A}_1[\ell_1, \ldots, \ell_r]$ où on a distingué un sommet (qui peut être une feuille ou non), et on note $c[\ell_1, \ldots, \ell_r] = \mathrm{Card}(\mathcal{C}[\ell_1, \ldots, \ell_r])$. On note toujours $n = \ell_1 + \cdots + \ell_r + 1 - r$ (qui est le nombre de sommets d'un objet de $\mathcal{A}_1[\ell_1, \ldots, \ell_r]$).

Montrer que $[1..n] \times \mathcal{C}[\ell_1, \ldots, \ell_r]$ est en bijection avec $\mathcal{B}_1[\ell_1, \ldots, \ell_r, 2]$
(Hint : on notera qu'un objet de $[1..n] \times \mathcal{C}[\ell_1, \ldots, \ell_r]$ peut se voir comme un objet de $\mathcal{A}_1[\ell_1, \ldots, \ell_r]$ où on a distingué deux sommets v, v', en autorisant $v = v'$).

En déduire que

$$c[\ell_1, \ldots, \ell_r] = n^{r-1}.$$

Question 10 On rappelle que la formule de Cayley dit que le nombre d'arbres (non plongés non enracinés) avec n sommets étiquetés de 1 à n (et des arêtes non étiquetées) est égal à n^{n-2}. Montrer que cette formule se déduit d'un cas particulier de la formule trouvée dans la question précédente.

Question 11 Donner un générateur aléatoire uniforme pour $\mathcal{C}[\ell_1, \ldots, \ell_r]$ opérant en temps linéaire (on commencera par donner un générateur aléatoire pour $\mathcal{B}_1[\ell_1, \ldots, \ell_r]$).

2 Marches dans le quart de plan avec des pas dans $\{S, NO, NE\}$

Question 12 Soit $P(a, b)$ le nombre de chemins sur $\mathbb{N}$ partant de 0 dont les pas sont -1 ou $+1$, tel que le nombre de pas $+1$ est a et le nombre de pas -1 est b. Montrer (question de cours) que si $a \geq b \geq 0$ on a

$$P(a, b) = (a - b + 1) \frac{(a+b)!}{(a+1)!b!},$$

et $P(a, b) = 0$ sinon.

Question 13 Soit γ un chemin de longueur n partant de l'origine, dont les pas sont dans l'ensemble $\mathcal{S} = \{(0, -1), (-1, 1), (1, 1)\}$ (i.e., chaque pas peut être Sud, Nord-ouest ou Nord-est). Soit i, j le point d'arrivée du chemin. On note respectivement b, c, a le nombre de pas Sud, Nord-ouest, et Nord-est du chemin.

Exprimer a, b et c en fonction de n, i, j.

Question 14 Soit $Q(a,b,c)$ le nombre de marches dans le quart de plan $\mathbb{N}^2$ partant de l'origine, dont les pas sont dans $\mathcal{S}$, avec le nombre de pas Sud, Nord-ouest et Nord-est respectivement égaux à b, c, a.

Montrer que
$$Q(a,b,c) = P(a,c)P(a+c,b).$$

Question 15 Donner en générateur aléatoire uniforme $\Gamma Q_n(i,j)$ pour les marches de longueur n dans $\mathbb{N}^2$ partant de l'origine, finissant en (i,j) et dont les pas sont dans $\mathcal{S}$ (la complexité attendue du générateur doit être linéaire, et on veillera à vérifier que l'ensemble des marches est non vide).