

Examen final MPRI

10 mars 2017

On attachera une grande importance à la concision, à la clarté, et à la précision de la rédaction. On précisera en tête de copie ET sur chaque feuille son nom et son prénom. Les notes de cours sont autorisées.

I. Exercices sur la partie de Sylvie Corteel.

1 Marches dans le treillis de Young

On cherche à calculer $B(\ell, \mu)$ le nombre de marches de longueur ℓ dans le treillis de Young qui partent de la partition vide et arrivent à la partition μ . Rappelons que

$$U|\lambda\rangle = \sum_{\mu \triangleright \lambda} |\mu\rangle, \quad D|\lambda\rangle = \sum_{\mu \triangleleft \lambda} |\mu\rangle;$$

où $\mu \triangleleft \lambda$ est tel que μ et λ sont des partitions et le diagramme μ est le diagramme de λ où l'on a retiré une case.

$$B(\ell, \mu) = \langle \mu | (U + D)^\ell | \emptyset \rangle.$$

Question 1 Soit $k = |\mu|$, montrer que si $B(\ell, \mu)$ est non nul alors $\ell - k$ est pair.

Question 2 Montrer que le nombre de mots valides $W \in \{U, D\}^\ell$ tel que $\langle \mu | W | \emptyset \rangle$ est non nul est $X_{\ell, k}$ avec $X_{\ell, k} = X_{\ell-1, k-1} + X_{\ell-1, k+1}$ si $\ell > k \geq 0$ et $X_{k, k} = 1$, $X_{\ell, k} = 0$ si $k < 0$ ou $\ell < k$.

Question 3 En utilisant le fait que $DU = UD + I$, on a montré que si $(U + D)^\ell = \sum_{i, j} B_{i, j}(\ell) U^i D^j$ alors $B_{i, 0}(\ell) = \binom{\ell}{i} (\ell - i - 1)!!$.
En déduire $B(\ell, \mu)$.

2 Algorithme RSK

Rappel. Pour obtenir un bi-mot $\begin{pmatrix} u_1, \dots, u_n \\ v_1, \dots, v_n \end{pmatrix}$ à partir d'une matrice A telle que $\sum_{i, j} a_{i, j} = n$, on crée $a_{i, j}$ bi-lettres $\begin{pmatrix} i \\ j \end{pmatrix}$. On trie le premier mot en ordre croissant. Le deuxième mot est tel que si $u_i = u_{i+1}$ alors $v_i \leq v_{i+1}$.

Question 4 Appliquer l'algorithme RSK à la matrice

$$A = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 0 \\ 0 & 1 & 1 \\ 1 & 0 & 3 \end{pmatrix}$$

pour obtenir deux tableaux semi-standards de même forme.

Question 5 Comment calcule-t-on en général la taille de la première part de la forme des tableaux à partir de la matrice ?

Question 6 Transformer les deux tableaux de l'exemple en triangles de Gelfand-Tsetlin.

Question 7 Coller les deux triangles ensemble pour former une partition plane.

Question 8 Comment calcule-t-on en général le poids de la partition plane Π à partir de la matrice ?

3 Enumération de partitions planes symétriques

Dans cet exercice, on suppose que à toute matrice $A = (A_{i,j})$ de taille $n \times n$, on peut associer bijectivement deux partitions planes strictes en colonne (P, Q) de forme λ donc les entrées sont supérieures ou égales à n . Cette bijection est telle que

$$\begin{aligned} |P| &= \sum_{i,j} i A_{i,j} \\ |Q| &= \sum_{i,j} j A_{i,j} \\ |\lambda| &= \sum_{i,j} A_{i,j} \end{aligned}$$

On suppose aussi que si la matrice est symétrique, i.e. $A = A^t$ alors $P = Q$.

Question 9 Une partition plane $\Pi = (\pi_{i,j})$ avec $1 \leq i, j \leq n$, est symétrique si et seulement si $\pi_{i,j} = \pi_{j,i}$ pour tous i et j . Soit $|\Pi| = \sum_{i,j} \pi_{i,j}$ et $\text{tr}(\Pi) = \sum_{i,i} \pi_{i,i}$. Soit \mathcal{P}_n l'ensemble des partitions planes $\Pi = (\pi_{i,j})$ avec $1 \leq i, j \leq n$. Proposer une bijection f entre les partitions planes symétriques et les partitions planes strictes en colonne dont les entrées sont inférieures ou égales à n telle que si $P = f(\Pi)$ alors $|\Pi| + \text{tr}(\Pi) = 2|P|$.

Rappel. Une partition plane stricte en colonne, $\Pi = (\pi_{i,j})$ est telle que $\pi_{i,j} \geq \pi_{i,j+1}$ et $\pi_{i,j} > \pi_{i+1,j}$.

Question 10 Montrer ainsi que

$$\sum_{\Pi \in \mathcal{P}_n} q^{|\Pi|} x^{\text{tr}(\Pi)} = \sum_{\lambda} s_{\lambda}(xq, xq^3, \dots, xq^{2n-1})$$

où $s_{\lambda}(x_1, \dots, x_n)$ est le polynôme de Schur indexé par la partition λ .

Question 11 Utiliser l'identité de Littlewood

$$\sum_{\lambda} s_{\lambda}(x_1, \dots, x_n) = \prod_{i=1}^n \frac{1}{1-x_i} \cdot \prod_{i=1}^{n-1} \prod_{j=i+1}^n \frac{1}{1-x_i y_j}$$

pour calculer $\sum_{\Pi \in \mathcal{P}_n} q^{|\Pi|} t^{\text{tr}(\Pi)}$.

Question 12 On va utiliser les opérateurs de vertex pour démontrer cette identité de Littlewood.

Rappel, soient μ et λ deux partitions. On dit que $\mu \succ \lambda$ si et seulement si $\mu_1 \geq \lambda_1 \geq \mu_2 \geq \lambda_2 \geq \dots$

$$\begin{aligned}\Gamma_+(x) |\mu\rangle &= \sum_{\lambda \succ \mu} x^{|\lambda| - |\mu|} |\lambda\rangle; \\ \Gamma_-(x) |\mu\rangle &= \sum_{\lambda \prec \mu} x^{|\mu| - |\lambda|} |\lambda\rangle; \\ \Gamma_-(x) \Gamma_+(y) &= \frac{1}{1 - xy} \Gamma_+(y) \Gamma_-(x); \\ \langle \lambda | \mu \rangle &= 1 \text{ si } \lambda = \mu.\end{aligned}$$

Soit w un mot (w_1, \dots, w_n) un mot de $\{+, -\}^n$, on utilise la notation (abusive) :

$$\langle \mathbf{t} | = \sum_{\lambda} \mathbf{t}^{|\lambda|} \langle \lambda |.$$

- a. Montrer que $\sum_{\lambda} \mathbf{t}^{|\lambda|} s_{\lambda}(x_1, \dots, x_n) = \langle \mathbf{t} | \Gamma_+(x_1) \cdot \dots \cdot \Gamma_+(x_n) | \mathbf{0} \rangle$
 b. (Question optionnelle) Montrer que

$$\begin{aligned}\langle \mathbf{t} | \Gamma_+(x_1) &= \frac{1}{1 - \mathbf{t}x_1} \langle \mathbf{t} | \Gamma_-(\mathbf{t}^2 x_1); \\ \langle \mathbf{t} | \mathbf{0} &= 1; \\ \Gamma_-(x) | \mathbf{0} &= | \mathbf{0} \rangle.\end{aligned}$$

- c. En déduire que $\sum_{\lambda} s_{\lambda}(x_1, \dots, x_n) = \prod_{i=1}^n \frac{1}{1 - x_i} \cdot \prod_{i=1}^{n-1} \prod_{j=i+1}^n \frac{1}{1 - x_i x_j}$

II. Exercices sur la partie d'Éric Fusy.

4 Génération aléatoire d'arbres binaires non enracinés

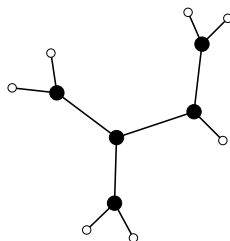


FIGURE 1 – Un arbre binaire non enraciné à 7 feuilles (et 5 noeuds internes).

Dans cet exercice on considère des arbres non enracinés plongés dans le plan¹, dont les sommets (non étiquetés ici) ont degré 3 ou 1. De tels arbres sont appelés des arbres binaires non enracinés. Les sommets de degré 3 sont appelés noeuds internes et ceux de degré 1 sont appelés feuilles. Pour $n \geq 3$ on note \mathcal{U}_n l'ensemble des arbres binaires non enracinés à n feuilles (et $n - 2$

1. Par "plongés" on entend que l'ordre cyclique des voisins autour de chaque sommet est pris en compte.

noeuds internes). *Enraciner* un arbre $A \in \mathcal{U}_n$ revient à marquer une de ses feuilles ; on note $r(A)$ le nombre de manières non équivalentes d'enraciner A (i.e., $r(A)$ est le nombre d'arbres enracinés dont l'arbre non enraciné sous-jacent est A). On admet ici que $r(A) = n/2$ si A est fixé par une rotation d'angle π (centrée sur un milieu d'arête), que $r(A) = n/3$ si A est fixé par une rotation d'angle $2\pi/3$ (centrée sur un sommet), et que $r(A) = n$ sinon (cas asymétrique).

Question 13 Soit u_n le cardinal de \mathcal{U}_n . Calculer u_n pour $n \in \{3, 4, 5, 6\}$ en dessinant exhaustivement tous les cas possibles, et en prenant garde de ne pas avoir de doublons.

Question 14 Soit c_n le nombre d'arbres binaires enracinés à n feuilles non-racines et $n - 1$ noeuds internes (on rappelle que $c_n = \text{Cat}_{n-1} = \frac{(2n-2)!}{n!(n-1)!}$). Soit h_n le nombre d'arbres dans \mathcal{U}_n fixés par une rotation d'angle π , et soit t_n le nombre d'arbres dans \mathcal{U}_n fixés par une rotation d'angle $2\pi/3$. Montrer que $h_n = c_{n/2}$ si n est pair et $h_n = 0$ sinon ; et montrer que $t_n = c_{n/3}$ si n est multiple de 3 et que $t_n = 0$ sinon.

Corrigé: Un arbre de h_n s'obtient à partir d'une arête à laquelle on accroche (par leur feuille racine) 2 copies d'un arbre binaire à $n/2$ feuilles non-racines (une copie à chaque extrémité). De même un arbre de t_n s'obtient à partir d'un noeud v auquel on accroche 3 copies (par leur feuille racine) d'un arbre binaire à $n/3$ feuilles non-racines (une copie à chaque arête incidente à v). \square

Question 15 On note a_n le nombre d'arbres asymétriques dans \mathcal{U}_n . Montrer que l'on a la relation $\frac{1}{n}c_{n-1} = a_n + \frac{1}{2}h_n + \frac{1}{3}t_n$, et en déduire une expression pour u_n en terme de n et des coefficients c_i .

Corrigé: Cela vient du fait que les arbres comptés par a_n ont n enracinements distincts, ceux comptés par h_n ont $n/2$ enracinements distincts, et ceux comptés par t_n ont $n/3$ enracinements distincts. Donc

$$c_{n-1} = na_n + \frac{n}{2}h_n + \frac{n}{3}t_n.$$

Puis on a

$$u_n = a_n + h_n + t_n = \frac{1}{n}c_{n-1} + \frac{1}{2}h_n + \frac{2}{3}t_n = \frac{1}{n}c_{n-1} + \frac{1}{2}\delta_{n=0[2]} \cdot c_{n/2} + \frac{2}{3}\delta_{n=0[3]} \cdot c_{n/3}.$$

\square

Question 16 Donner un générateur aléatoire $\Gamma U[n]$ pour \mathcal{U}_n . On supposera que l'on a accès à une table donnant les nombres de Catalan, ainsi qu'à un générateur aléatoire $\Gamma R[n]$ pour les arbres binaires enracinés à $n - 1$ noeuds internes (obtenu par exemple par la méthode de Rémy).

Corrigé: (Avoir une table des nombres de Catalan permet d'avoir une table des coefficients u_n, a_n, h_n, t_n .) On tire $i \in \{1, 2, 3\}$ selon la proba $P(1) = \frac{c_{n-1}}{nu_n}$, $P(2) = \frac{h_n}{2u_n}$, $P(3) = \frac{2t_n}{3u_n}$. Si $i = 1$ on appelle $\Gamma R[n - 1]$ et on renvoie l'arbre non enraciné sous-jacent. Si $i = 2$ on a n pair. On appelle $T \leftarrow \Gamma R[n/2]$ et on renvoie l'arbre formé de 2 copies de T accrochées sur une arête. Si $i = 3$ on a n multiple de 3. On appelle $T \leftarrow \Gamma R[n/3]$ et on renvoie l'arbre formé de 3 copies de T accrochées sur un noeud. \square

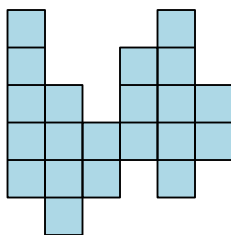


FIGURE 2 – Un polyomino convexe par colonnes, de taille 21.

5 Polyominos convexes par colonnes

Un polyomino est un ensemble fini non-vide S de cellules unitaires de \mathbb{Z}^2 (chacune de la forme $[i, i + 1] \times [j, j + 1]$) qui forment un ensemble connexe (i.e. pour chaque paire de cellules c, c' de S il existe un chemin de cellules adjacentes allant de c à c' en utilisant seulement des cellules de S , où deux cellules sont dites adjacentes si elles partagent un segment unitaire). La taille du polyomino est le nombre de cellules qui le composent. Un polyomino est appelé convexe par colonnes si dans chaque colonne (de la forme $[i, i + 1] \times \mathbb{R}$ pour $i \in \mathbb{Z}$) l'ensemble des cellules de S dans la colonne est un ensemble contigu (un intervalle de cellules).

Soit $A(z)$ la série génératrice des polyominos convexes par colonnes, comptés selon la taille. Soit $B(z)$ la série génératrice de ceux dont la colonne la plus à droite a au moins 2 cellules, et soit $C(z)$ la série génératrice de ceux qui ont au moins 2 colonnes et dont la colonne de droite a une cellule.

Question 17 Montrer que

$$B(z) = zA(z) + \frac{z^2}{1-z}A(z).$$

(hint : distinguer les cas selon que l'on a toujours un polyomino en enlevant la case c qui est en bas de la colonne de droite).

Corrigé: On note $B_1(z)$ la contribution où on a toujours un polyomino en enlevant c . Alors tout objet de $B_1(z)$ s'obtient uniquement à partir d'un objet de $A(z)$ en ajoutant une cellule en bas de la colonne de droite. Donc $B_1(z) = zA(z)$.

On note $B_2(z)$ la contribution où on n'a plus un polyomino en enlevant c . Alors tout objet γ' de $B_2(z)$ s'obtient uniquement à partir d'un objet γ de $A(z)$ en ajoutant une nouvelle colonne (de longueur $i \geq 2$) à droite, dont la cellule du bas est voisine de la cellule du haut de la dernière colonne de γ . Donc $B_2(z) = \frac{z^2}{1-z}A(z)$. \square

Question 18 Montrer que

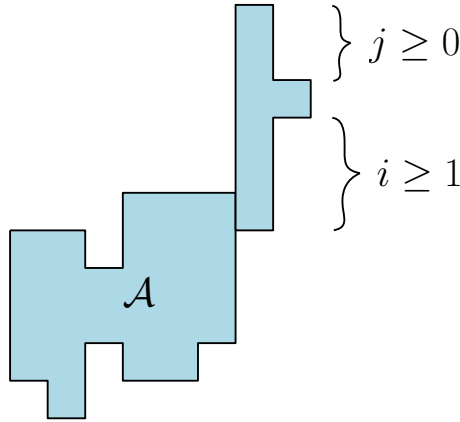
$$C(z) = zC(z) + \left(z + \frac{z^3}{(1-z)^2}\right)A(z)$$

(hint : distinguer les cas selon que l'on a toujours un polyomino en enlevant la case c du bas de la seconde colonne en partant de la droite).

Corrigé: On note $C_1(z)$ la contribution où on a toujours un polyomino en enlevant c . Alors tout objet de $C_1(z)$ s'obtient uniquement à partir d'un objet de $C(z)$ en ajoutant une cellule en bas de l'avant dernière colonne. Donc $C_1(z) = zC(z)$.

Si on n'a plus un polyomino en enlevant c alors deux cas peuvent se présenter : soit c est voisine de l'unique cellule de la dernière colonne, soit non. On note $C_2(z)$

et $C_3(z)$ les contributions respectives. Un objet γ' de $C_2(z)$ s'obtient uniquement à partir d'un objet γ de $A(z)$ en ajoutant une cellule à droite de la cellule du bas de la dernière colonne de γ . Donc $C_2(z) = zA(z)$. Un objet γ' de $C_3(z)$ s'obtient uniquement à partir d'un objet γ de $A(z)$ comme montré à la figure ci-dessous :



Donc $C_3(z) = A(z) \cdot \frac{z^3}{(1-z)^2}$. □

Question 19 Par un petit calcul on déduit facilement des expressions rationnelles explicites pour $A(z)$, $B(z)$ et $C(z)$, par exemple $A(z) = \frac{z(1-z)^3}{1-5z+7z^2-4z^3}$. Indiquer comment calculer le rayon de convergence ρ de $A(z)$.

Question 20 Donner un générateur de Boltzmann $\Gamma A(x)$ (pour $0 < x < \rho$) pour les polyominoes convexes par colonnes.

hint : il est conseillé d'écrire des générateurs $\Gamma A(x)$, $\Gamma B(x)$ et $\Gamma C(x)$ qui dépendent les uns des autres, avec des choix dépendant de x , $A(x)$, $B(x)$, $C(x)$ (on suppose $A(x)$, $B(x)$, $C(x)$ déjà connues, sans qu'il soit besoin ici de les expliciter).

Corrigé: Pour $\Gamma A(x)$, on tire $i \in \{1, 2, 3\}$ avec probas $\frac{x}{A(x)}$, $\frac{B(x)}{A(x)}$, $\frac{C(x)}{A(x)}$. Si $i = 1$ on renvoie le polyomino de taille 1. Si $i = 2$ on renvoie $\Gamma B(x)$. Si $i = 3$ on renvoie $\Gamma C(x)$. Pour $\Gamma B(x)$ on tire $k \geq 1$ selon $\text{Geom}_{\geq 1}(x)$. Et on tire $\gamma \leftarrow \Gamma A(x)$. Si $i = 1$ on ajoute une cellule en bas de la dernière colonne de γ et on renvoie l'objet obtenu. Si $i \geq 2$, on ajoute une colonne verticale de taille i à γ , tel que la cellule du bas de la colonne est à droite de la cellule du haut de la dernière colonne de γ ; et on renvoie l'objet obtenu. Pour $\Gamma C(x)$ on tire $i \in \{1, 2, 3\}$ avec probas $P(1) = x$, $P(2) = \frac{x A(x)}{C(x)}$, $P(3) = \frac{x^3 A(x)}{(1-x)^2 C(x)}$. Si $i \in \{1, 2\}$ on tire $\gamma \leftarrow \Gamma C(x)$. Si $i = 1$ on ajoute une cellule en bas de l'avant-dernière colonne et on renvoie l'objet obtenu. Si $i = 2$ on ajoute une nouvelle cellule à droite de la cellule du bas de la dernière colonne de γ et on renvoie l'objet obtenu. Si $i = 3$ on tire $i \leftarrow \text{Geom}_{\geq 1}(x)$ et $j \leftarrow \text{Geom}(x)$, on tire $\gamma \leftarrow \Gamma A(x)$ et on renvoie l'objet composé obtenu comme dans la figure au-dessus. □

6 Génération aléatoire de pavages

On considère des pavages de la grille triangulaire d'ordre n par des losanges (cette grille est délimitée par un hexagone de côté n , elle a $e_n = 1 + 3n + 3n^2$ sommets), voir la figure ci-dessous pour un exemple. On note \mathcal{P}_n l'ensemble de ces pavages. Un sommet de la grille est dit interne si il n'est pas sur le bord de l'hexagone externe. Pour $\gamma \in \mathcal{P}_n$, un sommet interne v de la grille est dit "flipable" si v est incident à exactement 3 losanges. Faire un "flip" en v consiste à réarranger

les 3 losanges autour de v comme montré en Figure 3 (il y a deux configurations possibles pour les 3 losanges autour de v , et donc deux types/directions de flip).

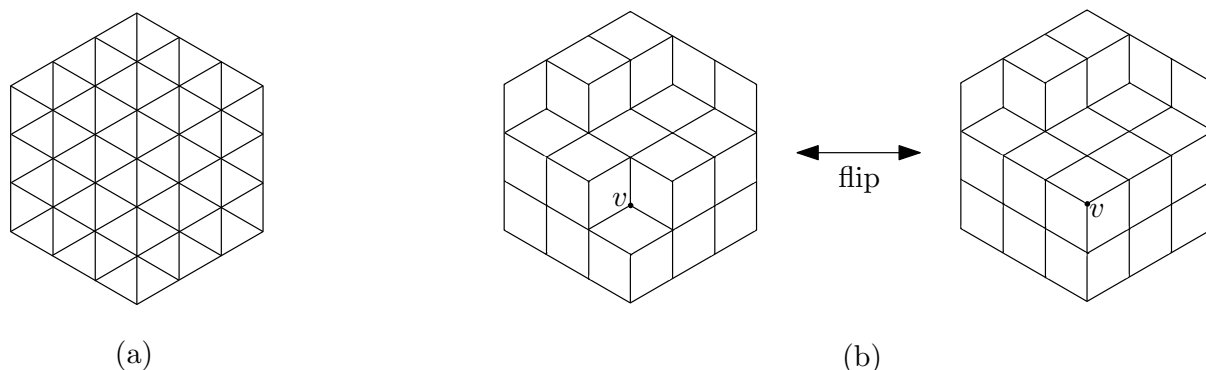


FIGURE 3 – (a) La grille triangulaire d’ordre 3. (b) Deux pavages de \mathcal{P}_3 différant par un flip au niveau du sommet v .

Question 21 Montrer que pour toute paire γ, γ' dans \mathcal{P}_n , il existe une suite de flips pour passer de γ à γ' .

(hint : voir un pavage γ comme un empilement de cubes)

Corrigé: On note min la configuration correspondant à 0 cube. Alors on peut passer de γ à min en enlevant des cubes et de même on peut passer de min à γ' en ajoutant des cubes. \square

Question 22 En déduire un générateur aléatoire pour \mathcal{P}_n par chaîne de Markov, convergeant vers la distribution uniforme sur \mathcal{P}_n (justifier la convergence).

Corrigé: À chaque étape on tire au hasard un sommet v interne de la grille parmi les e_{n-1} choix possibles. On tire $i \in \{+, -\}$ avec probas $(1/2, 1/2)$. Si $i = +$ et qu’on peut faire un flip “ajoutant un cube” en v alors on fait le flip. Si $i = -$ et qu’on peut faire un flip “enlevant un cube” en v alors on fait le flip. Sinon on ne fait rien. La chaîne est irréductible (par la question précédente), apériodique (on a proba au moins $1/2$ de ne rien faire) et symétrique (si deux états sont voisins, on a proba $1/(2e_{n-1})$ de passer de l’un à l’autre). Donc on a convergence vers la distribution uniforme sur \mathcal{P}_n . \square

Question 23 (question Bonus). Soit G_n le graphe dont l’ensemble des sommets est \mathcal{P}_n et deux sommets γ, γ' sont reliés par une arête si on peut passer de γ à γ' par un flip. Montrer que le diamètre² de G_n est n^3 .

Corrigé: On note min la configuration correspondant à 0 cube, et max la configuration correspondant à n^3 cubes. Pour $\gamma, \gamma' \in \mathcal{P}_n$. On note k le nombre de cubes de γ et k' le nombre de cubes de γ' . En passant par min on a un chemin de longueur $\ell_1 = k + k'$ de γ à γ' . En passant par max on a un chemin de longueur $\ell_2 = (n^3 - k) + (n^3 - k')$ de γ à γ' . On a $\ell_1 + \ell_2 = 2n^3$ donc $\min(\ell_1, \ell_2) \leq n^3$. Donc $d(\gamma, \gamma') \leq n^3$. D’autre part min et max sont à distance n^3 , donc le diamètre est bien n^3 . \square

2. Pour G un graphe non dirigé et v, v' deux sommets de G on note $d(v, v')$ la longueur d’un plus court chemin de v à v' . Le diamètre de G est le max de $d(v, v')$ sur toutes les paires de sommets de G .