Une introduction à l'automatique algébrique MPRI 2004–2005

François Ollivier
ALIEN, INRIA Futurs et LIX, UMR CNRS 7161
École polytechnique, 91128 Palaiseau, France
francois.ollivier@stix.polytechnique.fr

1er février 2005

1 Première séance. Automatique linéaire classique

L'automatique (*control theory*) a pour objet le contrôle automatique de procédés industriels ou d'appareillages divers. Son champ d'application est immense : mécanique, électricité, chimie, ..., tous les domaines réclament la mise au point de dispositifs permettant de supprimer ou de faciliter le pilotage humain ou la surveillance. Les systèmes biologique eux-mêmes possèdent des structures naturelles de régulation, que l'automatique peut réinterpréter par analogie avec les systèmes articiels, ce qui conduit parfois à de nouvelles thérapeutiques.

Mathématiquement, un système physique peut être décrit par un système d'équations

$$x_i' = f_i(x, u, t, \theta) \quad i = 1, \ldots, n. \tag{1}$$

Le vecteur x décrit l'état du système, les fonction x_i représentant l'évolution temporelle de toutes les grandeurs décrivant le système à un instant donné : température, pression, intensité électrique, concentration chimique, etc.

Le vecteur $u = (u_1, \ldots, u_m)$ correspond aux commandes du système, c'est-à-dire aux actions exercés sur le système, soit par un pilote humain, soit par un dispositif extérieur.

La lettre t désigne le temps. Si les équations sont indépendantes du temps, le système est dit stationnaire. Enfin, le vecteur $\theta = (\theta_1, \ldots, \theta_s)$ correspond à des paramètres, qui décrivent le système particulier considéré dans une classe donnée : masse d'une pièce mobile, raideur d'un ressort, résistance d'un conducteur, vitesse d'une réaction chimique, ...

La description d'un système est complétée par la donnée des équations

$$y_j = g(x, t, \theta), \quad i = 1, \ldots, r. \tag{2}$$

où les y_i sont les mesures ou *sorties* du système.

La problématique typique de l'automatique est la suivante : à partir d'un état de départ donné, on veut amener le système à un nouvel état en un temps assez bref, ce qui suppose de pouvoir calculer une commande appropriée (contrôlabilité). Une fois le système amené en un point d'équilibre, on souhaite l'y maintenir (stabilisation).

La résolution de ces différents problèmes nécessite souvent de pouvoir recalculer l'état du système à partir des sorties et des commandes, si celui-ci n'est pas entièrement mesuré (observabilité), et de pouvoir aussi calculer la valeur des paramètres qui ne seraient pas connus *a priori* (identifiabilité).

Ce cours ne prétend pas être un cours d'automatique, qui n'aurait pas ici sa place, et n'a pas d'autre ambition que d'illustrer les apports du calcul formel dans un domaine concret.

2 Première séance. Automatique linéaire classique

Un système linéaire est de la forme

$$x' = A(t,\theta)x + Bu, \tag{3}$$

$$y = C(t,\theta)x. \tag{4}$$

L'automatique linéaire commence avec les travaux de Rudolf Emil KALMAN, mathématicien américain, né à Budapest en 1930, à qui l'on doit les principaux concepts et résultats de la théorie.

On ne considérera ici que des systèmes stationnaires, c'est-à-dire que les matrices A, B et C seront indépendantes du temps.

2.1 Observabilité

DÉFINITION 1. — *Supposant connu le vecteur de paramètres θ, on dit qu'un système différentiel est observable si l'application ϕ_u qui associe aux conditions initiales $X(0)$ la fonction de sortie y admet un inverse à gauche.*

Cette propriété peut être testée par le critère de Kalman suivant.

THÉORÈME 2. — *Un système est observable ssi la matrice*

$$\begin{pmatrix} C \\ CA \\ \vdots \\ CA^{n-1} \end{pmatrix}$$

est de rang n.

PREUVE. — Pour simplifier, on suppose ici que u est continue et même analytique. Connaître u et y au voisinage de $t = 0$ revient donc à connaître leur développement en série. L'observabilité signifie alors que l'on peut calculer le développement en série de x à partir de celui de y et u.

On a $y(0) = CX$, $y'(0) = C(Ax(0) + Bu(0))$, ..., $y^{(i)} = C(A^i x(0) + A^{i-1}Bu(0) + \cdots Bu^{(i-1)}(0)$, ... On peut supprimer les termes dépendant de u et de ses dérivées, qui sont connus. On connaît donc CX, CAX, etc. D'après le théorème de Cayley-Hamilton, $x(0)$, $\chi_A(A) = 0$, ce qui implique que les puissances de A s'expriment toutes à partir de celles de degré inférieur à n. La valeur de $x(0)$ peut donc être déterminé de manière unique si et seulement si le système

$$\begin{pmatrix} C \\ CA \\ \vdots \\ CA^{n-1} \end{pmatrix} x(0) = \begin{pmatrix} y(0) \\ y'(0) \\ \vdots \\ y^{(n-1)} \end{pmatrix}$$

admet une solution unique. ■

On voit que l'on peut plus généralement calculer $x(t)$, connaissant les dérivées de y au temps t. Ceci ne fournit en pratique qu'une méthode médiocre *d'observation*, c'est-à-dire de calcul de l'état. En effet, les mesures sont souvent perturbées par des *bruits*, ce qui rend de plus en plus imprécise l'évaluation des dérivées par différence finie à mesure que l'ordre croît.

2.2 Contrôlabilité

DÉFINITION 3. — *Supposant connu le vecteur de paramètres θ, on dit qu'un système différentiel est contrôlable (ou commandable) si pour tout état de départ x_0, tout état d'arrivée x_1, et tout temps fini non nul T il existe une fonction de commande $u : [0,T] \mapsto \mathbf{R}$, telle que la solution du système 3 satisfaisant la condition initiale $x(0) = x_0$ satisfasse $x(T) = x_1$.*

Ceci signifie concrètement que, connaissant l'entrée et la sortie, on peut recalculer l'état, sauf pour certaines trajectoires constituant un ensemble de mesure nulle. Cette propriété peut être testée par le critère de Kalman suivant.

Théorème 4. — *Un système est commandable ssi la matrice*

$$\begin{pmatrix} B & AB & \cdots & A^{n-1}B \end{pmatrix}$$

est de rang n.

Preuve. — Comme dans le cas de l'observabilité, le théorème de Cayley-Hamilton explique pourquoi il suffit de s'arrêter à $A^{n-1}B$. Pour simplifier, on va donner l'idée générale de la preuve dans le cas particulier où matrice A est diagonalisable avec des valeurs propres toutes différentes et où il n'y a qu'une commande.

Sans restriction de généralité, on peut supposer être dans une base telle que A soit diagonale. La matrice $\begin{pmatrix} B & AB & \cdots & A^{n-1}B \end{pmatrix}$ est alors de rang n ssi tous les B_i sont non nuls. Supposons que $B_i = 0$, alors $x_i(T) = x_i(0)e^{-\lambda_i T}$. On ne peut donc choisir arbitrairement l'état $x(T)$, ce qui contredit la contrôlabilité.

Réciproquement, on peut supposer par translation que la condition initiale est nulle. On a alors $x_i(1) = \int_0^1 e^{\lambda_i(1-\tau)}u(\tau)d\tau$. Le plus simple, même si ce n'est pas très réaliste, est de prendre pour u une combinaison linéaire de masses de Dirac $\sum_{i=1}^n c_i \delta_{i\lambda/n}$. On a alors $x(1) = Mc$, où M est une matrice de Vandermonde[1]. Si les λ_i sont tous différents entre eux, le déterminant de M est non nul. ■

Si l'on prend par exemple pour u un polynôme de degré $n-1$ dont les coefficients sont $c_0, \ldots, c_{n-1}$, on a $x(1) = Mc$, avec

$$M_{i,j} = -e^{\lambda_i}\left(\lambda^{-1} + (j-1)\lambda^{-2} + \cdots + (j-1)!\lambda^{-j}\right) + (j-1)!\lambda^{-j},$$

en excluant le cas particulier $\lambda_i = 0$. Le déterminant de M est également non nul si les λ_i sont tous différents, mais je ne sais pas le montrer directement. Ce sera une conséquence de l'approche par la notion de *platitude* qui sera introduite par la suite.

On peut envisager toutes sortes de lois de commande, pourvu qu'y interviennent un nombre suffisant de paramètres et que les rangs soient non nuls.

Un bon excercice est de compléter cette preuve dans un cadre plus général. Si l'on dispose d'un système de calcul formel, on peut en déduire une méthode de calcul d'une commande permettant d'aller de l'état X_0 à l'état X_1, c'est à dire de résoudre effectivement le problème de la *planification de trajectoire*. On verra bientôt une approche plus efficace.

Exemple 5. — À l'extrême inverse, il faut envisager le cas où les λ_i sont tous égaux à 0. C'est par exemple celui d'un système en forme de Brunovský :

$$\begin{array}{rcl} x'_1 & = & x_2 \\ x'_2 & = & x_3 \\ x'_n & = & u. \end{array}$$

La planification de trajectoire se résoud alors simplement, puisque l'on peut exprimer u en fonction de x_0 : $u = x_0^{(n-1)}$

On a utilisé l'existence d'une solution explicite pour un système linéaire à coefficients constants. Dans des cas plus généraux, des solutions explicites existent rarement et sont souvent d'une taille décourageante. Mais on peut parfois avoir de la chance !

On peut de même, à titre d'exercice, mettre au point une preuve du critère d'observabilité reposant sur l'expression explicite de x et en déduire une méthode de calcul de l'état.

2.3 Identifiabilité

Définition 6. — *On dit qu'un système différentiel est identifiable si l'application qui associe aux paramètres θ le comportement entrée-sortie du système (c'est-à-dire l'application qui associe à une commande u une sortie y) est inversible à gauche sur un ouvert dense.*

Le système est localement identifiable s'il existe un ouvert dense de l'espace des paramètres sur lequel ceux-ci sont localement uniques pour un comportement entrée-sortie donné.

[1] Alexandre Théophile Vandermonde, mathématicien parisien (1735-1796)

Théorème 7. — *Un système linéaire avec des conditions initiales nulles est identifiable ssi l'application*

$$\rho : \theta \mapsto (\, C(\theta)B(\theta) \quad C(\theta)A(\theta)B(\theta) \quad \cdots \quad C(\theta)A(\theta)^{n-1}B(\theta)\,)$$

est inversible sur un ouvert dense.

Il est localement identifiable ssi ρ est localement inversible au voisinage de tout point d'un ouvert dense.

La raison pour laquelle on peut se restreindre à l'ordre $n-1$ est à peu près la même que pour les deux théorèmes précédents, mais un peu plus technique. On peut obtenir une preuve en considérant le développement en série à l'origine. On ne s'y attardera pas.

Remarquons que ce théorème ne donne aucune méthode pratique d'*identification paramétrique*. Tester l'inversibilité est difficile, car nos paramètres sont en général des réels (sauf par exemple pour quelques problèmes de circuits électriques). On peut tester l'existence d'un inverse à gauche rationnel par un calcul de base standard, mais ce n'est qu'une condition suffisante d'identifiabilité.

Par ailleurs, il est fréquent que l'espace des paramètres ne soit pas l'espace $\mathbf{R}^s$ tout entier : une masse ou une résistance sont toujours positives, certains paramètres ne peuvent pas dépasser certaines valeurs limites, etc.

L'identifiabilité locale se teste plus aisément en s'assurant que le rang de la matrice jacobienne de ρ est maximal. Néanmoins le simple calcul d'un déterminant formel de grande taille peut devenir difficile. On a vite intérêt à tester numériquement le rang en un point (méthode probabiliste).

3 Deuxième séance. Systèmes linéaires commandables et platitude différentielle

3.1 Introduction

La notion de platitude différentielle est apparue au début des années 1990 et a marqué l'automatique non linéaire au cours de la dernière décennie du XX$^{\text{e}}$ siècle, donnant lieu à de nombreuses applications industrielles.

Définition 8. — *Un système de la forme (1) est dit plat s'il existe m fonctions $z_1, \ldots, z_m$ de l'état et de ses dérivées, telles que l'état puisse s'exprimer comme une fonction de z et de ses dérivées. Ces fonctions z_i sont appelées sorties linéarisantes.*

À l'origine, la platitude a été introduite dans le cadre de l'*algèbre différentielle*, que nous n'introduirons pas ici par soucis de simplicité. Elle a été ensuite transposée dans le cadre de la *théorie des diffiétés*, et c'est de cette approche dont nous nous inspirons ici, tout en faisant l'économie d'une présentation abstraite. On dira un petit mot des diffiétés par la suite.

Les sorties linéarisantes ne sont pas toujours définies pour toutes valeurs de l'état. Un système peut n'être plat que sur un ouvert. Réciproquement, l'expression de l'état en fonction des sorties linéarisantes et de leurs dérivées peut n'être que locale. Donnons un exemple.

Exemple 9. — Considérons un véhicule automobile que nous décrivons par un modèle simplifié, en représentant son état par les coordonnées x et y d'un point quelconque du chassis et l'angle α entre l'axe du véhicule et une direction de référence. On prend pour commandes les dérivées u et v de x et y.

L'équation du véhicule exprime la contrainte suivante : l'essieu arrière, fixe, roule sans glisser. La vitesse d'un de ses points est donc parallèle à l'axe du véhicule. Si le point (x, y) est à une distance L de l'essieu, on considère la vitesse de sa projection sur l'essieu, ce qui nous donne

$$\alpha' = (\cos(\alpha)v - \sin(\alpha)u)/L.$$

(Le vérifier à titre d'exercice.)

Ceci suppose $L \neq 0$, sinon le point est sur l'essieu et l'on a $\alpha = \arctan(y'/x')$. Cette difficulté est en fait un grand avantage, car on peut prendre comme sorties linéarisantes les coordonnées spatiales z_1 et z_2

de tout point de l'essieu arrière. Pour déplacer le véhicule d'un point $(x_1, y_1, \alpha_{1)}$ à un autre $(x_2, y_2, \alpha_{2)}$ en un temps T, il suffit de trouver une trajectoire z avec $z_1(0) = x_1$, $z_2(0) = y_1$, $z_1'(0) = 0$, $z_2(0)' = 0$, $z_2''(0)/z_1''(0) = \tan(\alpha_1)$ et $z_1(T) = x_2$, $z_2(T) = y_2$, $z_1'(T) = 0$, $z_2'(T) = 0$, $z_2''(T)/z_1''(T) = \tan(\alpha_2)$, ce qui permet de partir et d'arriver à vitesse nulle. Un telle courbe peut aisément être obtenue en prenant pour z_1 et z_2 des polynômes d'un degré suffisant : il suffit de résoudre un système linéaire en leurs coefficients. En revanche, éviter des obstacles éventuels pose des difficultés d'un autre ordre.

La forme de Brunovský (exemple 5) évoquée ci-dessus est un exemple remarquable de système plat, puisque x_1 est une sortie linéarisante.

3.2 Systèmes linéaires et platitude

THÉORÈME 10. — *Tout système linéaire commandable est plat. Si un système linéaire n'est pas commandable, il existe une fonction linéaire de l'état satisfaisant une équation linéaire indépendante de la commande.*

PREUVE. — On se limitera ici au cas d'un système stationnaire à une commande, pour donner l'idée générale. On va montrer en fait que tout système linéaire commandable peut être mis en forme de Brunovský (avec une nouvelle commande, fonction de l'ancienne et de l'état).

Posons $z = \sum_{i=1}^{n} c_i x_i$. Le cas où $n = 1$ est immédiat. Sinon, on doit avoir $(c_1, \ldots, c_n)B = 0$, qui exprime le fait que z' ne dépend pas de u, $(c_1, \ldots, c_n)AB = 0$, qui exprime le fait que z'' ne dépend pas de u, $\ldots(c_1, \ldots, c_n)A^{n-2}B = 0$, qui exprime le fait que z^{n-1} ne dépend pas de u. Si le système est commandable, $M = (B, AB, \ldots, A^{n-1}B)$ est inversible. On peut alors choisir $c = M^{-1}(0, \ldots, 0, 1)^T$. On aura dans ce cas $z^{(i)} = z_{i+1}$, pour $1 \leq i < n$ et $z^{(n)} = u + \sum_{i=1}^{n} b_i z_i$. On mettra donc le système en forme de Brunovský avec la nouvelle commande $v = u + \sum_{i=1}^{n} b_i z_i$.

Si le système n'est pas commandable, prenons pour c un vecteur solution de $c(B, AB, \ldots, A^{n-1}B) = 0$, et posons $w = \sum_{i=1}^{n} c_i x_i$. Nécessairement, w^n ne dépend pas de u, sinon le système pourrait être mis en forme de Brunovský, on a donc une relation du type $w^{(r)} = \sum_{i=0}^{r-1} b_i w_i$. CQFD ▪

La non commandabilité se manifeste donc par le fait qu'une fonction de l'état satisfait une équation autonome, indépendante de la commande.

3.3 Un peu d'algèbre tout de même

On appelle anneau une structure algébrique possédant une addition, une soustraction et une multiplication et une unité $(1x = x)$. Un module M sur une algèbre A est une structure algébrique avec une multiplication externe $A \times M \mapsto M$, telle que $a(bm) = (ab)m$, $1m = m$, $(a+b)m = am+bm$, et $a(m_1+m_2) = am_1+am_2$. On peut interpréter un système linéaire stationnaire comme un module sur l'anneau des opérateurs différentiels $A := \mathbf{R}[d/dt]$ (la dérivation n'a pas d'inverse). Si le système est commandable, le module est libre, c'est-à-dire isomorphe à A^m. S'il ne l'est pas, il existe un élément de torsion, c'est-à-dire un élément w tel qu'il existe un élément $a \in A$ satisfaisant $aw = 0$. Pour l'élément w de la preuve du théorème, on peut prendre $a = (d/dt)^n - \sum_{i=0}^{r-1}(d/dt)^i$.

Si le système est non stationnaire, il faut faire intervenir le temps dans les équations. Suposons que les élément des matrices A et B soit des fractions rationnelles en t, on prendra alors $A := \mathbf{R}(t)[d/dt]$. Dans ce cas, A est un anneau *non commutatif*, puisque $(d/dt)tm = (1 + t(d/dt))m$ et donc $(d/dt)t \neq t(d/dt)$. Le théorème 10 est vrai dans ce cadre. La preuve se généralise en prenant $M := (C_1, \ldots, C_n)$, où la suite C_i est définie par la récurrence : $D_1 = A$, $C_1 = B$, $D_{i+1} = D_i' + D_i A$, $C_{i+1} = C_i' + D_i B$. On peut ainsi obtenir un nouveau critère de contrôlabilité pour des systèmes non stationnaires. Vérifier ces résultats constitue un excellent exercice.

3.4 Les exemples pratiques

La contrôlabilité est une propriété générique, c'est-à-dire qu'en ajoutant aux équations d'un système non commandable des termes abitrairement petits, on peut le rendre commandable. En non-linéaire, c'est l'inverse qui se produit pour la platitude. Les systèmes non linéaires n'ont donc aucune chance d'être plats !

Pourtant, les systèmes plats sont très fréquents dans la pratique industrielle, ce qui s'explique par le fait que les systèmes sélectionnés par les ingénieurs sont loin d'être tirés au hazard. Beaucoup d'entre eux ont été pilotés à la main, et le sont encore quelquefois, or un système qui n'est pas plat ou voisin d'un système plat sera très difficile à maîtriser.

Il n'existe pas de critère général de platitude. Nous verrons par la suite quelques critères valides dans des cas particuliers. En pratique, il faut avoir de l'intuition et une bonne connaissance de la physique du système : les sorties linéarisantes on souvent été remarquées de longue date comme des changement de coordonnée permettant de simplifier les calculs.

Souvent, la platitude peut être remarquée dès la mise en équation.

Exemples. — 11) Considérons une masse fixée par un cable de masse négligeable à un wagonnet se déplaçant sur un rail horizontal à une hauteur H du sol. Les commandes sont la position u du wagonnet et la longueur ℓ du cable. Les variables d'état sont les coordonnées x et y de la masse m. celle-ci est soumise à l'accélération de la pesanteur et à une force exercée par le cable, donc parallèle à celui-ci. L'angle du cable par rapport à l'horizontale est donc $\alpha := \arctan(y'' + gm/x'')$ et l'on a $\ell = (H - y)/\sin(\alpha)$ et $u = x + \ell\cos(\alpha)$. On en déduit que x et y sont des sorties linéarisantes. On peut choisir la trajectoire de la masse arbitrairement (pouvu que $y'' > -gm$ car le cable ne peut que tirer) et en déduire les commandes nécessaires pour la réaliser.

Dans cet exemple comme dans de nombreux autres, il est plus facile d'écrire le paramétrage plat que les équations du système.

12) Nous appellerons *systèmes chaînés* des systèmes décrits par des vecteurs d'état $X_i = (x_{i,1}, \ldots, x_{i,m})^T$, $i = 1, \ldots, n$ et satisfaisant des équations de la forme $X_1' = F_1(X_1, X_2)$, $X_i' = F_i(X_{i-1}, X_i, X_{i+1})$, pour $1 < i < n$ et $X_n' = F_n(X_{n-1}, X_n, U)$, où U est le vecteur des m commandes du système. La commande de chaque sous système est l'état du suivant, sauf pour le dernier.

Pourvu que les matrices jacobiennes des F_i par rapport à leur commandes X_{i+1} et à leur état X_i soient de rang m le système est plat et admet X_1 comme sortie linéarisante.

4 Troisième séance. Accessibilié forte et critères de platitude

4.1 Diffiétés

Nous nous efforçons de réduire au strict minimum l'appareil mathématique. Il est néanmoins utile d'introduire la notion de diffiété qui ne nécessite pas un effort considérable et permet de rendre plus accessible une partie de la littérature la plus récente qui l'utilise fréquement.

Définition 13. — *On appelle diffiété un ouvert U de $\mathbf{R}^I$, muni de la topologie de Fréchet, où I est dénombrable, équippé d'une dérivation (c'est-à-dire d'un champs de vecteur) δ.*

La topologie de Fréchet est la topologie la plus grossière telle que les projections sur $\mathbf{R}^J$, où $J \subset I$ est fini, soient continues.

On associe naturellement à un système de la forme 1 une diffiété $D \times \left(\mathbf{R}^{\mathbf{N}}\right)^m \times \mathbf{R}$, où $D \subset \mathbf{R}^n$ est un ouvert correspondant aux valeurs admissibles pour les variables d'état. Un point de la diffiété est représenté par $(x_1, \ldots, x_n, u, u', \ldots, t)$. La dérivation δ correspond dans ce cas à

$$\frac{d}{dt} := \sum_{i=1}^{n} f_i(x, u, t)\frac{\partial}{\partial x_i} + \sum_{j=1}^{m}\sum_{\ell\in\mathbf{N}} u_j^{(\ell+1)}\frac{\partial}{\partial u_j^{(\ell)}} + \frac{\partial}{\partial t}. \tag{5}$$

Les fonctions définies sur la diffiétés sont des fonctions $\mathcal{C}^\infty$ d'un nombre *fini* de coordonnées. On note l'anneau de ces fonctions $\mathcal{O}(U)$. Un morphisme de diffiété $\phi : U \mapsto V$ est une application définie en coordonnées par des fonctions de $\mathcal{O}(U)$ et tel que $\delta_V \circ \phi = \phi \circ \delta_U$.

Définition 14. — *Une diffiété U est plate s'il existe un ouvert W dense dans U tel que tout point de W admette un voisinage isomorphe à un ouvert de l'espace des jets* $\mathrm{J}^\infty(\mathbf{R}, \mathbf{R}^m)$, *qui peut être vu comme la diffiété* $\left(\mathbf{R}^{\mathbf{N}}\right)^m \times \mathbf{R}$, *muni de la dérivation*

$$\sum_{j=1}^{m} \sum_{\ell \in \mathbf{N}} z_j^{(\ell+1)} \frac{\partial}{\partial z_j^{(\ell)}} + \frac{\partial}{\partial t},$$

en écrivant les points de $\mathrm{J}^\infty(\mathbf{R}, \mathbf{R}^m)$, *sous la forme* $(z_1, z_1', \ldots, z_m, z_m', \ldots, t)$

Cette définition est un peu plus précise et tient compte du fait qu'il existe souvent des points singuliers pour la platitude la platitude, au voisinage duquel on ne peut définir de paramétrage plat. Par exemple, pour la voiture, toutes les positions où celle-ci est immobile, puisqu'on ne peut alors déduire son orientation d'après la vitesse d'un point de l'essieu arrière.

4.2 Accessibilité forte

Si l'on définit la contrôlabilité comme la possibilité d'atteindre en un temps fini arbitrairement bref, n'importe quel point de l'espace d'état à partir de n'importe quel point de l'espace, d'état, on est vite handicapé par une notion trop forte pour des systèmes non linéaires. Outre qu'elle excède de beaucoup ce que l'on souhaite faire en pratique, elle a le mauvais goût d'être indécidable, comme le montre la classe de systèmes suivant.

Exemple 15. — À toute équation diophantienne $P(a_1, \ldots, a_n) = 0$, on associe le système

$$x_i' = \sin(\pi x_{i-1}) u_i + P(x) u_{n+1},$$

en posant $x_0 = x_n$ par convention. On voit que, s'il en existe, il est impossible de quitter ou d'atteindre les points à coordonnées entières où le polynôme P s'annule. En revanche, on peut circuler librement dans le reste de l'espace d'état. Le système est donc contrôlable ssi l'équation diophantienne n'admet pas de solution entière.

Dès lors, tester la contrôlabilité pour tout système de cette forme reviendrait à pouvoir décider l'existence d'une solution pour une équation diophantienne (dixième problème de Hilbert), ce que l'on sait être impossible (Matyasevich 1970). (Je ne l'ai pas traité en cours, mais comme l'idée m'en vient, autant ne pas en priver les élèves intéressés.) On pourra bien sûr contester que cet exemple soit véritablement un système au sens de l'automatique : il est rare que l'on ait plus de commandes que de fonctions d'état.

On conçoit que ce type de préoccupation soit bien loin du monde de l'ingénieur qui leur préférera des notions plus pédestres. Il en existe beaucoup, et l'on se contentera d'extraire de ce bestaire l'accessibilité forte, qui nous semble la plus significative et la plus simple à énoncer comme à tester. Pour des systèmes non linéaires, on ne sait tester algorithmiquement que des notions *locales*.

Définition 16. — *Un système est fortement accessible si on peut atteindre en tout temps $t > 0$ tous les points d'une boule ouverte de rayon strictement positif.*

Un critère a été donné par Héctor J. Sussmann et Velimir Jurdjevic en 1972. Rappelons que si δ_1 et δ_2 sont deux dérivations, leur *crochet de Lie* $[\delta_1, \delta_2]$, égal à $\delta_1\delta_2 - \delta_2\delta_1$, est aussi une dérivation. L'algèbre de Lie engendrée par un ensemble E de dérivations est le plus petit espace vectoriel stable par crochet de Lie contenant E.

Théorème 17. — *Un système est fortement accessible si, en tout point d'un ouvert dense, l'algèbre de Lie $\mathcal{L}$ engendrée par les dérivations d/dt et $\partial/\partial u_i$ $(i = 1, \ldots, m)$ est de dimension maximale $n + m + 1$.*

Preuve. — Pour prouver ce théorème, on peut utiliser le système linéarisé au voisinage d'une trajectoire, défini par le système

$$dx_i' = \sum_{j=1}^{n} \frac{\partial f_i(x,u,t)}{\partial x_i} dx_j + \sum_{j=1}^{m} \frac{\partial f_i(x,u,t)}{\partial u_j} du_j,$$

où dx et du représentent de petites variations de l'état et des commandes. On s'assure alors que le critère de Sussmann et Jurdjevic est équivalent à la contrôlabilité du système linéarisé 3.3. Pour des valeurs de dx et du assez petites, les termes du premier ordre sont prépondérant, ce qui permet d'atteindre tous les points d'une boule ouverte.

Sinon, l'algèbre de Lie $\mathcal{L}$ est associée à un système d'EDP linéaires qui possède, localement, des solutions non triviales. Le nombre de solution $P_i(x)$ fonctionnellement indépendantes (c'est-à-dire tel que l'on ne puisse trouver une fonction G non identiquement nulle telle que $G(P) = 0$) est égal à la codimension de $\mathcal{L}$: elles définissent au voisinage de tout point X_0 de l'espace d'état une variété $P_i(x) = P(X_0)$, où l'on doit rester si l'on part de X_0. Ceci contredit l'accessibilité forte. ∎

4.3 Critère de Charlet, Lévine et Marino

Ce critère de platitude a été intoduit dans un article publié en 1991, juste avant que la notion de platitude ne soit introduite en toute généralité.

Théorème 18. — *Un système à une commande est plat ssi l'algèbre de Lie $\mathcal{L}_i$ engendrée par les dérivations $d_0 := \partial/\partial u$, $d_1 := [d/dt, d_0]$, ..., $d_i := [d/dt, d_{i-1}]$ est un espace verctoriel de dimension exactement $i+1$, pour tout $0 \leq i \leq n$.*

Preuve. — La preuve de ce théorème repose sur une idée assez semblable à ce que l'on a vu dans le cas linéaire. Si le système est plat, on peut exprimer localement toutes les n fonctions d'état à partir d'une sortie linéarisante z et de ses dérivées. (Il y a autant de sorties linéarisantes que de commandes, donc ici une seule.) Suposons que la sortie linéarisante dépende de la commande u. Alors z' dépend de u', z'' de u'' etc. Pour exprimer x à partir des r premières dérivées de z, il faudrait qu'un système de r équations en $n+r$ variables ait une solution localement unique. C'est impossible. Par un raisonnement semblable, on montre que z, z', ..., $z^{(n-1)}$ ne doivent pas dépendre de u.

La sortie linéarisante z doit donc être solution du système $(\partial/\partial u)z = 0$, $(\partial/\partial u)(d/dt)z = 0$, ..., $(\partial/\partial u)(d/dt)^{n-1}z = 0$, qui est équivalent à $d_i = 0$ pour $0 \leq i \leq n-1$. En effet, $(\partial/\partial u)z = 0$ et $(\partial/\partial u)(d/dt)z = 0$, est équivalent à $(\partial/\partial u)z = d_0 z = 0$ et $((\partial/\partial u)(d/dt) - (d/dt)(\partial/\partial u))z = d_1 z = 0$, etc.

Si l'algèbre de Lie $\mathcal{L}_{n-1}$ est de dimension n, ce système admet localement une solution z non triviale. L'algèbre de Lie $\mathcal{L}_n$ est alors de dimension $n+1$ ssi le système est fortement accessible d'après de critère de Sussmann et Jurdjevic, donc ssi z, z', ..., $z^{(n-1)}$ sont fonctionnellement indépendants. Ce équivaut à ce que la matrice jacobienne $(\partial z^{(j)}/\partial x_i)$ soit de rang plein et que z soit une sortie linéarisante. CQFD. ∎

Notons que ce critère n'admet pas d'analogue pour un système à plus d'une commande. Ainsi, le système $x_1' = u_1$, $x_2' = u_2$ et $x_3' = u_1 u_2$ admet des sorties linéarisantes $z_1 = x_1$ et $z_2 = u_1 x_2 - x_3$, dont l'une dépend de l'une des commandes, mais elle n'admet pas de sortie linéarisante ne dépendant que de l'état.

4.4 Quelques autres critères de platitude

La première apparition d'une notion apparentée aux systèmes plats a été retrouvée dans un article de David Hilbert en 1912, sous le nom de « integralloss system », c'est-à-dire de système dont les solutions peuvent être exprimées sans intégration. En 1915, Élie Cartan en a donné la caractérisation suivante dans un cas particulier, qui correspond pour l'automatique contemporaine à celui de systèmes à deux commandes sans dérives, c'est-à-dire de la forme :

$$x_i' = f_i(x)u + g_i(x)v.$$

Les deux commandes sont u et v, et le système est dit sans dérive car $x' = 0$ lorsque les dérivées sont nulles. Le champ des vitesse est une combinaison linéaires des deux champs (ou dérivations) $\delta_1 = \sum_{i=1}^n f_i(x)\partial/\partial x_i$ et $\delta_2 = \sum_{i=1}^n g_i(x)\partial/\partial x_i$.

Théorème 19. — *Considérons un système sans dérive. On définit les espaces vectoriels E_i comme suit : $E_0 = \langle \delta_1, \delta_2 \rangle$, ...$E_{i+1} = \langle [a, b] | (a, b) \in E_i^2 \rangle$. Un système à deux commande sans dérive est plat ssi pour tout*

$0 \leq i \leq n-3$, *l'espace vectoriel* E_i *est de dimension* $i+2$ Cette condition est trivialement satisfaite pour $n \leq 4$. Le cas $n=3$ correspond à l'exemple de la voiture, $n=4$ à celui d'un camion avec remorque.

THÉORÈME 20. — *Un système sans dérive*

$$x_i' = \sum_{j=1}^{n-1} f_{j,i}(x) u_j$$

avec un état de dimension n *et* $n-1$ *commandes est plat ssi il est commandable.*

Nous ne détaillons pas la preuve, nous contentant décrire comment on peut obtenir des sorties linéarisantes. Posons $\delta_j = \sum_{i=1}^{n} f_{j,i} \partial/\partial x_i$. Soient $C_1(x)$, …, $C_{n-1}(x)$, $n-1$ fonctions de l'état. On considère la dérivation $\delta = \sum_{i=1}^{n-1} C_i \partial/\partial u_1$. On prend pour $z_1, \ldots, z_{n-1}$, $n-1$ solution fonctionnellement indépendantes de l'équation aux dérivées partielles linéaire $[\delta, d/dt] = 0$. Celles-ci forment alors (pour un choix « générique » des C_i) une sortie linéarisante, car $\sum_{i=1}^{n-1} (\partial/\partial u_i) z_i' = 0$, ce qui montre que la matrice jacobienne $(\partial z_i'/\partial u_j)$ n'est pas de rang maximal $n-1$, ce qui permet d'exprimer localement l'état x, connaissant z et z', si

$$\operatorname{rang} \begin{pmatrix} \frac{\partial z'}{\partial u} & \frac{\partial z'}{\partial x} \\ \frac{\partial z}{\partial u} & \frac{\partial z}{\partial x} \end{pmatrix} - \operatorname{rang} (\, \partial z'/\partial u \,) = n,$$

c'est-à-dire si la première matrice est de rang maximal. Si ce n'est pas le cas, les z_i forment eux-même l'état d'un système à $n-2$ commandes, pour lequel on peut chercher une sortie plate. Cette sortie plate sera complétée d'une variable d'état x_i pour former une sortie linéarisante du système de départ. Ceci ne peut arriver que pour $n \geq 3$, car sinon, z' serait nul, ce qui contredit la contrôlabilité.

Exemple 21. — La voiture est un bon exemple. Si l'on prend $\delta = \partial/\partial u$, on obtient aisément comme solution $z_1 = y$ et $z_2 = e^x \tan(\alpha/2)$. Ce type de solution présente l'inconvénient de n'être pas invariante par le groupe des translations et des rotations. Or, on souhaite un contrôle qui ne dépende pas du choix des coordonnées.

Pour cela, il faut prendre un champs δ dont l'expression soit invariante par le groupe : $\delta = \cos(\alpha + \phi)\partial/\partial u + \sin(\alpha+\phi)\partial/\partial v$. Pour $\phi \neq 0$, on obtient des sorties linéarisantes qui correspondent aux coordonnées d'un point de l'essieu arrière (l'intersection de la droite d'angle $\phi + \pi/2$ dans le référentiel du véhicule passant par le point de référence choisi sur celui-ci. Quand ϕ tend vers 0, ce point d'intersection tend vers l'infini. On obtient alors des sorties linéarisantes $z_1 = \alpha$ et $z_2 = \cos(\alpha)y - \sin(\alpha)x$. Celles-ci ne sont plus préservées que par les rotations par rapport à l'origine.

Détailler les calculs est un excellent exercice.

5 Quatrième séance. Observateurs linéaires

5.1 Observateurs de Luenberger

On considère un système linéaire et l'on se propose de calculer l'état à partir de la sortie y, en supposant que le système est observable.

Pour celà, on va construire un état fictif $\widehat{x}$, solution de l'équation $\widehat{x}' = A\widehat{x} - Bu + MC\widehat{x} - My$. Ainsi, on aura $(\widehat{x} - x) = (A - MC)(\widehat{x} - x)$.

PROPOSITION 22. — *Les coefficients du polynôme caractéristique de la matrices* $A - MC$ *s'expriment linéairement en fonction des coefficients de* M.

On peut résoudre le système et fixer arbitrairement les coefficients du polynôme caractéristique ssi le système est observable.

PREUVE. — Plaçons-nous pour simplifier dans le cas d'une seule sortie y. Si le système est observable, on peut prendre pour nouvel état du système y, y', …, $y^{(n-1)}$. La matrice A est dans une telle base de la forme

$$\begin{pmatrix} 0 & 1 & 0 & \cdots & 0 \\ \vdots & \ddots & \ddots & \ddots & \vdots \\ \vdots & & \ddots & 1 & 0 \\ 0 & \cdots & \cdots & 0 & 1 \\ -a_0 & -a_1 & \cdots & -a_{n-2} & -a_{n-1} \end{pmatrix},$$

Les a_i étant les coefficients du polynôme caractéristique. En choisissant une nouvelle base $z_1 = y$, $z_2 = y' - a_{n-1}y$, $z_3 = y'' - a_{n-1}y' - a_{n-2}y$, ..., $z_n = y^{(n-1)} - a_{n-1}y^{(n-2)} - \cdots - a_1 y$, la matrice prend cette fois la forme

$$\begin{pmatrix} -a_0 & 1 & 0 & \cdots & 0 \\ -a_1 & 0 & \ddots & \ddots & \vdots \\ \vdots & \vdots & \ddots & 1 & 0 \\ -a_{n-2} & 0 & \cdots & 0 & 1 \\ -a_{n-1} & 0 & \cdots & 0 & 0 \end{pmatrix},$$

et dans cette nouvelle base, où $C = \begin{pmatrix} 1 & 0 & \cdots & 0 \end{pmatrix}$, le polynôme caractéristique de $A + MC$ aura pour coefficients les $a_i + b_i$ si $M = \begin{pmatrix} b_0 & \cdots & b_{n-1} \end{pmatrix}$.

Ceci prouve que l'on peut assigner les valeurs propres si le système est observable. S'il ne l'est pas, on peut factoriser χ_{A+MC} en un produit PQ, où les coefficients du premier facteur, de degré égal à la dimension r de l'espace vectoriel engendré par la sortie y et ses dérivées peuvent être choisis arbitrairement en fonction de M, et où le second facteur Q est indépendant de M. La preuve, élémentaire, est laissée au lecteur. ■

Ceci nous permet de construire un observateur en choisissant les coefficients de manière à ce que les valeurs propres soient toutes à partie réelle strictement négative. Ainsi, asymptotiquement, $\widehat{x}$ tend vers x. Si l'on prend des parties réelles faiblement négative, la convergence sera plus lente, mais le résultat moins sensible au bruit, qui sera « moyenné » ; il y a un compromis à faire entre vitesse de convergence et précision.

Ce type d'observateur a été proposé par David G. Luenberger en 1966, dans le cas général, le cas d'une seule sortie ayant été publié dès 1964.

Cette méthode supose de connaître avec une très bonne précision les coefficients du système, car les valeurs propres sont très sensibles aux variation des coefficients du polynôme caractéristique. Considérons en effet le polynôme de Wilkinson $(x+1)(x+2)\cdots(x+20) = x^{20} + 210x^{19} + \cdots 20!$, il suffit d'ajouter 2^{-32} au terme de degré 19 de W, pour que le nouveau polynôme n'ait plus que 16 racines réelles. Celles-ci sont heureusement toutes à partie réelle strictement négatives. Mais si l'on prend $(x+5)^{10} + 0,5x^9$ au lieu de $(x+5)^{10}$, les parties réelles des racines vont de $-16,8588$ à $-2,7108$. Bien que l'on se soit seulement trompé de 1% sur la valeur du premier coefficient, les valeurs propres varient elles de -50% à $+200\%$!

Or, il n'est pas suffisant d'avoir un processus qui converge, il faut que celui-ci le fasse assez vite, pour pouvoir disposer à temps d'une évaluation correcte de l'état, mais pas trop, de manière à avoir un résultat peu sensible au bruit. Le choix des valeurs est donc le résultat d'un compromis délicat, qui devient très aléatoire si les valeurs des coefficients sont trop incertaines.

On peut, si l'on dispose de r sorties indépendantes, construire un observateur d'ordre $n-r$ seulement. En effet, tel que nous l'avons décrit, l'observateur recalcule la valeur de la sortie. Ceci n'est pas nécessairement un inconvénient, car la valeur recalculée peut être meilleure que celle d'origine, bruitée.

5.2 Reconstructeurs d'états

Il s'agit d'une méthode très récente, introduite par Michel Fliess et Hebertt Sira-Ramìrez en 2002. L'idée de base a été découverte et décrite dans le cadre de la théorie des opérateurs de Mikusiǹski.

Elle permet d'identifier les paramètres, puis d'estimer l'état. Elle converge pour des bruits $w(t)$ dont la moyenne tend vers 0 ($1/\tau \int_0^t w(\tau)d\tau$ tend vers 0 quand t tend vers l'infini), et permet d'émiminer des bruits

« structurés », solution d'équations différentielles linéaires. Ceci est assez courant : bruit constant (défaut d'étalonnage d'un capteur), sinusoïdal (parasitage par l'alimentation électrique), etc.

Nous nous contenterons ici de présenter les principaux résultats dans un cadre simplifié, qui permet de se contenter d'un outillage mathématique réduit à l'intégration par partie.

Considérons un système de la forme

$$x^{(n)} + \sum_{i=1}^{n-1} a_i x^{(i)} = bu. \tag{6}$$

On souhaite dans un premier temps pouvoir calculer les coefficients. Ceci serait immédiat si l'on disposait des dérivées de x, mais en présence de bruit celles-ci sont difficiles à évaluer par des moyens naïfs (différences finie, etc.) On aimerait donc pouvoir intégrer notre équation jusqu'à remplacer toutes les dérivées par des intégrales. Le problème, en intégrant de 0 à t, est que l'on ignore les valeurs en 0 de x', x'', etc. Une idée astucieuse est alors de multiplier par t^ℓ, avec $\ell \geq n$ avant d'intégrer n fois. On peut alors se débarasser de toutes les dérivées par intégration par partie, tous les termes étant alors nuls en 0.

En posant $a_n = 1$, on se ramène alors à une équation de la forme

$$\sum_{i=1}^{n} M_i a J_i(x) = bJ_n(u), \tag{7}$$

où $J_i(x) = \int_0^t \tau^i x(\tau) d\tau$ et la matrice M constituée des lignes M_i (qui se calculent par récurrence) inversible, car triangulaire., On peut ainsi évaluer les coefficients de cette nouvelle équations ($M_n = (1, 0, \ldots, 0)$) et en déduire ensuite les a_i.

Détailler les calculs est un excellent exercice et le plus sûr moyen de comprendre.

Ayant obtenu les a_i, on peut ensuite calculer les dérivées de x. En effet, si l'on multiplie seulement par t^{n-1}, la n^{e} intégration fait apparaître un terme dépendant de $x'(0)$, ce qui nous permet de le calculer. Multipliant alors, par t^{n-2}, on fait apparaître x' et x'', d'où l'on déduit x'' etc.

Montrons brièvement comment on peut éliminer un bruit structuré, solution de $Lw = 0$. Il suffit d'appliquer l'opérateur L aux deux membres de l'équation (6), pour faire disparaître le bruit. Reconstituer l'état suppose naturellement que les opérateurs L et $(d/dt)^n + \sum_{i=1}^{n-1} a_i (d/dt)^i$ soient sans facteur commun.

6 Cinquième séance. Stabilisation par bouclage.

Nous avons vu comment identifier les paramètres d'un système et comment observer l'état. On a également montré comment résoudre les problèmes de planification de trajectoire pour des systèmes plats. Un difficulté subsiste : non seulement les valeurs des sorties sont bruitées, mais l'évolution du système elle-même dépend de « bruits », c'est-à-dire de perturbations inconnues. L'une d'elle, et non la moindre, est l'écart séparant le système physique « réel » du modèle simplifié utilisé pour bâtir le contrôle. Il faut donc être capable de corriger la trajectoire afin de la rapprocher de la trajectoire théorique.

Pour ce faire, on peut souvent utiliser le système linéarisé,

$$dx'_i = \sum_{j=1}^{n} \frac{\partial f_i(x,u,t)}{\partial x_i} dx_j + \sum_{j=1}^{m} \frac{\partial f_i(x,u,t)}{\partial u_j} du_j,$$

en supposant que l'écart dx par rapport à la trajectoire de référence reste petit. Nous considérons le cas où l'on veut stabiliser le système au voisinage d'un point fixe.

On procède de la même manière que pour l'opérateur de Luenberger, mais cette fois, on va faire en sorte de construire un bouclage $u = Mx$, de manière à ce que la matrice $A + BM$ soit stable, c'est-à-dire ait toutes ses valeurs propres à partie réelle strictement négative. On montre de même que le polynôme caractéristique peut être construit arbitrairement pourvu que le système soit contrôlable. Il est inutile d'insister sur ce point.

Cependant, en général, on ne connaît pas l'état. Il faut donc le remplacer par la valeur $\widehat{x}$ recalculée par un observateur. Ceci nous conduit à poser $x' = Ax + BM_1\widehat{x}$, et $\widehat{x}' = A\widehat{x} + BM_1\widehat{x} + M_2C(\widehat{x} - x)$, en prenant pour M_1 la valeur voulue pour le bouclage et pour M_2 celle retenue pour l'observateur.

Plus généralement, on peut utiliser la platitude pour se ramener à une trajectoire donnée. Soit un système non-linéaire, $x' = f(x, u)$, pour lequel on dispose d'une sortie linéarisante z (on considère encore par simplicité le cas à une commande). On veut suivre la trajectoire correspondant à $z = \phi(t)$. On va poser $P_1 = (z-\phi(t))' - \lambda_1(z - \phi(t))$, ..., $P_i = P'_{i-1} - \lambda_i P_{i-1}$, etc. En prenant l'équation P_n, et en revenant dans les coordonnées x de départ, on obtient un bouclage $x' = f(x, U(x))$, qui permet de se stabiliser au voisinage de la trajectoire voulue.

Ces méthodes nous permettent de garantir que, pour des perturbation assez petites, on restera au voisinage de la trajectoire ou du point de fonctionnement souhaité.

7 Une parenthèse. Comment mettre en équation

Un approche « mathématicienne » des problèmes considère les équations comme les données de base à partir desquelles une solution doit être recherchée. En pratique, les équations sont elles-même le résultat d'une démarche complexe, assez semblable à une traduction, où l'on s'efforce de demeurer fidèle au texte d'origine, tout en étant intelligible et si possible élégant. Parfois, la trahison est légitime, si elle est efficace.

Nous avons vu que dans certains cas, et il faut souvent simplifier pour s'y ramener, la résolution plate est plus simple que les équations « de départ », ce qui permet de se dispenser de les écrire. Tout ne saurait être aussi simple. Lorsque l'on doit écrire les équations d'un problème mécanique, la meilleure stratégie lorsque l'intuition ne nous guide pas vers une méthode plus efficace est de recourir au lagrangien. Il est en effet deux types de loi physiques, celles qui servent à comprendre, comme l'équilibre des forces, et celles qui servent à calculer, comme le principe de moindre action.

C'est ce qui fait la force du lagrangien, formule magique qui comprend à notre place les jours de petite forme. Comme toute roue de secours, elle doit savoir rester dans le coffre, quand l'imagination n'est pas en panne.

Rappelons que le langrangien d'un système mécanique est $L := E - P$, où E est l'énergie cinétique et P l'énergie potentielle. Les trajectoires de la mécanique sont telles que l'action $(\int_{t_1}^{t_2} L(x(t))dt)$ est *localement* minimale, ce qui se traduit par les équations :

$$\frac{d}{dt}\frac{\partial L(x,u)}{\partial x'_i} = \frac{\partial L(x,u)}{\partial x_i}, \quad i = 1, \ldots, n.$$

Pour des raisons physiques, le déterminant $\left|\partial^2/\partial x_i \partial x_j\right|$ est non nul. Dans le cas d'une particule ponctuelle, il correspond à la masse, toujours strictement positive, etc. On peut donc déduire de ce système n équation explicites d'ordre 2 exprimant les dérivées x''_i.

La seule difficulté, mais elle est parfois réelle, est de trouver un paramétrage de l'espace d'état, qui peut avoir une géométrie complexe.

Considérons à titre d'exemple le cas d'une masse ponctuelle en mouvement sur une surface d'équation $P(x, y, z) = 0$. Localement, on peut exprimer l'une des coordonnées, par exemple z, en fonction des deux autres. On peut alors utiliser le lagrangien comme on l'a décrit ci dessus, en posant

$$L = \frac{1}{2}m\left(\left(\left(\frac{\partial Z(x,y)}{\partial x} + 1\right)x'\right)^2 + \left(\left(\frac{\partial Z(x,y)}{\partial y} + 1\right)y'\right)^2\right).$$

Mais, si la trajectoire doit traverser le lieu où

$$\frac{\partial Z(x,y)}{\partial z} = 0,$$

il faut choisir de nouvelles coordonnées. C'est aussi simple à concevoir en théorie que laborieux à implanter avec un solveur numérique. Une solution simple consiste à introduire une force fictive, ramenant le point vers la surface, et d'écrire

$$\begin{array}{rcl} x'' & = & -\lambda P(x,y,z)\frac{\partial P(x,y,z)}{\partial x}, \\ y'' & = & -\lambda P(x,y,z)\frac{\partial P(x,y,z)}{\partial y}, \\ z'' & = & -\lambda P(x,y,z)\frac{\partial P(x,y,z)}{\partial z}. \end{array}$$

On peut éventuellement rajouter une force de frottement visqueux pour se ramener vers la surface, si l'on n'est pas sur de la précision des conditions initiales.

Ce type de difficulté apparaît fréquement en modélisation lorsque l'on essaye de simplifier un système en remplaçant par 0 une quantité petite : on détruit la structure du système d'équations d'origine et l'on fait apparaître des équations algébriques difficiles à gérer. Le plus simple est souvent de ne pas trop simplifier.

8 Cinquième séance bis. Test d'observabilité de Sedoglavic

On va montrer comment l'on peut tester de manière rapide l'observabilité et l'identifiabilité locale d'un système non linéaire. Le résultat général est résumé par le théorème suivant, dû à Alexandre Sedoglavic, en 2001. Dans l'énoncé qui suit, la borne de complexité est obtenue, non à partir du degré des dénominateurs et des numérateurs des fractions représentant les équations d'état, mais à partir de leur complexité d'évaluation, c'est à dire du nombre d'opérations élémentaires nécessaires pour les calculer. Ainsi $(x+1)^{2^5}$ se calcule en 1 addition et 5 multiplications, c'est donc un polynôme de complexité 6.

Théorème 23. — *Considérons un modèle possédant n variables d'état, ℓ paramètres, r sortie et m commandes. Supposons que les équations de ce modèles soient représentées par un calcul d'évaluation de complexité L.*

Il existe un algorithme probabiliste qui distingue l'ensemble des variables observables et des paramètres identifiable du modèle, et qui indique le nombre de variable et de paramètres devant être supposés connus pour obtenir un modèle observable et identifiable.

La complexité arithmétique de cet algorithme est bornée par

$$\mathcal{O}\left(\mathcal{M}(\nu)\left(\mathcal{N}(n+\ell)+(n+m)L\right)+m\nu\mathcal{N}(n+\ell)\right),$$

où $\mathcal{M}(\nu)$ (resp. $\mathcal{N}(\nu)$) désigne le coût de la multiplication de séries d'ordre $\nu+1$ (resp. de deux matrices de taille $\nu\times\nu$) et où ν est inférieur ou égal à $n+\ell$ (génériquement égal à $\lceil (n+m)/m\rceil$).

Soient μ un entier positif arbitraire, $D := 4(n+\ell)^2(n+m)d$ et

$$D' := (2\mathrm{Log}(n+\ell+r+1)+\mathrm{Log}\mu D)D + 4(n+\ell)^2((n+m)h+\mathrm{Log}2nD).$$

Si les calculs sont éffectués modulo un nombre premier p supérieur à $2D'\mu$, alors la probabilité d'obtenir une réponse correcte est minorée par $(1-1/\mu)^2$

L'idée de base de l'algorithme consiste à calculer un développement en série de l'état x, d'où l'on peut déduire un développement en série des r sorties y. Ceci peut être fait de manière rapide par la méthode de Newton. (Se reporter au cours 6 de Bruno Salvy (semaine 3), théorème 4 p. 8.)

Si le système est localement identifiable et observable, on peut exprimer localement les m fonctions d'état x et les ℓ paramètres θ à partir des sorties y et de leurs dérivées. Il faut au plus aller jusqu'à l'ordre $n+\ell$, qui borne l'ordre de dérivation ν nécessaire. Sinon, on à un système d'ordre inférieur en les sorties y, et les dérivées suivantes des y_i s'exprimerons à partir des dérivées d'ordre inférieur à $n+\ell$. Elle n'apporteront donc pas d'informations supplémentaires.

Il suffit alors pour conclure de calculer le rang de la matrice

$$J_1 := \begin{pmatrix} \frac{\partial y}{\partial u} & \frac{\partial y}{\partial u^{\nu-1}} \\ \vdots & \vdots \\ \frac{\partial y^\nu}{\partial u} & \frac{\partial y}{\partial u^{\nu-1}} \end{pmatrix}$$

et celui de la matrice

$$J_2 := \begin{pmatrix} \frac{\partial y}{\partial x} & \frac{\partial y}{\partial \theta} & \frac{\partial y}{\partial u} & \frac{\partial y}{\partial u^{\nu-1}} \\ \vdots & \vdots & \vdots & \vdots \\ \frac{\partial y^\nu}{\partial x} & \frac{\partial y^\nu}{\partial \theta} & \frac{\partial y^\nu}{\partial u} & \frac{\partial y}{\partial u^{\nu-1}} \end{pmatrix}.$$

Si $\mathrm{rang} J_2 - \mathrm{rang} J_1 = n + \ell$, le système est observable et identifiable, sinon, $n + \ell - (\mathrm{rang} J_2 - \mathrm{rang} J_1)$ est le nombre de variables et de paramètre qui doivent être supposés connus pour qu'il le devienne.

On calcule les rangs en remarquant que si x est solution du système 1, alors $\partial f / \partial \theta_\alpha$ est solution du sytème

$$dx'_i = \sum_{j=1}^{n} \frac{\partial f_i(x, u, t, \theta)}{\partial x_j} dx_i + \frac{\partial f_i(x, u, t, \theta)}{\partial \theta_\alpha} \quad i = 1, \ldots, n,$$

avec les conditions initiales $dx(0) = 0$.

De même, $\partial f / \partial x_\alpha(0)$ est solution du sytème

$$dx'_i = \sum_{j=1}^{n} \frac{\partial f_i(x, u, t, \theta)}{\partial x_j} dx_i \quad i = 1, \ldots, n,$$

avec les conditions initiales $dx_j(0) = 0$, si $j \neq \alpha$ et $dx_\alpha(0) = 1$.

On obtient donc les développement en séries des solutions de ces équations par le même algorithme rapide, que pour le développement en série de l'état. (Il est difficile de dater l'idée d'utiliser ce type de système pour calculer les dérivées des solutions par rapports aux paramètres. On la trouve dans un cas particulier dans un article de Joseph Ritt en 1920. Le système linéarisé lui-même dans des papiers de Jacobi écrits vers 1850.)

L'aspect probabiliste consiste à choisir au hasard les valeurs numériques correspondant aux fonctions d'état à $t = 0$, aux paramètres, etc. Génériquement, les rang des matrices seront ceux des expressions formelles. Il y a une probabilité d'erreur qui peut être majorée en fonction de la taille des nombre choisis pour les calculs.

9 Sixième séance. Systèmes d'équations aux dérivées partielles

On va indiquer quelques méthodes récentes permettant d'étendre les méthodes de planification de trajectoire inspirées par la platitude au cas de systèmes de dimension infinie décrits par des systèmes d'équations aux dérivées partielles.

9.1 Développements en série

Le cas le plus simple est celui de l'équation de la chaleur. On considère une tige conductrice, de longueur 1, isolée au point $x = 0$ et chauffée à une température $w = u(t)$ au point $x = 1$. Le système est donc décrit par l'équation

$$\frac{\partial w}{\partial t} = \frac{\partial^2 w}{\partial x^2},$$

avec les conditions aux bords $w(t, 1) = u(t)$, et $w_x(t, 0) = 0$ (on utilisera par la suite cette notation pour les dérivées partielles).

L'idée de base est de traiter l'opérateur $\partial/\partial t$ comme une constante s. Celle-ci est inspirée par la transformation de Laplace, mais on peut l'utiliser comme un intermédiaire de calcul, un peut comme les nombres imaginaires.

On sait résoudre l'équation

$$\frac{d^2w}{dx^2} = sw,$$

la forme générale des solutions est $\cosh(\sqrt{s}x)\,W(0) + (\sinh(\sqrt{s}x)/\sqrt{s})W_x(0)$. Si l'on remplace maintenant s par $\frac{\partial}{\partial t}$, on obtient bien des solutions à partir des développement en séries de $W(0)$ et $W_x(0)$. Le terme $\sqrt{\frac{\partial}{\partial t}}$ n'apparaît pas, car les fonctions $\cosh(x)$ et $\sinh(x)/x$ sont paires. Dans le cas qui nous occupe, on obtient une solution

$$\cosh\left(\sqrt{\frac{\partial}{\partial t}}x\right)W(t,0),$$

et l'on peut donc paramétrer les trajectoires du système en choisissant arbitrairement la fonction $Z(t) = W(t,0)$, pourvu que le développement en série converge. On peut bien sûr choisir une fonction analytique, mais il suffit d'avoir $Z^{(n)} < (2n)!/R$ pour que la série en espace ait un rayon de convergence R non nul. Une fonction satisfaisant cette propriété est dite Gevrey d'ordre 2. Ceci permet d'utiliser la fonction

$$\phi(t) = \frac{\int_0^t e^{-\frac{1}{\tau(T-\tau)}}\,d\tau}{\int_0^T e^{-\frac{1}{\tau(T-\tau)}}\,d\tau},$$

qui permet d'amener la tige de la température uniforme $W(0,x) = 0$, à la température uniforme $W(T,x) = 1$ en un temps fini T, ce qui est impossible avec des fonctions analytique, qui ne peuvent être non nulles tout en ayant toutes leurs dérivées nulles en un point.

Cette méthode a été appliquée avec succès à de nombreux systèmes physiques : bras de grue flexibles, cables pesants, récipients contenant des liquides. Il faut naturellement faire des hypothèses permettant de se ramener à un système linéaire possédant des solutions explicites. Lorsque les modèles deviennent complexes, l'utilisation du calcul formel est une aide appréciable pour simplifier la manipulation des formules, et surtout éviter les erreurs.

9.2 Discrétisations

Pour certains systèmes, linéaires ou non linéaires, on peut résoudre le problème de la planification de trajectoire en les approximant par une suite convergente de discrétisations plates. Il faut naturellement qu'il existe une suite convergente de sorties linéarisantes, et que la suite des paramétrages obtenus converge aussi. Traiter un exemple est plus éclairant que d'échaffauder une théorie générale, dont on ne dispose pas pour l'instant.

Nous reprenons l'équation de la chaleur, mais en introduisant un terme de rayonnement non linéaire :

$$\frac{\partial w}{\partial t} = \frac{\partial^2 w}{\partial x^2} - w^3.$$

On va découper la tige en n segments, et se ramener par différences finies à un système où n'interviennent plus que les fonctions d'état $w_i(t)$ correspondants aux températures $w(t, i/n)$:

$$w_i' = n^2(2w_i - w_{i-1} - w_{i+1}) - w_i^3, \quad 0 < i \leq n,$$

avec la condition limite

$$w_0 = w_1.$$

Ce système est un cas simple de système chaîné, et w_0 est la sortie linéarisante. On obtient un paramétrage en posant :

$$w_{i+1} = 2w_i - w_{i-1} - \frac{w_i' + w_i^3}{n^2}.$$

D'un point de vue calculatoire, la méthode devient vite impraticable si l'on utilise des formules littérales, surtout si l'on prend comme valeur de w_0 une fonction $\phi(t)$ comme celle décrite ci-dessus. La meilleure solution consiste à calculer les w_i au temps t en développant la fonction ϕ en série à l'ordre $n-1$ au voisinage de t : w_i sera alors obtenu comme une série à l'ordre $n-i$ pour $0 < i \leq n$. Le cours de Bruno Salvy montre comment l'on calcule rapidement avec les séries.

Ce type de calcul est le seul exemple d'utilisation de la platitude pour lequel il est vraiment difficile de se passer de calcul formel, mais ils n'apas jusqu'ici connu d'applications.

Un exemple plus impression est celui d'une tige flexible non linéaire. Nous renvoyons les curieux à l'article :
`http ://www.stix.polytechnique.fr/ sedoglav/Load/OllivierSedoglavic2001.pdf`
où il est détailler de manière abordable pour les lecteurs parvenus à la fin de ces notes.