



AGENCE  
INNOVATION  
DÉFENSE



ENSTA  
BRETAGNE

Lab-STICC



COLLEGES	SCIENCES
BRETAGNE	POUR L'INGENIEUR
LOIRE	ET LE NUMERIQUE

Faro

# Calcul englobant de l'image ellipsoïdale dans le cas singulier

Morgan Louédec, Luc Jaulin, Christophe Viel

21 Juin 2022

**Principe:**

Ensemble d'états initiaux  $\mathcal{S}_0 \subset \mathbb{R}^n$

Application nonlinéaire  $g : \mathbb{R}^n \rightarrow \mathbb{R}^n$

Ensemble englobant  $\mathcal{S}_{\text{out}} \subset \mathbb{R}^n$  tel  
que  $g(\mathcal{S}_0) \subseteq \mathcal{S}_{\text{out}}$

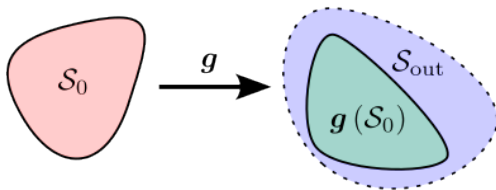


Figure 1: Représentation des ensembles

**Utilité:**

- algorithme de prédiction garantie
- peut être utilisé dans des preuves mathématiques

**Limitations:**

- wrapping effect
- complexité algorithmique

**Ensembles couramment utilisés**

- boîtes
- zonotopes
- ellipsoïdes

## Contexte - Ellipsoïdes

### Defintion

Une ellipsoïde non-dégénérée est un sous-ensemble de  $\mathbb{R}^n$  décrit par la forme quadratique

$$\mathcal{E}(\boldsymbol{\mu}, \boldsymbol{\Gamma}) = \left\{ \mathbf{x} \in \mathbb{R}^n \mid (\mathbf{x} - \boldsymbol{\mu})^T \boldsymbol{\Gamma}^{-T} \boldsymbol{\Gamma}^{-1} (\mathbf{x} - \boldsymbol{\mu}) \leq 1 \right\} \quad (1)$$

avec  $\boldsymbol{\Gamma} \in \mathbb{R}^{n \times n}$ , le centre  $\boldsymbol{\mu} \in \mathbb{R}^n$  et la matrice définie positive  $\boldsymbol{\Gamma} \boldsymbol{\Gamma}^T$ .

Une ellipsoïde est une transformation affine de la sphère unité:

$$\begin{aligned} \mathcal{E}(\boldsymbol{\mu}, \boldsymbol{\Gamma}) &= \{ \mathbf{x} \in \mathbb{R}^n \mid \exists \mathbf{e} \in \mathbb{R}^n, \mathbf{x} = \boldsymbol{\mu} + \boldsymbol{\Gamma} \cdot \mathbf{e}, \|\mathbf{e}\|_2 \leq 1 \} \\ &= \boldsymbol{\mu} + \boldsymbol{\Gamma} \cdot \mathcal{E}(0, \mathbf{I}_n) \end{aligned} \quad (2)$$

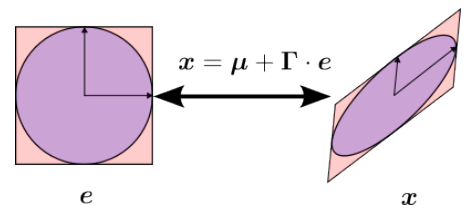


Figure 2: Transformation ellipsoïdale

## Méthode existante - linéarisation

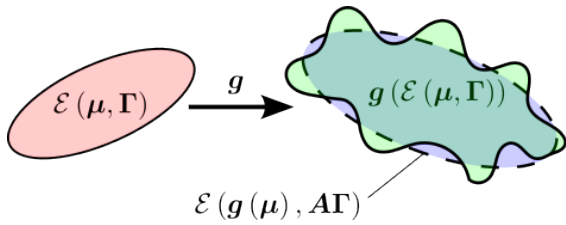


Figure 3: Estimation par linéarisation

Propagation par linéarisations au point  $\mu$ :

$$\mu_l = \mathbf{g}(\mu) \quad (3)$$

$$\Gamma_l = \mathbf{A} \cdot \Gamma \quad (4)$$

$$\mathbf{A} = \frac{\partial \mathbf{g}}{\partial \mathbf{x}}(\mu) \quad (5)$$

Propagation par filtre de Kalman étendu

$$\hat{\mathbf{x}}_{k+1} = \mathbf{g}(\hat{\mathbf{x}}_k) \quad (6)$$

$$\mathbf{G}_{k+1} = \mathbf{A}_k \cdot \mathbf{G}_k \cdot \mathbf{A}_k^T + \mathbf{G}_\alpha \quad (7)$$

$$\mathbf{A}_k = \frac{\partial \mathbf{g}}{\partial \mathbf{x}}(\hat{\mathbf{x}}_k) \quad (8)$$

Ressemblance

$$\mu \leftrightarrow \hat{\mathbf{x}}_k \quad (9)$$

$$\Gamma \Gamma^T \leftrightarrow \mathbf{G}_k \quad (10)$$

## Théorème - Rauh et al. 2022 [1]

Soit l'ellipsoïde  $\mathcal{E}(\boldsymbol{\mu}, \boldsymbol{\Gamma})$  et l'application nonlinéaire  $\mathbf{g}$ . La matrice  $\mathbf{A} = \frac{\partial \mathbf{g}}{\partial \mathbf{x}}(\boldsymbol{\mu})$  est supposée invertible. Un ensemble englobant  $\mathbf{g}(\mathcal{E}(\boldsymbol{\mu}, \boldsymbol{\Gamma}))$  et écrit  $\mathcal{E}(\boldsymbol{\mu}_{\text{out}}, \boldsymbol{\Gamma}_{\text{out}})$  est donnée par

$$\boldsymbol{\Gamma}_{\text{out}} = (1 + \rho) \cdot \mathbf{A} \cdot \boldsymbol{\Gamma} \quad (11)$$

$$\boldsymbol{\mu}_{\text{out}} = \mathbf{g}(\boldsymbol{\mu}) \quad (12)$$

où

$$\rho = \max_{\|\tilde{\mathbf{x}}\| \leq 1} \|\tilde{\mathbf{b}}(\tilde{\mathbf{x}})\| \quad (13)$$

$$\tilde{\mathbf{b}}(\tilde{\mathbf{x}}) = \boldsymbol{\Gamma}^{-1} \cdot \mathbf{A}^{-1} (\mathbf{g}(\boldsymbol{\Gamma} \cdot \tilde{\mathbf{x}} + \boldsymbol{\mu}) - \mathbf{g}(\boldsymbol{\mu})) - \tilde{\mathbf{x}} \quad (14)$$

## Méthode existante - Illustration

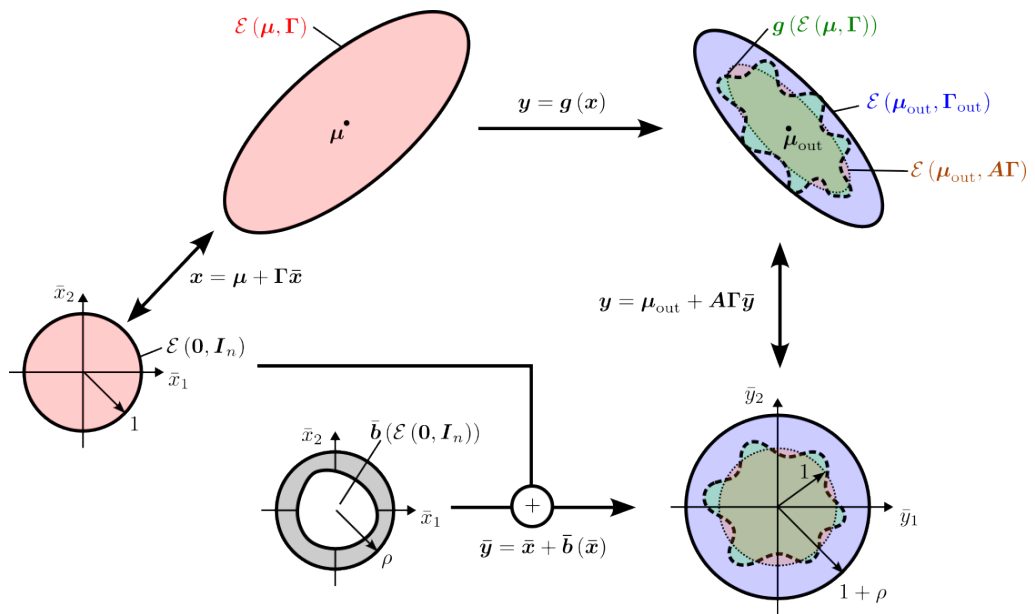


Figure 4: Illustration du théorème

Quand  $\mathbf{A}\Gamma$  n'est pas inversible:

- L'ellipsoïde  $\mathcal{E}(\mu_{\text{out}}, \mathbf{A}\Gamma)$  est *dégénérée*
- Faire gonfler cette ellipsoïde ne garantie plus d'englober  $g(\mathcal{E}(\mu, \Gamma))$

Exemples commun:

- Les projection
- Les frottement visqueux (quadratique)

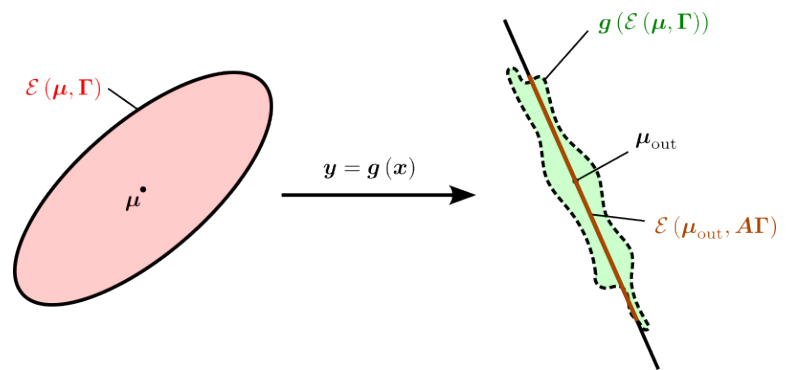


Figure 5: Exemple de singularité

## Singularité - Ellipsoïde dégénérée

Pas de forme quadratique,  $\Gamma$  non inversible mais transformation affine:

$$\mathcal{E}(\mu, \Gamma) = \mu + \Gamma \cdot \mathcal{E}(0, I_n) \quad (15)$$

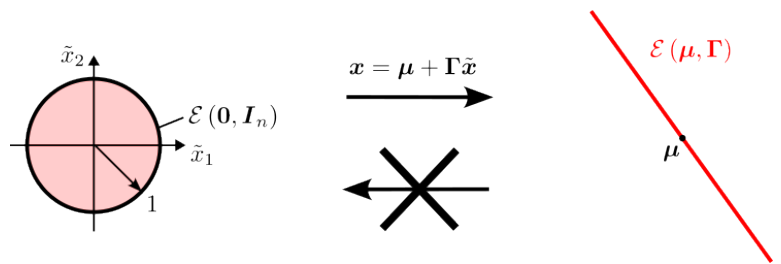


Figure 6: Exemple dégénérée



Partir de  $\mathcal{E}(\mu_{\text{out}}, \mathbf{A}\Gamma)$  pour trouver une ellipsoïde  $\mathcal{E}(\mu_{\text{out}}, \Gamma_s)$  semblable à  $g(\mathcal{E}(\mu, \Gamma))$

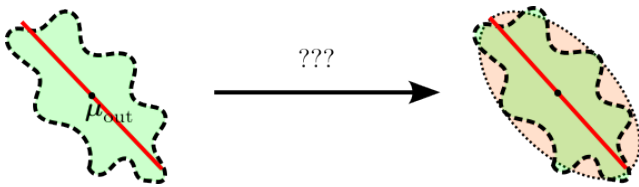


Figure 7: Retrouver les dimensions perdues

Cas particulier, projection planaire : on peut conserver l'ellipsoïde dégénérée  $\mathcal{E}(\mu_{\text{out}}, \mathbf{A}\Gamma)$

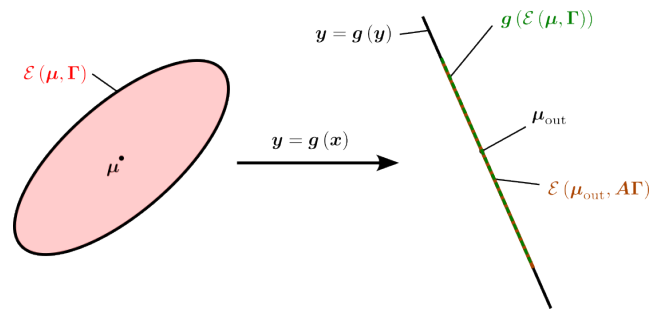


Figure 8: Exemple de projection

## Singularité - Ajouter des valeurs singulières

Décomposition en valeur singulière

$$A\Gamma = U \cdot \Sigma \cdot V^T \quad (16)$$

avec  $U \in \mathbb{R}^{n \times n}$  et  $V \in \mathbb{R}^{n \times n}$  orthonormales et  $\Sigma \in \mathbb{R}^{n \times n}$  diagonale.

Les éléments diagonaux de  $\Sigma$  sont les valeurs singulière  $\sigma_i \geq 0$ .

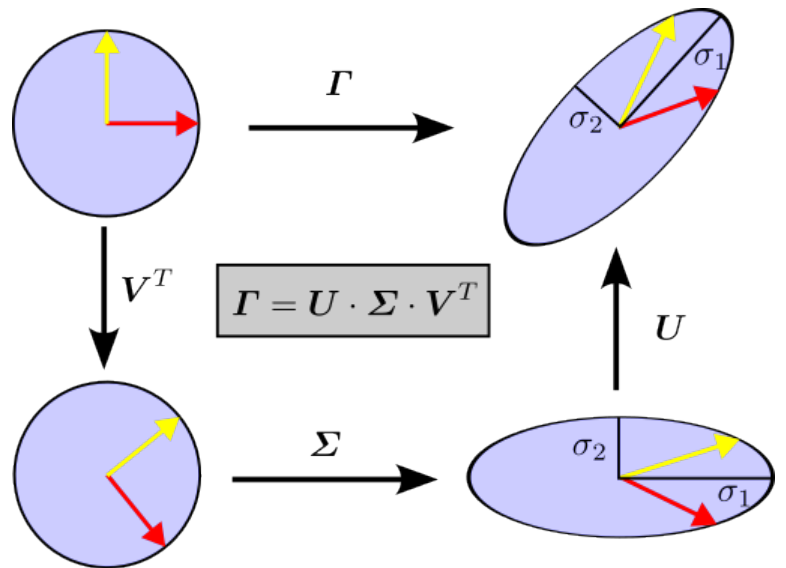


Figure 9: Exemple en dimension 2

## Singularité - Décomposition en valeur singulière

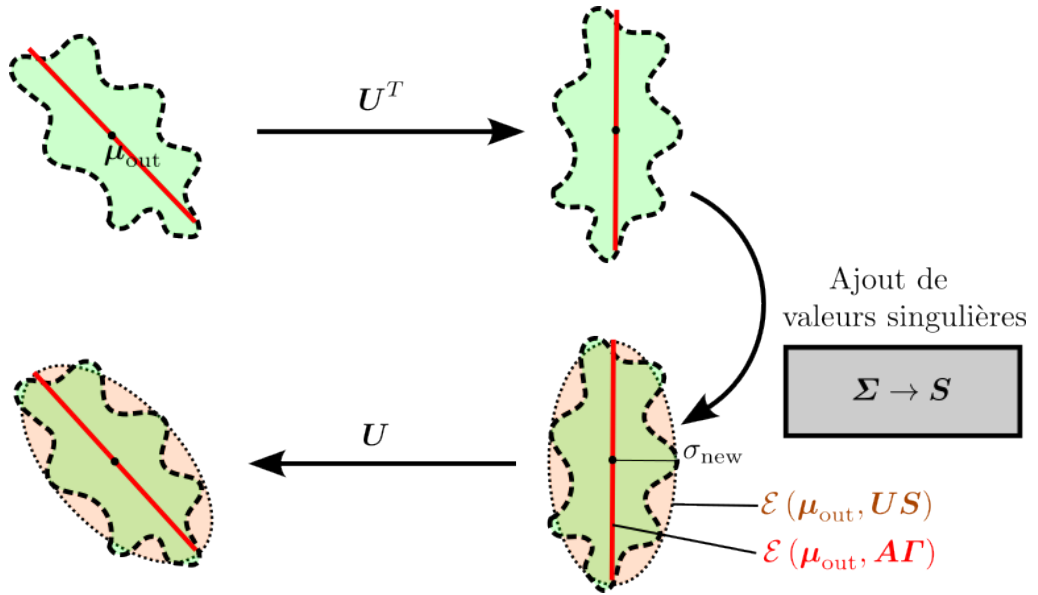


Figure 10: Retrouver la forme de l'ensemble

$\mathcal{E}(\boldsymbol{\mu}_{\text{out}}, \boldsymbol{\Gamma}_{\text{out}})$  est donnée par

$$\boldsymbol{\Gamma}_{\text{out}} = (1 + \rho) \cdot \boldsymbol{\Gamma}_s \quad (17)$$

$$\boldsymbol{\mu}_{\text{out}} = \mathbf{g}(\boldsymbol{\mu}) \quad (18)$$

où

$$\rho = \max_{\|\tilde{\mathbf{x}}\| \leq 1} \left\| \tilde{\mathbf{b}}(\tilde{\mathbf{x}}) \right\| \quad (19)$$

$$\tilde{\mathbf{b}}(\tilde{\mathbf{x}}) = \mathbf{W}(\mathbf{g}(\boldsymbol{\Gamma} \cdot \mathbf{e} + \boldsymbol{\mu}) - \mathbf{g}(\boldsymbol{\mu})) - \mathbf{Z}\tilde{\mathbf{x}} \quad (20)$$

et où les matrices  $\boldsymbol{\Gamma}_s$ ,  $\mathbf{W}$  et  $\mathbf{Z}$  de  $\mathbb{R}^{n \times n}$  sont données par:

- (Cas général), si  $\mathbf{A}\boldsymbol{\Gamma}$  est inversible, alors

$$\boldsymbol{\Gamma}_s = \mathbf{A}\boldsymbol{\Gamma} \quad (21)$$

$$\mathbf{W} = \boldsymbol{\Gamma}_s^{-1} \quad (22)$$

$$\mathbf{Z} = \mathbf{I}_n \quad (23)$$

## Singularité - Solution proposée

- (Cas singulié), si  $\mathbf{A}\Gamma$  est non inversible, alors

$$\Gamma_s = \mathbf{U}\mathbf{S} \quad (24)$$

$$\mathbf{W} = \mathbf{S}^* \mathbf{U}^T \quad (25)$$

$$\mathbf{Z} = \mathbf{S}^* \mathbf{S} \mathbf{V}^T \quad (26)$$

avec les matrices diagonales

$$\mathbf{S} = \text{diag}(\mathbf{s}_1, \mathbf{s}_2, \dots, \mathbf{s}_n) \quad (27)$$

$$\mathbf{S}^* = \text{diag}(\mathbf{s}_1^*, \mathbf{s}_2^*, \dots, \mathbf{s}_n^*) \quad (28)$$

où

$$\mathbf{s}_i = \begin{cases} \sigma_i & \text{if } \sigma_i > 0 \\ \max_{\mathbf{x} \in \mathcal{E}(\boldsymbol{\mu}, \Gamma)} \left| \mathbf{e}_i^T \mathbf{U}^T (\mathbf{g}(\mathbf{x}) - \mathbf{g}(\boldsymbol{\mu})) \right| & \text{if } \sigma_i = 0 \end{cases}$$

$$\mathbf{s}_i^* = \begin{cases} 1/\mathbf{s}_i & \text{if } \mathbf{s}_i \neq 0 \\ 0 & \text{else} \end{cases} \quad (29)$$

## Singularité - Solution proposée

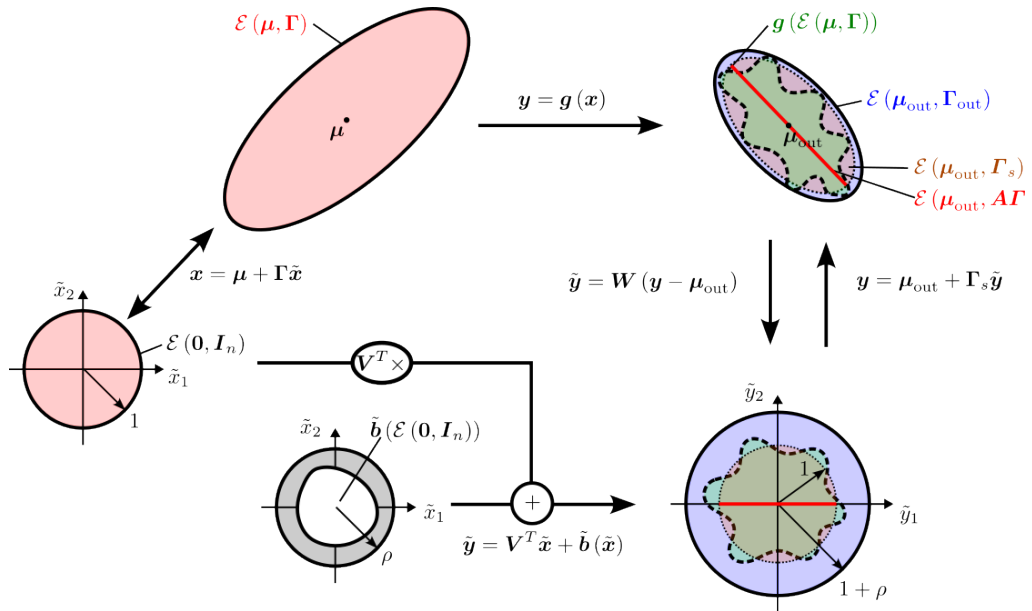


Figure 11: Retrouver la forme de l'ensemble

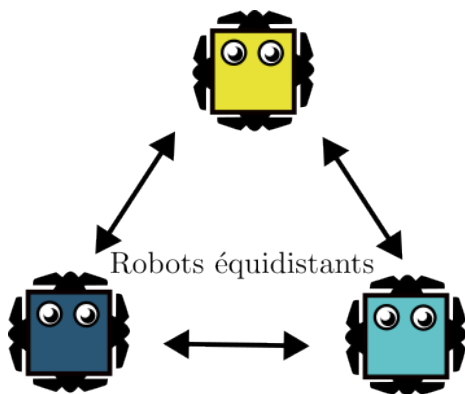


Figure 12: Exemple de formation par consensus

Système de trois agent continus avec mesure de position périodique:

$$\dot{x}_i = v_i, \quad (30)$$

$$\dot{v}_i = u_i, \quad (31)$$

$$y_{i,k} = x_i(t_k), \quad (32)$$

$$t_k = k \cdot \delta_t \quad (33)$$

avec  $i \in \mathcal{I}_3$ ,  $\mathcal{I}_3 = \{1, 2, 3\}$ ,  $k \in \mathbb{N}$ ,  $x_i \in \mathbb{R}$ ,  $v_i \in \mathbb{R}$ ,  $u_i \in \mathbb{R}$  et la période entre chaque mesure  $\delta_t > 0$

On cherche à obtenir un consensus

$$\lim_{t \rightarrow \infty} \|x_i(t) - x_j(t)\| = 0, \quad (34)$$

$$\lim_{t \rightarrow \infty} \|v_i(t) - v_j(t)\| = 0 \quad (35)$$

pour tous  $i, j \in \mathcal{I}_3$

**Consensus protocol [Zheng et al.] [2]:**

$$\dot{u}_i(t) = \sum_{j \neq i} (y_{j,k} - x_i(t)) - c \cdot v_i(t), \quad t \in (t_k, t_k + 1] \quad (36)$$

avec le gain de feedback  $c > 0$ .



## Application - Propagation

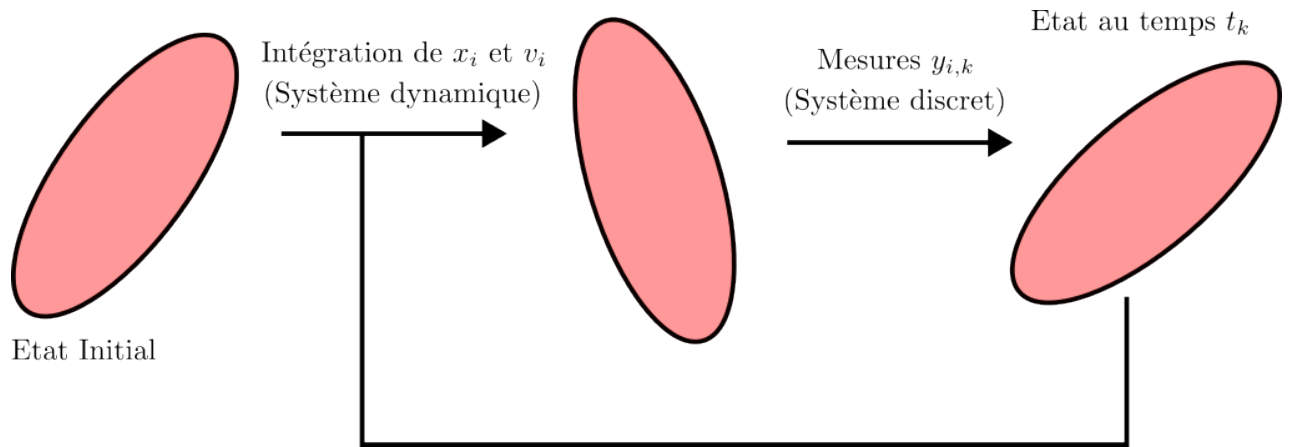


Figure 13: Processus de propagation

### Vecteur d'état

$$\mathbf{z} = [z_i]_{i \in [1,9]}, \quad (37)$$

$$z_1(t) = x_2(t) - x_1(t), \quad (38)$$

$$z_2(t) = v_2(t) - v_1(t), \quad (39)$$

$$z_3(t) = x_3(t) - x_1(t), \quad (40)$$

$$z_4(t) = v_3(t) - v_1(t), \quad (41)$$

$$z_5(t) = x_3(t) - x_2(t), \quad (42)$$

$$z_6(t) = v_3(t) - v_2(t), \quad (43)$$

$$z_{7,k} = y_{2,k} - y_{1,k}, \quad (44)$$

$$z_{8,k} = y_{3,k} - y_{1,k}, \quad (45)$$

$$z_{9,k} = y_{3,k} - y_{2,k}. \quad (46)$$

### Etat initial

$$\|\mathbf{z}(0)\| < e, \quad (47)$$

$$z_{6+j,0} = z_j(0), \text{ pour } j \in [1 : 3] \quad (48)$$

avec  $e > 0$ , équivalent à  $\mathbf{z}(0) \in \mathcal{E}(0, \Gamma_0)$   
avec la matrice singulière

$$\Gamma_0 = e \cdot \begin{bmatrix} & & \mathbf{I}_6 & & & & \mathbf{0}_{6,3} \\ 1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & \\ 0 & 0 & 1 & 0 & 0 & 0 & \mathbf{0}_{3,3} \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 1 & 0 & \end{bmatrix} \quad (49)$$

Cause de singularité:

- L'état initial est une ellipse dégénérée
- Les mesures sont des projections linéaires

Par propagation de l'ellipse dégénérée, on peut trouver une matrice  $\mathbf{I}_{t_{\text{end}}}$  tel que

$$\mathbf{z}(t_{\text{end}}) \in \mathcal{E}(0, \mathbf{I}_{t_{\text{end}}}) \quad (50)$$

avec  $t_{\text{end}} > 0$

On peut alors vérifier que le système se contracte

$$t_{\text{end}} > 0, \mathcal{E}(0, \mathbf{I}_{t_{\text{end}}}) \subseteq \mathcal{E}(0, \mathbf{I}_0) \quad (51)$$

## Conclusion

Le calcul englobant de l'image ellipsoïdale dans le cas singulier permet de

- prendre en compte des ellipses dégénérées
- étudier des systèmes avec des projections et autres applications singulières

Cet outils me permettra d'étudier la stabilité de systèmes hybrides non-linéaires de grande dimensions.



Andreas Rauh and Luc Jaulin.

A computationally inexpensive algorithm for determining outer and inner enclosures of nonlinear mappings of ellipsoidal domains.

*International Journal of Applied Mathematics and Computer Science*, 31(3):399–415, 2021.



Yuanshi Zheng, Qi Zhao, Jingying Ma, and Long Wang.

Second-order consensus of hybrid multi-agent systems.

*Systems & Control Letters*, 125:51–58, March 2019.