Bijections entres intervalles de Tamari et cartes planaires

Sujet proposé par Éric Fusy (CR CNRS au LIX, équipe de combinatoire, École Polytechnique)

Des transparents de présentation du sujet sont disponibles à l'adresse
`http://www.lix.polytechnique.fr/Labo/Eric.Fusy/Talks/sujet_stage_mpri.pdf`

Le treillis de Tamari est l'ordre partiel sur les arbres binaires induit par les opérations de rotation utilisées dans un contexte algorithmique pour équilibrer les arbres binaires de recherche. Ce treillis a de riches propriétés combinatoires, en particulier il a été montré par Chapoton [3] que le nombre I_n d'intervalles dans le treillis de taille n (i.e., le nombre de paires t, t' d'arbres binaires à n noeuds tel que $t \leq t'$ dans le treillis) est donné par la formule

$$I_n = \frac{2}{n(n+1)}\binom{4n+1}{n-1}.$$

La combinatoire des intervalles de Tamari est un domaine de recherche très actif depuis, et de nombreuses très jolies formules ont été découvertes : généralisation aux treillis de m-Tamari [2], formules dans le cadre étiqueté [1],...

De manière assez surprenante a priori, certaines de ces formules peuvent s'établir par des liens bijectifs avec des familles de cartes planaires. En particulier Bernardi et Bonichon ont introduit une bijection entre les triangulations (à n sommets internes) et les intervalles de Tamari de taille n.

Récemment Préville-Ratelle et Viennot [6] ont donné une extension très générale des treillis de Tamari, appelés v-Tamari, où v est un mot dans $\{N, E\}^n$, et l'ensemble sous-jacent au treillis est celui des mots sur $\{N, E\}^n$ dont le chemin associé (en interprétant N comme pas nord et E comme pas est) est au dessus de v. On retrouve le treille de Tamari classique en prenant pour v le mot $NE \ldots NE$. Fang et Préville-Ratelle [4] ont montré tout récemment que le nombre total d'intervalles de v-Tamari, sommé sur tous les mots de longueur n, est égal à

$$\frac{2(3n+3)!}{(n+2)!(2n+3)!}$$

qui est le nombre de cartes non séparables à $n+2$ arêtes. Ils donnent une preuve de leur résultat par séries génératrices et une autre sous forme d'une bijection avec les cartes non séparables reposant sur un codage parallèle par certaines structures d'arbres DFS.

Dans ce stage, on s'intéressera à la possibilité de donner une preuve bijective de ce résultat par une approche à la Bernardi-Bonichon. Il s'agirait ici d'examiner les bijections entre triplets de chemins non intersectants [5] (dont les intervalles de v-Tamari sont des cas particuliers) et structures dites de Baxter (notamment les orientations bipolaires planes), et déterminer si les structures de Baxter dites minimales s'envoient bien sur les intervalles de v-Tamari. Une telle approche permettrait à la fois de généraliser la bijection de Bernardi et Bonichon, et d'offrir une preuve bijective plus simple du résultat de Fang et Préville-Ratelle.

Dans la même veine, on pourra aussi examiner si une approche de type Bernardi-Bonichon pourrait permettre d'établir un lien bijectif direct entre les cartes biparties et les intervalles de Tamari dit “nouveaux”, introduits également par Chapoton dans [3] (voir aussi les transparents à l'adresse http ://www.lix.polytechnique.fr/Labo/Eric.Fusy/Talks/Tamaris.pdf).

Références

[1] Mireille Bousquet-Mélou, Guillaume Chapuy, and Louis-François Préville-Ratelle. The representation of the symmetric group on m-tamari intervals. *Advances in Mathematics*, 247 :309–342, 2013.

[2] Mireille Bousquet-Mélou, Eric Fusy, and Louis-François Préville Ratelle. The number of intervals in the m-tamari lattices. *Electronic Journal of Combinatorics*, 18(2) :research–paper, 2012.

[3] F Chapoton. Sur le nombre d'intervalles dans les treillis de tamari. *Séminaire Lotharingien de Combinatoire*, 55 :B55f, 2006.

[4] Wenjie Fang and Louis-François Préville-Ratelle. The enumeration of generalized tamari intervals. *European Journal of Combinatorics*, 61 :69–84, 2017.

[5] Stefan Felsner, Éric Fusy, Marc Noy, and David Orden. Bijections for baxter families and related objects. *Journal of Combinatorial Theory, Series A*, 118(3) :993–1020, 2011.

[6] Louis-François Préville-Ratelle and Xavier Viennot. The enumeration of generalized tamari intervals. *Transactions of the American Mathematical Society*, 369(7) :5219–5239, 2017.