

# MÉMOIRE DE DEA

Entrelacs, cartes et polytopes : énumération en  
tenant compte des symétries

Eric FUSY

Directeur : Gilles Schaeffer

Filière : Combinatoire

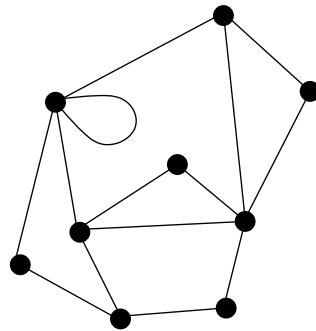
Laboratoire : LIX

# Plan

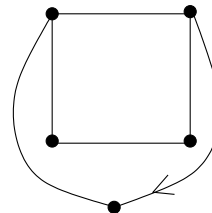
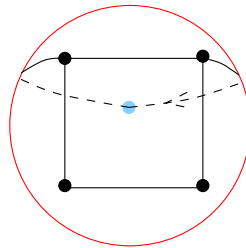
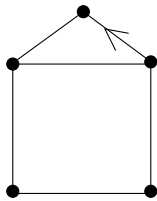
- Énumération des cartes 2-connexes et 3-connexes non enracinées sur la sphère
- Étude des symétries des entrelacs premiers alternés
- Codage des cartes à l'aide d'arbres : présentation de deux bijections

# Définitions générales sur les cartes

**Carte non enracinée sur la sphère** : plongement d'un graphe non étiqueté sur la sphère à déformation continue près



**Carte enracinée sur la sphère** : plongement sur la sphère d'un graphe non étiqueté dont une demi-arête est marquée

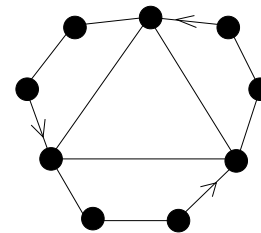


## Énumération des cartes 2-connexes et 3-connexes non enracinées

- **Carte 2-connexe** : carte sans boucle telle qu'il faut lui enlever au moins deux sommets pour la déconnecter
- **Carte 3-connexe** : carte sans boucle sans arête multiple telle qu'il faut lui enlever au moins trois sommets pour la déconnecter

# Formule d'énumération de cartes non enracinées comptées par nombre d'arêtes

**Définition :** Une carte  $k$ -enracinée est une carte ayant  $k$  racines indistinguables.



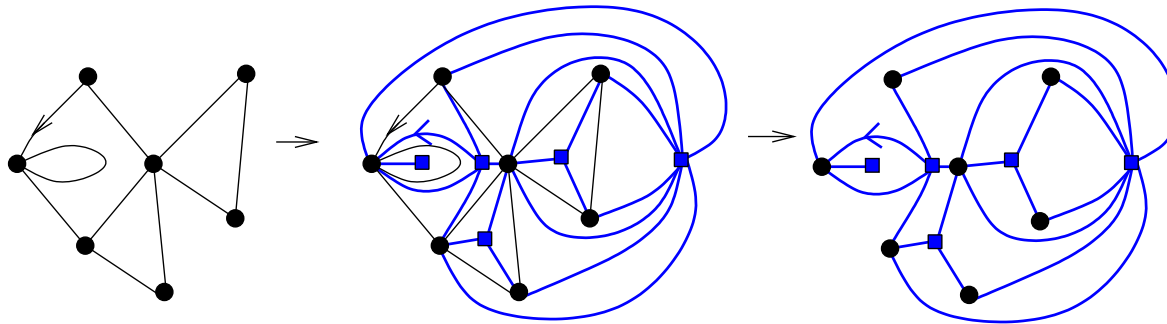
carte 3-enracinée

**Formule :** Soit  $\mathcal{C}$  une famille de cartes (par exemple les cartes 2-connexes). On note  $c_n$  le nombre de cartes non enracinées de  $\mathcal{C}$  à  $n$  arêtes,  $c'_n$  le nombre de cartes enracinées de  $\mathcal{C}$  à  $n$  arêtes,  $c_n^{(k)}$  le nombre de cartes  $k$ -enracinées de  $\mathcal{C}$  à  $n$  arêtes.

$$c_n = \frac{1}{2n} \left( c'_n + \sum_{k \geq 2} \phi(k) c_n^{(k)} \right)$$

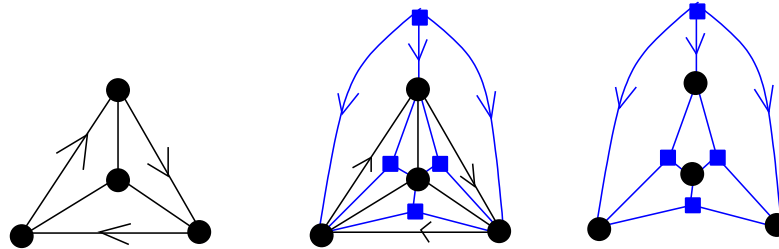
# Bijection entre cartes à $n$ arêtes et quadrangulations à $n$ faces

On met un sommet dans chaque face de la carte. On relie par une arête un sommet de la carte et un sommet au milieu d'une face si le sommet est incident à la face. A la fin, on enlève les arêtes de la carte de départ.



# Propriétés de la bijection

- Cette application met en bijection les cartes 2-connexes enracinées et les quadrangulations sans arête multiples (dites simples) enracinées
- Cette application met en bijection les cartes 3-connexes enracinées et les quadrangulations enracinées sans 4-cycle séparateur dites irréductibles (tout 4-cycle délimite une face)
- En général, cette application met en bijection les cartes  $k$ -enracinées et les quadrangulations  $k$ -enracinées dont les  $k$  racines sont incidentes à des sommets de même couleur



## On se ramène aux quadrangulations

- Pour énumérer les cartes 2-connexes non enracinées à  $n$  arêtes, il suffit de savoir énumérer les quadrangulations  $k$ -enracinées sans arête multiple à  $n$  faces.
- Pour énumérer les cartes 3-connexes non enracinées à  $n$  arêtes, il suffit de savoir énumérer les quadrangulations  $k$ -enracinées irréductibles à  $n$ .

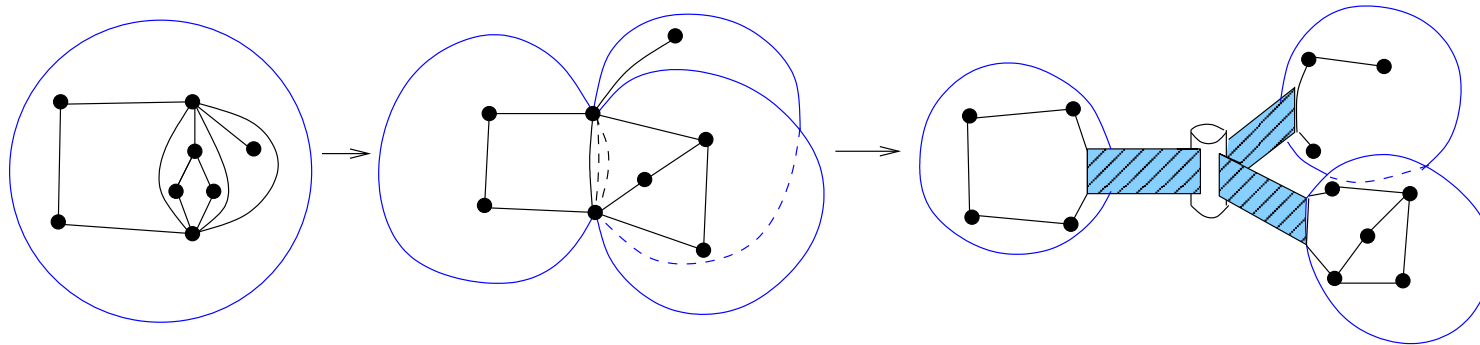


# Décomposition en arbre d'une quadrangulation quelconque

- Décomposition par arêtes multiples d'une quadrangulation quelconque en un arbre avec des nœuds qui sont des quadrangulations simples et des nœuds qui représentent des arêtes multiples
- On se sert de cette décomposition en arbre pour obtenir les SG des quadrangulations simples  $k$ -enracinées à partir des SG des quadrangulations quelconques  $k$ -enracinées (que l'on connaît)

# Exemple de décomposition en arbre d'une quadrangulation au niveau d'une arête triple

Déformation de la quadrangulation pour en faire un arbre

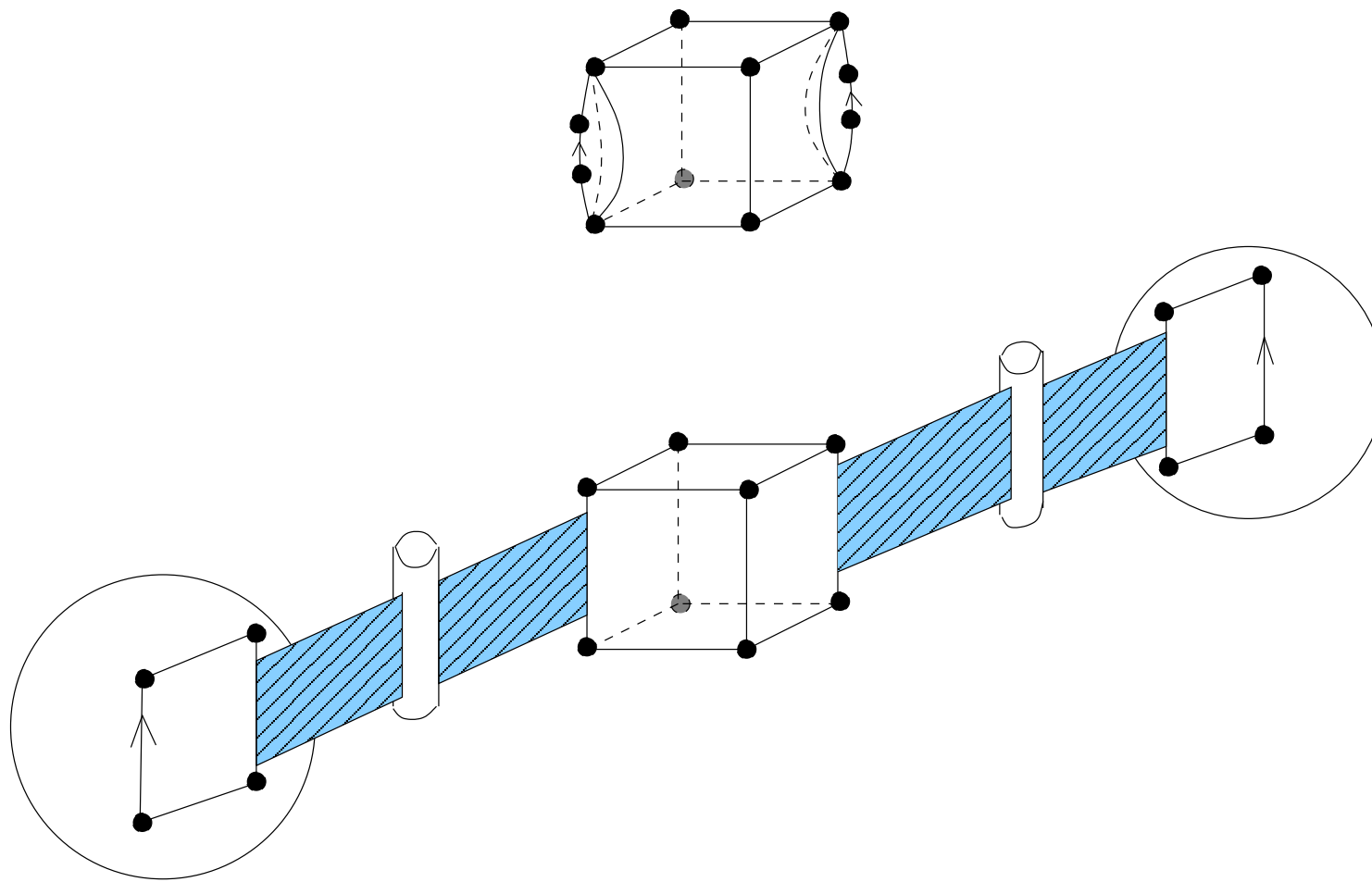


## Passage des quadrangulations quelconques $k$ -enracinées aux quadrangulations simples $k$ -enracinées

La symétrie de la  $k$ -racine (rotation d'ordre  $k$ ) induit une symétrie sur l'arbre qui laisse le centre de l'arbre invariant. Deux cas se présentent :

- Le centre de l'arbre est un nœud de type quadrangulation simple
- Le centre de l'arbre est un nœud de type arête multiple

# Exemple de répercussion de la symétrie sur un nœud de l'arbre de type quadrangulation simple



## On obtient les quadrangulations simples $k$ -enracinées

Equation obtenue :

$$F_{vv}^{(k)}(z) = zf'(z) \frac{1}{1-f(z)} + \left( \frac{z}{1-f(z)} \right)' (1-f(z)) g_{vv}^{(k)} \left( \frac{z}{1-f(z)} \right)$$

On connaît toutes les SG de l'équation sauf  $g_{vv}^{(k)} \left( \frac{z}{1-f(z)} \right)$ . On déduit de l'équation  $g_{vv}^{(k)} \left( \frac{z}{1-f(z)} \right)$  puis  $g_{vv}^{(k)}(x)$  en faisant le changement de variable  $x = \frac{z}{1-f(z)}$

# Récapitulatif

Cartes non enracinées 2-connexes



Burnside

Cartes  $k$ -enracinées 2-connexes



Tutte

Quadrangulations simples  $k$ -enracinées



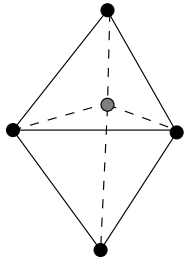
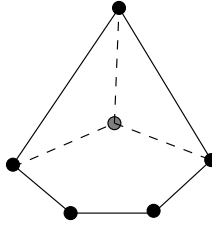
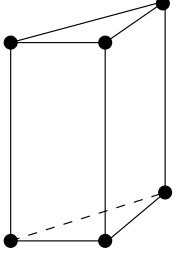
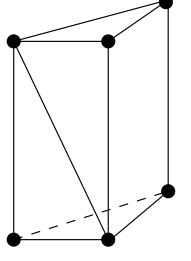
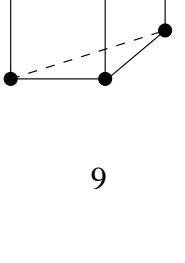
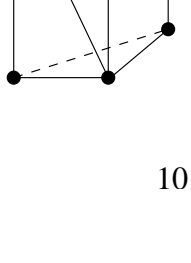
Arbre de décomposition

Equation entre SG des quadrangulations simples  
 $k$ -enracinées et SG des quadrangulations quelconques  
 $k$ -enracinées donnée par Liskovets

On obtient les cartes 2-connexes non enracinées  
(déjà obtenues par Liskovets)

n	$c_n$		
1	2	9	596
3	2	10	2605
4	3	11	12098
5	6	12	59166
6	16	13	297684
7	42	14	1538590
8	151		

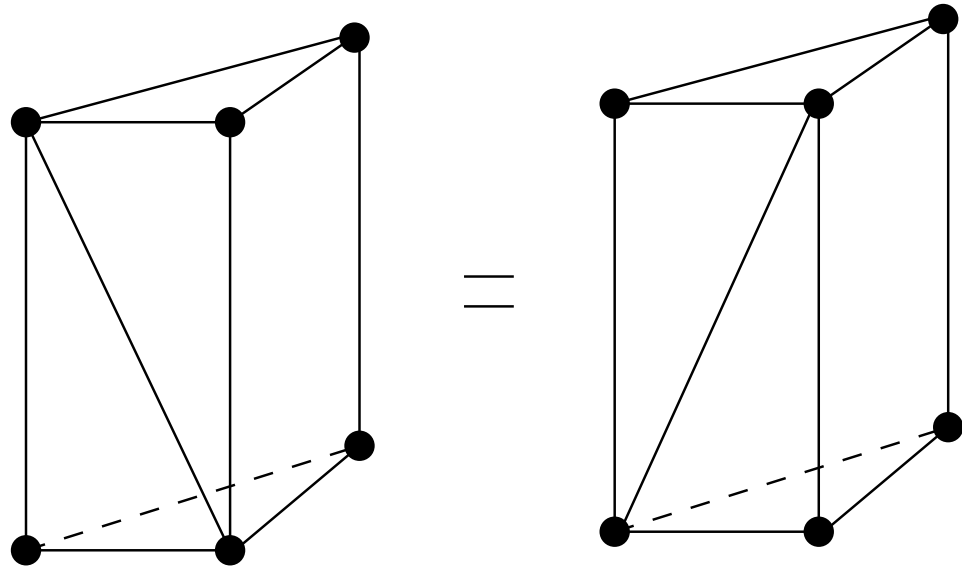
Méthode analogue : on obtient les cartes 3-connexes non enracinées (appelées aussi polytopes) comtées par nombre d'arêtes (cf Walsh)

$n$	$d_n$	
6	1	
7	0	
8	1	
9	2	
10	3	
11	4	
12	15	



## Cas à réflexion près

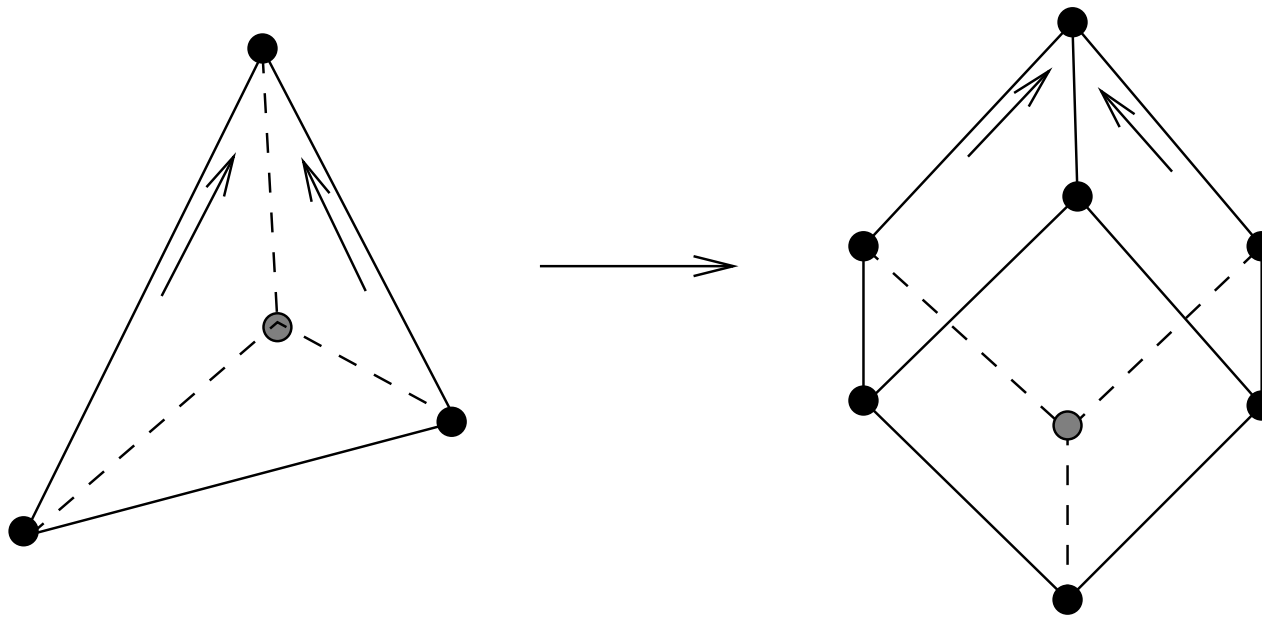
Il faut avoir



- Les cartes 3-connexes à tout automorphisme près (déformation continue + éventuelle réflexion) correspondent aux graphes 3-connexes non étiquetés (Whitney)
- On a une formule pour obtenir les cartes à tout automorphisme près en fonction des cartes  $k$ -enracinées orientées et non orientées

# Exemple

Une carte 2-enracinée de type réflexion et la quadrangulation 2-enracinée associée



## Etat d'avancement sur les cartes à réflexion près

- Pas d'article publié sauf Wormald pour les cartes quelconques
- Il faut utiliser des SG compliquées (4 variables) pour énumérer les quadrangulations simples de type réflexion
- Il est en revanche possible d'utiliser la deuxième décomposition en arbre pour mettre en relation la SG des quadrangulations simples 2-enracinées de type réflexion avec la SG des quadrangulations irréductibles 2-enracinées de type réflexion.
- Pour le moment, algorithme polynomial pas très rapide pour énumérer les graphes 3-connexes.

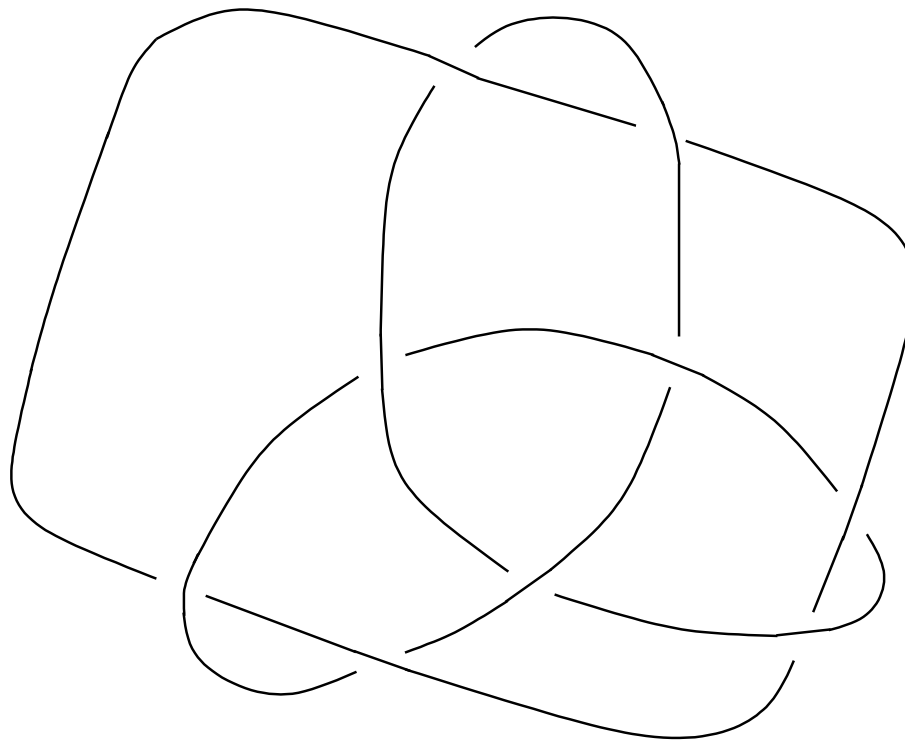
# Etude des symétries des entrelacs premiers alternés

**Nœud** : plongement injectif du cercle dans l'espace à déformation continue près

**Entrelacs** : plongement injectif de plusieurs exemplaires du cercle dans l'espace à déformation continue près = plusieurs nœuds emmêlés

## Diagramme d'un entrelacs

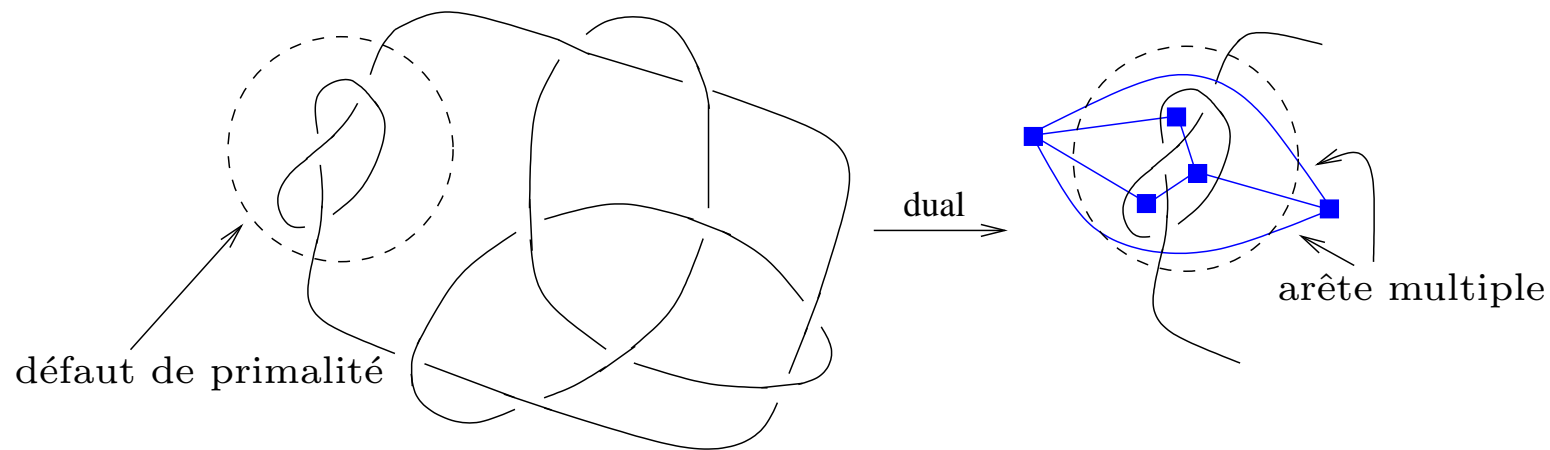
En projetant un entrelacs connexe sur le plan  $z = 0$ , on obtient une carte tétravalente où chaque sommet porte l'information indiquant quel brin passe au dessus de quel autre : on appelle une telle figure un diagramme d'entrelacs



# Diagramme premier alterné

Un diagramme premier alterné est un diagramme alterné sans défaut de primalité.

**Remarque :** Pas de défaut de primalité  $\sim$  quadrangulation duale sans arête multiple



Un entrelacs premier alterné à  $n$  croisements est un entrelacs tel qu'il existe une manière de le projeter qui en fait un diagramme premier alterné à  $n$  sommets (définition licite)

## Combinatoire sur les entrelacs premiers alternés

- Compter les entrelacs premiers alternés à  $n$  croisements revient à compter des classes d'équivalence de quadrangulations à  $n$  faces sans arête multiple.
- Comme sur les cartes, on peut enraciner les entrelacs pour rendre l'énumération plus facile. On compte des classes d'équivalence de quadrangulations enracinées sans arête multiple.
- En gros, un entrelacs a une symétrie si, en l'enracinant en deux endroits différents, on obtient le même entrelacs enraciné.

## Combinatoire sur les entrelacs premiers alternés

**Théorème** La proportion d'entrelacs premiers alternés à  $n$  croisements ayant une symétrie est exponentiellement négligeable, i.e. il existe  $0 < d < 1$  et une constante  $C$  tel que le rapport entre le nombre d'entrelacs à  $n$  croisements admettant une symétrie et le nombre d'entrelacs à  $n$  croisements est plus petite que  $C \cdot d^n$ .

Démonstration de l'article de Sébastien Kunz-Jacques et Gilles Schaeffer reprise et rendue rigoureuse.

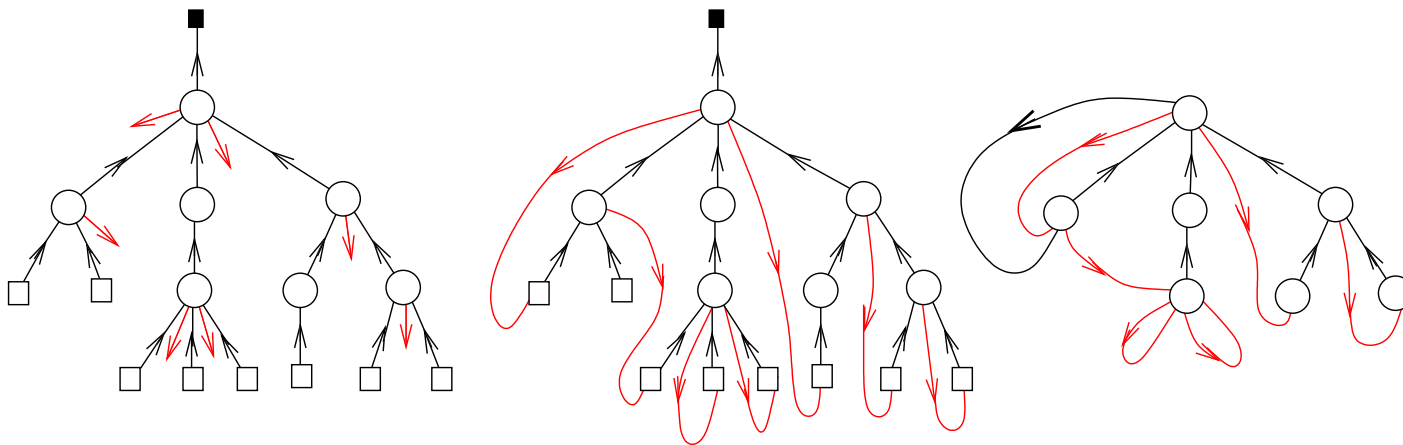


## Codage des cartes avec des arbres

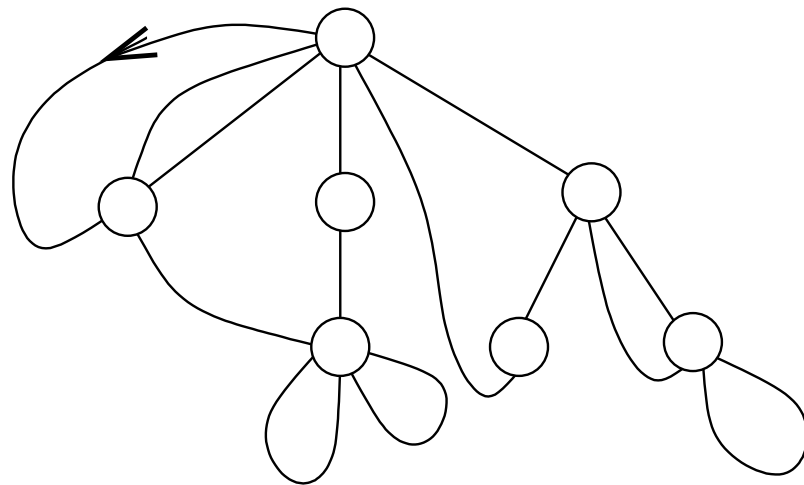
- Bijection entre arbres bourgeonnants avec degrés prédéterminés et cartes eulériennes enracinées avec degrés prédéterminés : nouvelle façon de voir l'algorithme (dit d'ouverture) qui associe un arbre bourgeonnant à partir d'une carte eulérienne enracinée
- Nouvelle bijection entre quadrangulations simples enracinées et une famille d'arbres bourgeonnants (avec Dominique Poulalhon)

Les deux bijections se ressemblent beaucoup : utilisation de la théorie des  $\alpha$  – *orientations* et même algorithme de clôture et d'ouverture.

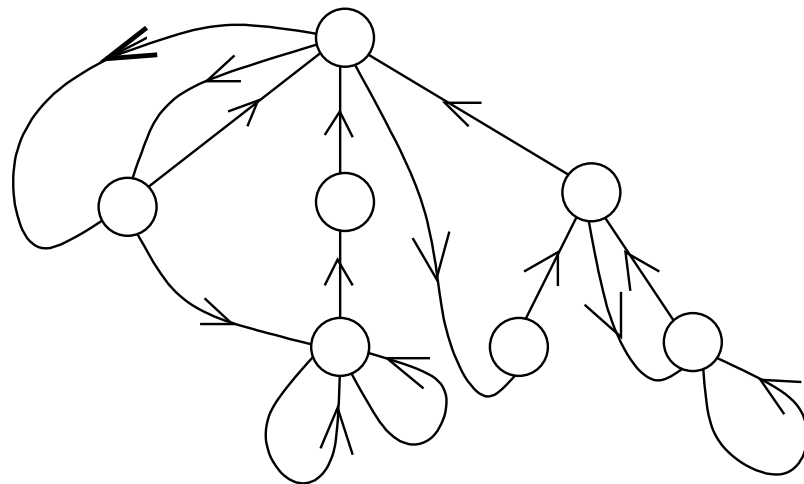
# Bijection avec les cartes eulériennes : algorithme de clôture



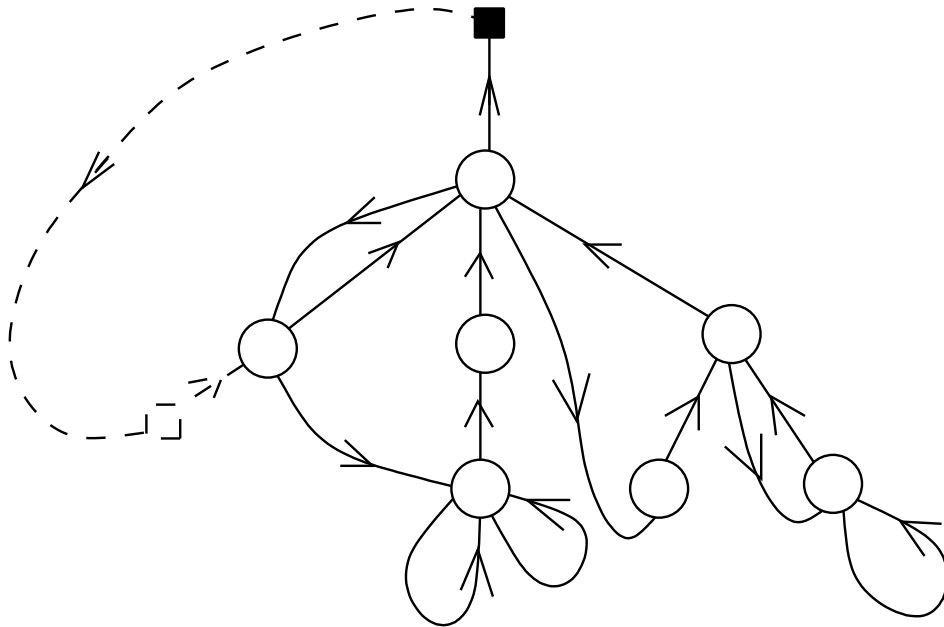
# Ouverture d'une carte eulérienne



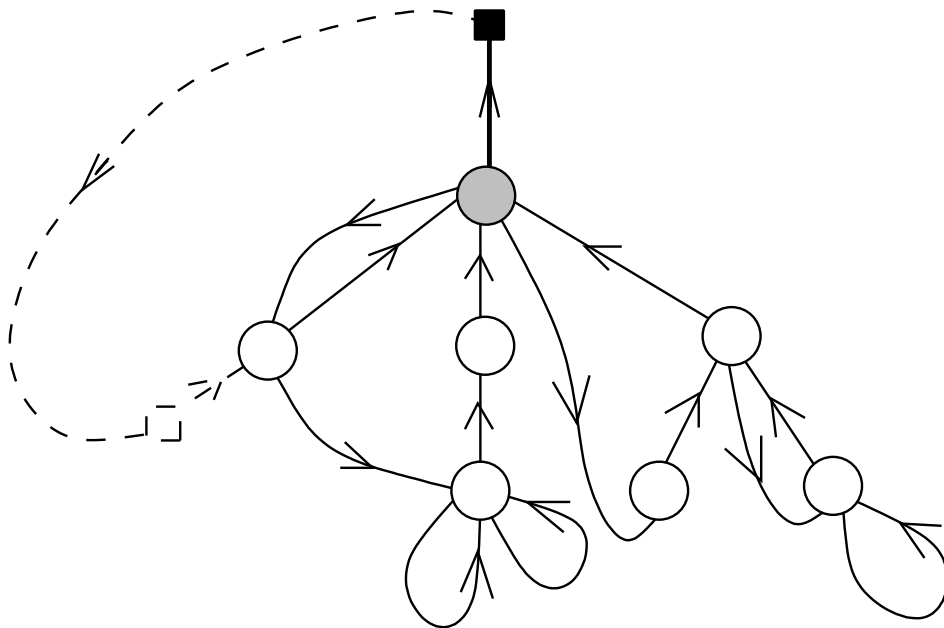
# Ouverture d'une carte eulérienne



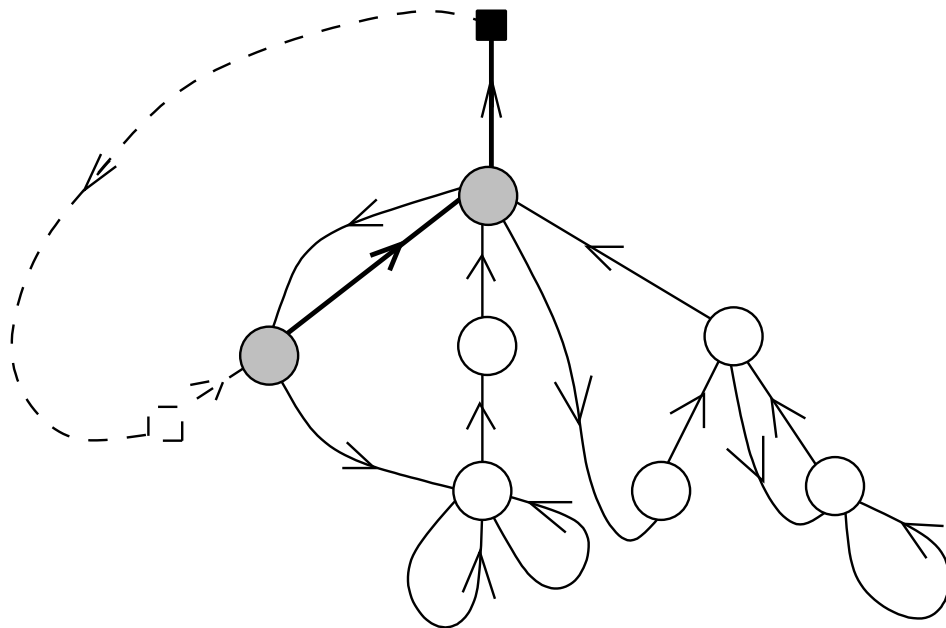
# Ouverture d'une carte eulérienne



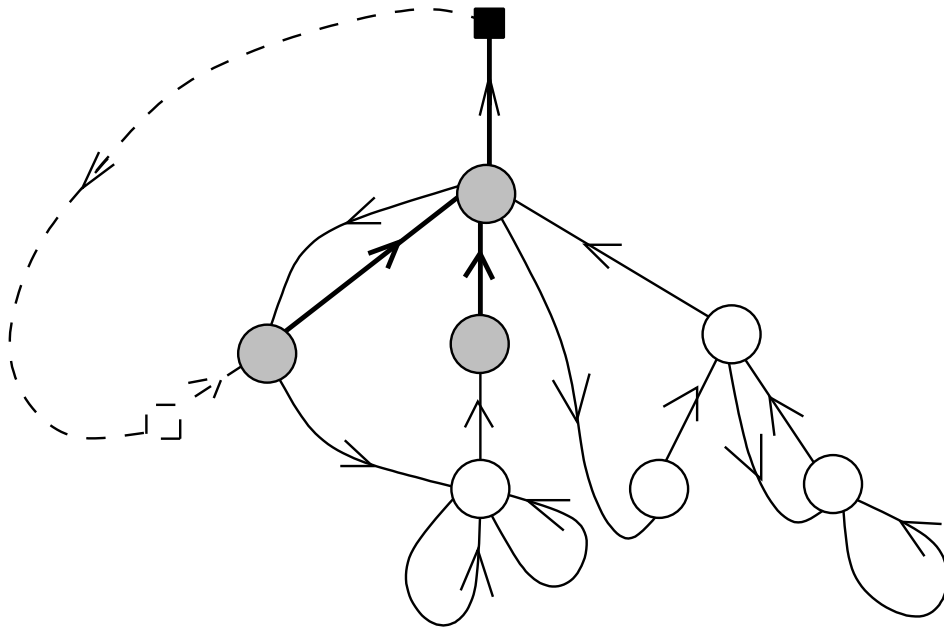
# Ouverture d'une carte eulérienne



# Ouverture d'une carte eulérienne

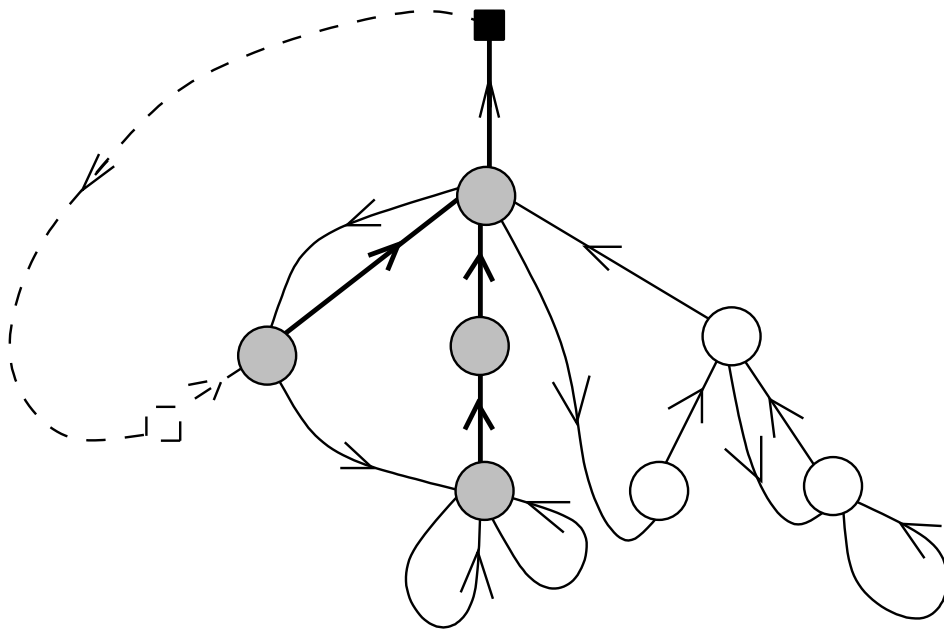


# Ouverture d'une carte eulérienne

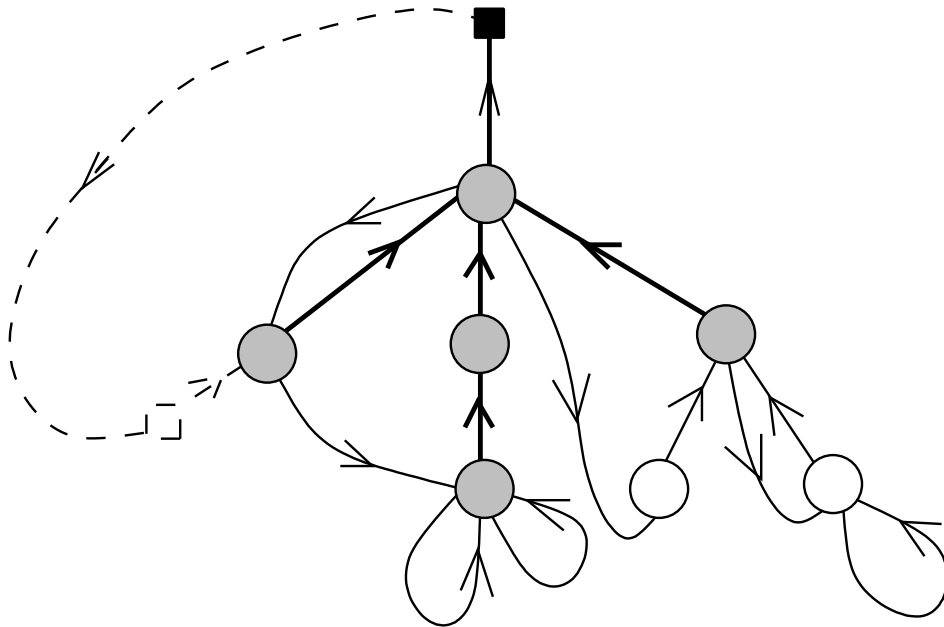




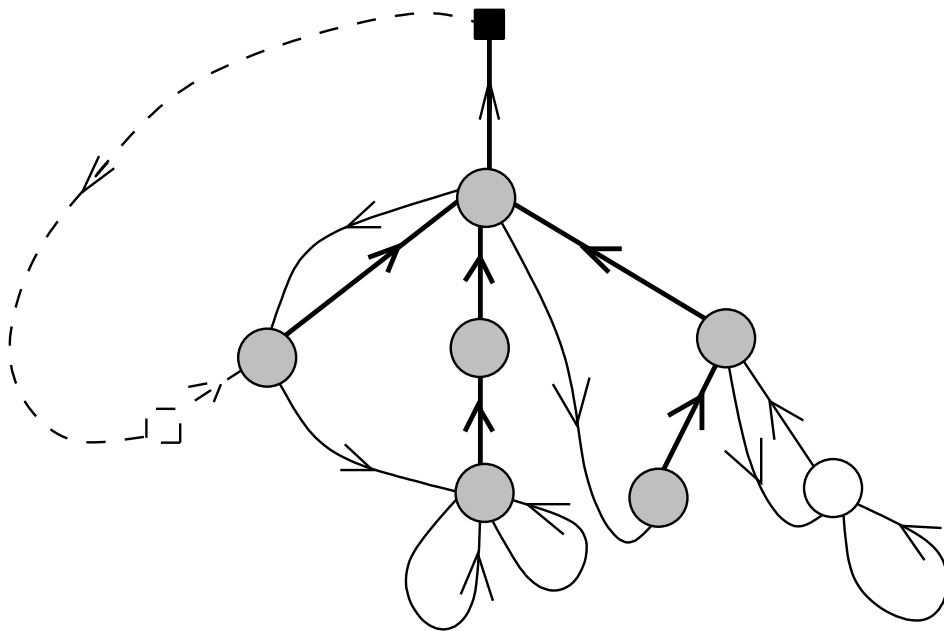
# Ouverture d'une carte eulérienne



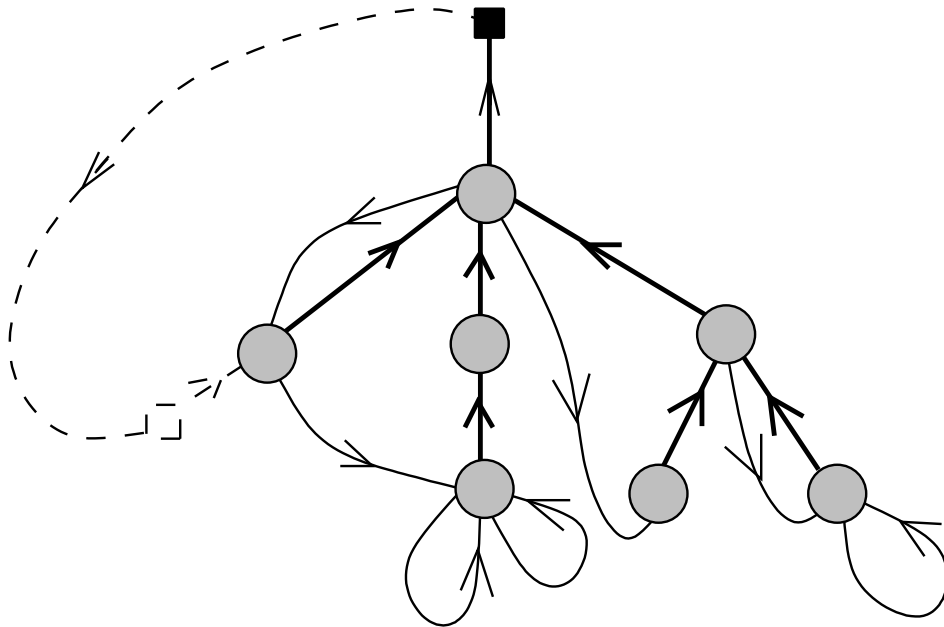
# Ouverture d'une carte eulérienne



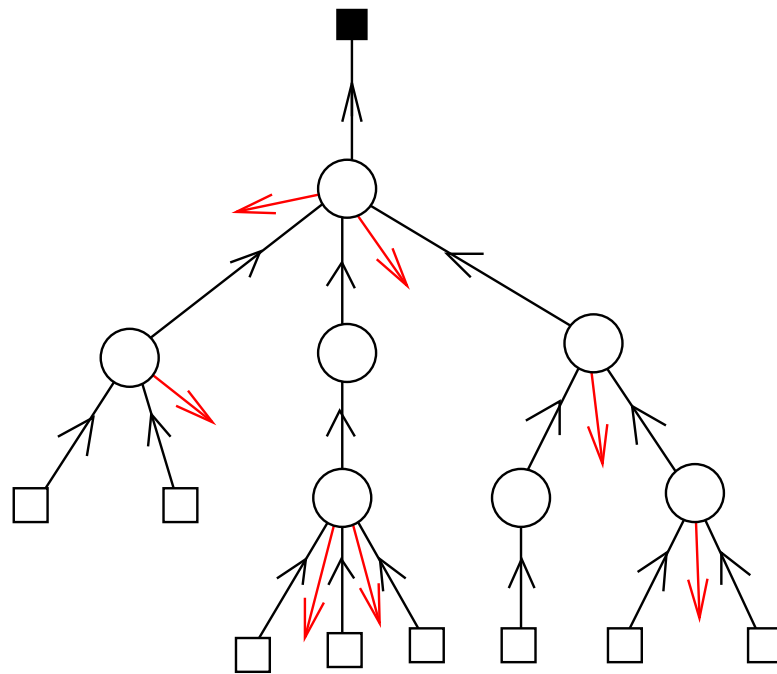
# Ouverture d'une carte eulérienne



# Ouverture d'une carte eulérienne

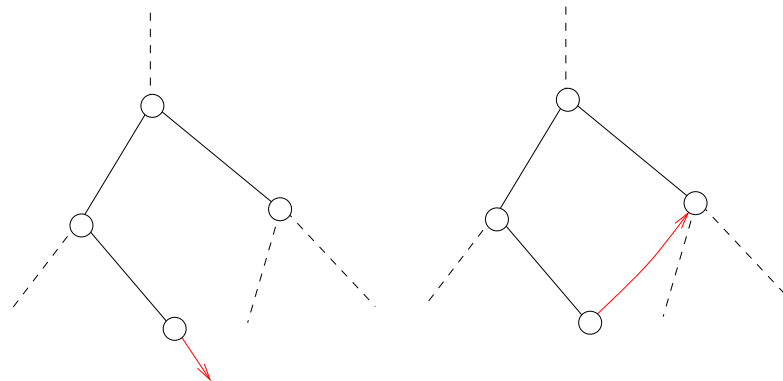


# Ouverture d'une carte eulérienne



# Bijection entre quadrangulations sans arête multiple et une famille d'arbres bourgeonnants : algorithme de clôture

- Arbres bourgeonnant : arbres plans dont chaque nœud a un bourgeon sortant.
- Opération de clôture :



- On achève la clôture en créant deux sommets dans la face infinie et en fusionnant les bourgeons non encore appariés avec un de ces deux sommets.

# Exemple de clôture

