Les catégories ayant au plus 3 morphismes

Emmanuel Haucourt

Décembre 2008

1 Quelques remarques préalables

Une catégorie n'est pas nécessairement isomorphe à son opposée, néanmoins, lorsque deux catégories sont opposées l'une de l'autre, on ne fera figurer qu'une seule d'entre elles dans la liste.

Dans le cadre de la théorie des catégories, la convention d'écriture la plus répandue comprend $g \circ f$ comme la composition du morphisme f suivi de g et n'existe donc que lorsque $\mathsf{s}(g) = \mathsf{t}(f)$ conformément au diagramme suivant

$$\begin{tikzcd} \cdot \arrow[r, "f"'] \arrow[rr, bend left, "g\circ f"] & \cdot \arrow[r, "g"'] & \cdot \end{tikzcd}$$

L'application qui a tout objet associe son identité est une injection de l'ensemble des objets dans l'ensemble des morphismes. En conséquence une catégorie a toujours au moins autant de morphismes que d'objets.

Le produit Cartésien et la somme sont associatives et commutatives à isomorphisme près[1] et pour toutes catégories finies, on a les formules

$$\mathsf{Card}\big(\mathsf{Mo}(\mathcal{C}) \sqcup \mathsf{Mo}(\mathcal{D})\big) = \mathsf{Card}\big(\mathsf{Mo}(\mathcal{C})\big) + \mathsf{Card}\big(\mathsf{Mo}(\mathcal{D})\big)$$

$$\mathsf{Card}\big(\mathsf{Mo}(\mathcal{C}) \times \mathsf{Mo}(\mathcal{D})\big) = \mathsf{Card}\big(\mathsf{Mo}(\mathcal{C})\big) \times \mathsf{Card}\big(\mathsf{Mo}(\mathcal{D})\big)$$

En conséquence, la complexité de la classification des catégories ayant exactement n morphismes est liée au nombre de façon d'écrire n comme une somme d'entiers strictement positifs et reprend la classification des catégories ayant strictement moins de n morphismes. On omettra donc de rappeler les catégories isomorphes à des sommes de même que celles qui sont isomorphes à des produits Cartésiens d'au moins deux termes non triviaux. Autrement dit, on explicitera seulement les catégories connexes et indécomposables.

Si $(M, *, e)$ est un monoïde fini possèdant n éléments, alors on peut formellement lui ajouter un élément $\perp$ (on suppose que $\perp \notin M$) en posant $M' = M \cup \{\perp\}$

[1] On peut même supposer que la somme est strictement commutative et associative.

et en prologeant la produit $*$ en $*'$ de la façon suivante : pout tout $x \in M'$ on pose $x * \perp = x = \perp * x$ et pour tout $x, y \in M$ on pose $x *' y = x * y$. On dit que l'on a **ajouté un élément neutre** au monoïde.

On peut aussi formellement lui ajouter un élément $\top$ (on suppose que $\top \notin M$) en posant $M' = M \cup \{\top\}$ et en prologeant la produit $*$ en $*'$ de la façon suivante : pout tout $x \in M'$ on pose $\top * x = \top = x * \top$ et pour tout $x, y \in M$ on pose $x *' y = x * y$. On dit que l'on a **ajouté un élément absorbant** au monoïde.

2 Cardinal de $\mathsf{Mo}(\mathcal{C})$ au plus égal à 2

Si une catégorie n'a aucun morphisme, elle n'a également aucun objet. Les applications source et but de même que l'application qui à chaque objet associe son identité et la loi de composition sont toutes réduites à l'application vide. On note cette catégorie $\mathbf{0}$ et on vérifie que

$$\mathbf{0} \sqcup \mathcal{C} \cong \mathcal{C} \quad \text{et} \quad \mathbf{0} \times \mathcal{C} \cong \mathbf{0}$$

Si une catégorie a un unique morphisme, alors elle a nécessairement un unique objet qui en est à la fois la source et le but. Cette catégorie est isomorphe au monoïde trivial dont $\mathsf{Set}[\emptyset, \emptyset]$ et $\mathsf{Cat}[\mathbf{0}, \mathbf{0}]$ sont des représentants. On note cette catégorie $\mathbf{1}$ et on vérifie que

$$\mathbf{1} \times \mathcal{C} \cong \mathcal{C}$$

Si une catégorie $\mathcal{C}$ est connexe et a exactement deux morphismes alors c'est un monoïde ayant un unique élément a en plus de son élément neutre e et on a seulement deux cas possibles :

1) $aa = e$ auquel cas $\mathcal{C}$ est isomorphe au groupe $(\mathbb{Z}/2\mathbb{Z}, +, 0)$
2) $aa = a$ auquel cas $\mathcal{C}$ est isomorphe au semi-treillis $(\{0,1\}, \vee, 0)$

3 Cardinal de $\mathsf{Mo}(\mathcal{C})$ égal à 3

Si $\mathcal{C}$ a deux objets alors $\mathcal{C}$ est isomorphe à la catégorie librement engendrée par le graphe $I_1 = \{\cdot \to \cdot\}$ c'est-à-dire à l'ensemble ordonné $\{0 < 1\}$.

Sinon $\mathcal{C}$ est isomorphe à un monoïde ayant deux éléments a et b en plus de son élément neutre e.

Supposons que le monoïde ne soit pas commutatif et que l'on ait $ab = a$ et $ba = e$, dans ce cas on a aussi

$$e = ba = b(ab) = (ba)b = b$$

d'où une contradiction. Quitte à passer à la catégorie opposée et à échanger les rôles de a et b, le même raisonnement montre que si le monoïde n'est pas commutatif, alors on a $ab \neq e$ et $ba \neq e$. Autrement dit on peut supposer que $ab = a$ et $ba = b$, ce dont on déduit

$$aa = (ab)a = a(ba) = ab = a \quad \text{et} \quad bb = (ba)b = b(ab) = ba = b$$

d'où la table de multiplication suivante

$*$	a	b
a	a	a
b	b	b

Ce monoïde est isomorphe au monoïde $W(\{a,b\})/\sim$ où $W(\{a,b\})$ est le monoïde des mots sur l'alphabet $\{a,b\}$ et $\sim$ la congruence sur ce monoïde qui identifie deux mots non vide dès qu'ils ont en commun leur première lettre. On dit encore que c'est le monoïde des mots sur $\{a,b\}$ tronqués à l'ordre 1. On note encore ce monoïde $W_1(\{a,b\})$

On suppose maintenant que le monoïde est commutatif et dans un premier temps que $ab=e$, on est ainsi en présence d'un groupe ayant 3 éléments il est donc isomorphe à $(\mathbb{Z}/3\mathbb{Z},+,0)$.

Supposons dès lors que le monoïde commutatif n'est pas un groupe, on peut donc encore supposer que $ab=ba=a$. Déterminons aa par élimination. Tout d'abord $aa \neq e$ sinon on aurait

$$b=(aa)b=a(ab)=aa=e$$

Si $aa=b$ on a

$$bb=(aa)(aa)=(a(a(aa)))=(a(ab))=aa=b$$

on en déduit la table de multiplication suivante :

$*$	a	b
a	b	a
b	a	b

Ce monoïde est obtenu à partir du groupe $(\mathbb{Z}/2\mathbb{Z},+,0)$ auquel on ajoute formellement un nouvel élément neutre.

On suppose donc maintenant que $aa=a$ et il reste à déterminer bb. Supposons tout d'abord que $bb=a$, on a donc la table de multiplication suivante et on parle du "monoïde constant".

$*$	a	b
a	a	a
b	a	a

Si $bb=b$, alors le monoïde est isomorphe au semi-treillis $(\{0,1,2\},\vee,0)$. Ce monoïde est obtenu en ajoutant formellement un élément neutre au monoïde $(\{0,1\},\vee,0)$ qui lui-même est un semi-treillis.

Enfin si $bb=e$, le monoïde obtenu est isomorphe au quotient du monoïde $\mathsf{Set}\Big[\{0,1\},\{0,1\}\Big]$ par la relation qui identifie les deux applications constantes. C'est aussi le monoïde que l'on obtient en ajoutant formellement un élément absorbant au groupe $(\mathbb{Z}/2\mathbb{Z},+,0)$.