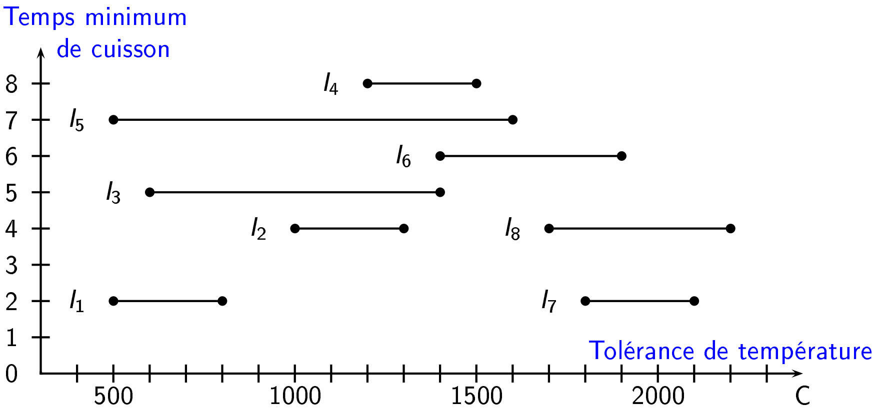
Ordonnancement chromatique
polyèdres, complexité et classification

Vincent JOST

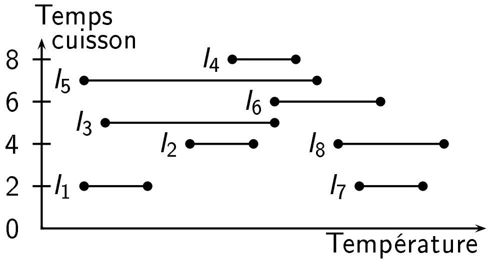
Encadrement : Nadia BRAUNER, András SEBŐ
Université Joseph Fourier, Grenoble I
Laboratoire Leibniz-IMAG

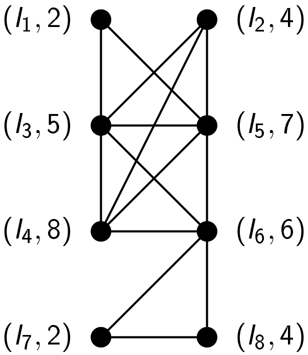
Ordonnancement par batchs



Ordonnancement par batchs

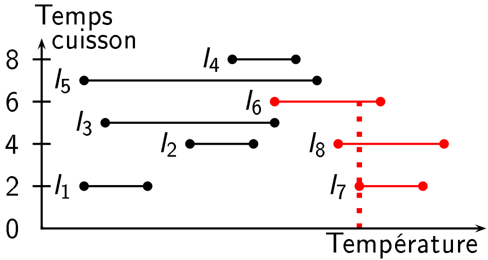
- Représentation par un graphe pondéré

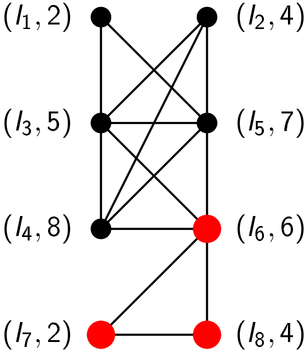




Ordonnancement par batchs : partition en cliques

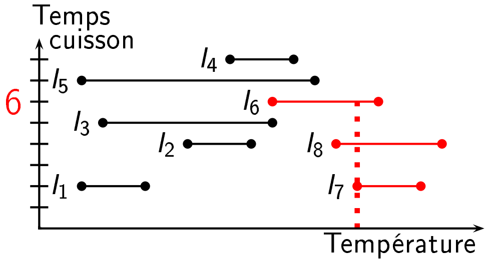
- {Batchs réalisables} = {Cliques du graphe d'intervalles}

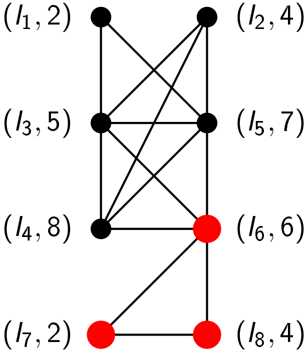




Ordonnancement par batchs parallèles

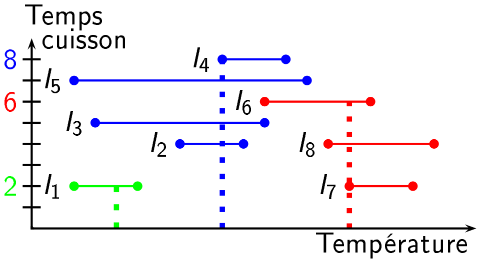
- Temps d'opération d'un batch := maximum des temps

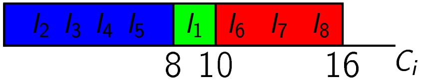


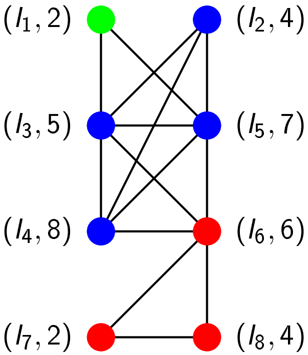


Ordonnancement par batchs : diagramme de Gantt

- 3 représentations d'une solution

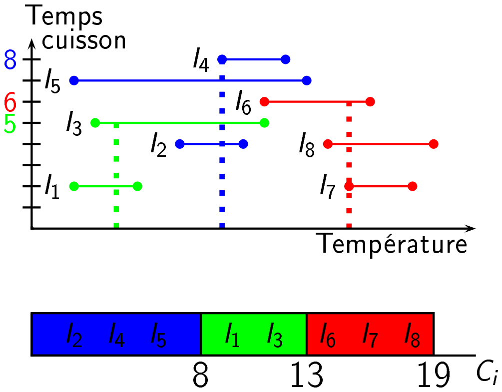


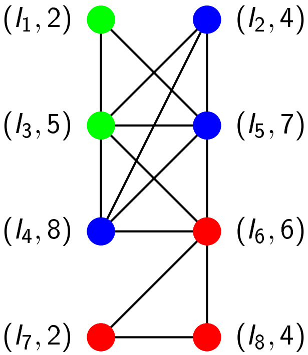




Ordonnancement par batchs : taille du four bornée

- Chaque batch contient au plus b tâches (exemple $b = 3$)





Menu du jour

- I) Partition en cliques : théorie classique

Menu du jour

- I) Partition en cliques : théorie classique
- II) Extension de pré-partition en cliques [$\overline{PrExt}$]

Menu du jour

- I) Partition en cliques : théorie classique
- II) Extension de pré-partition en cliques [$\overline{PrExt}$]
- III) Partition en cliques bornées [PCliqB]

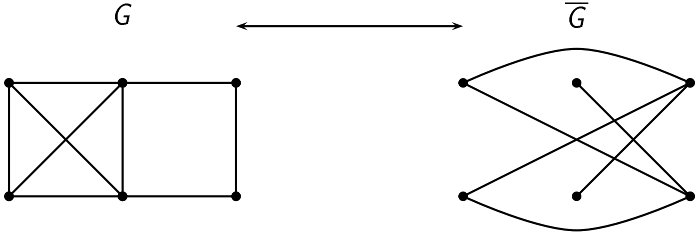
Menu du jour

- I) Partition en cliques : théorie classique
- II) Extension de pré-partition en cliques [$\overline{PrExt}$]
- III) Partition en cliques bornées [PCliqB]
- IV) Partition de coût minimum [PCliqW]

I) Partition en cliques : théorie classique

Définitions utiles

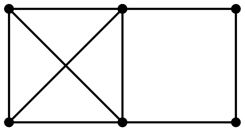
- Le graphe complémentaire



Définitions utiles

- Le graphe complémentaire
- Sous-graphe induit

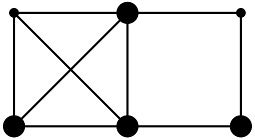
G



Définitions utiles

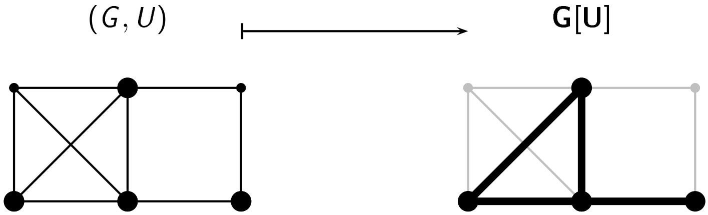
- Le graphe complémentaire
- Sous-graphe induit

$(G, \mathbf{U})$



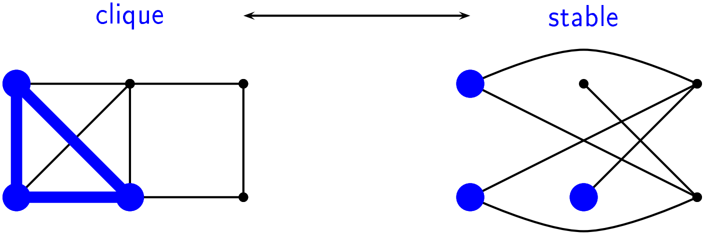
Définitions utiles

- Le graphe complémentaire
- Sous-graphe induit par $U \subseteq V$



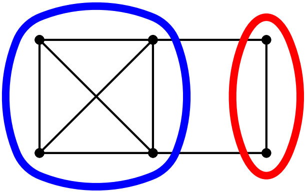
Définitions utiles

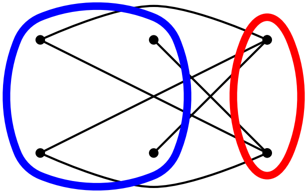
- Le graphe complémentaire
- Sous-graphe induit par $U \subseteq V$
- Clique et stable



Partition en cliques de $G \iff$ partition en stables de $\overline{G}$

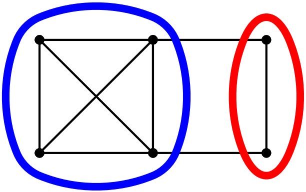
$$\overline{\chi}(G) = \chi(\overline{G})$$

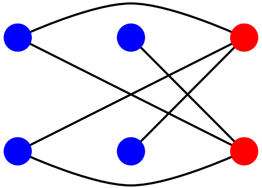




Partition en cliques de G $\quad\Longleftrightarrow\quad$ Coloration de $\overline{G}$

$$\overline{\chi}(G) = \chi(\overline{G})$$

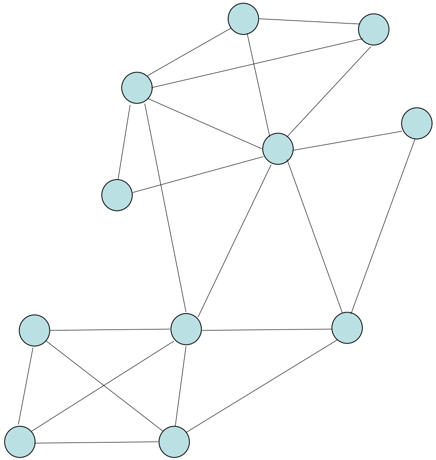




Problème : partition en cliques

Données : Graphe G, entier k

Question : $\exists$ partition de G en au plus k cliques ?



Exemple:

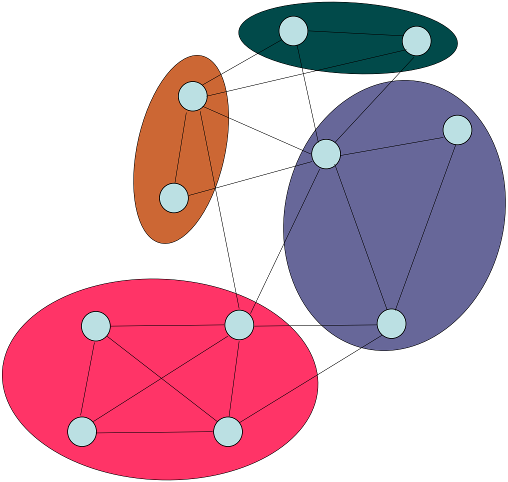
k=4 ???

Problème : partition en cliques

Données : Graphe G, entier k

Question : $\exists$ partition de G en au plus k cliques ?

Complexité : NP



Exemple:

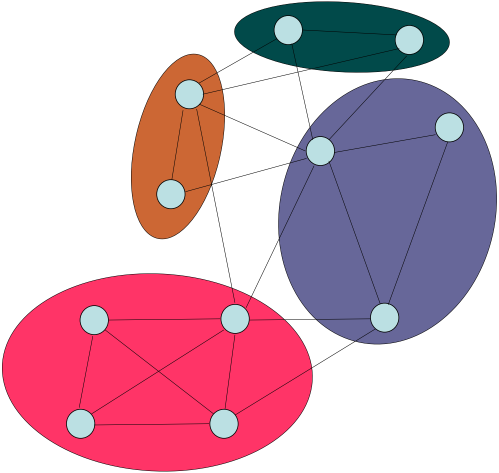
k=4 OK!

Problème : partition en cliques

Données : Graphe G, entier k

Question : $\exists$ partition de G en au plus k cliques ?

Complexité : NP-complet

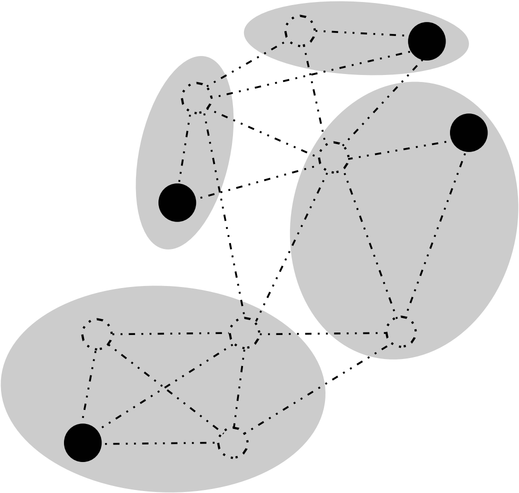


Exemple:

k=4 OK!

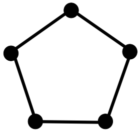
k=3 ???

L'inégalité $\overline{\chi}(G) \geq \alpha(G)$



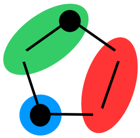
L'inégalité $\overline{\chi}(G) \geq \alpha(G)$

- Pas toujours serrée :



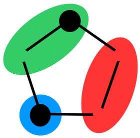
L'inégalité $\overline{\chi}(G) \geq \alpha(G)$

- Pas toujours serrée : $\overline{\chi}(C_5) = 3 > 2 = \alpha(C_5)$



L'inégalité $\overline{\chi}(G) \geq \alpha(G)$

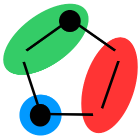
- Pas toujours serrée : $\overline{\chi}(C_5) = 3 > 2 = \alpha(C_5)$



- Decider si $\overline{\chi}(G) = \alpha(G)$ est NP-complet

L'inégalité $\overline{\chi}(G) \geq \alpha(G)$

- Pas toujours serrée : $\overline{\chi}(C_5) = 3 > 2 = \alpha(C_5)$



- Decider si $\overline{\chi}(G) = \alpha(G)$ est NP-complet
- Trouver
  - partition min en cliques
  - stable max

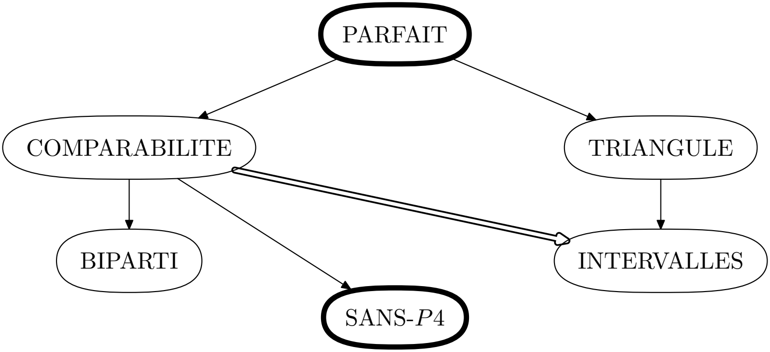
  NP-difficiles même si $\overline{\chi}(G) = \alpha(G)$

Graphes parfaits : passé...

- Def : Berge 1960
  Tout sous-graphe induit H de G vérifie $\overline{\chi}(H) = \alpha(H)$

Graphes parfaits : passé...

- Def : Berge 1960
  Tout sous-graphe induit H de G vérifie $\overline{\chi}(H) = \alpha(H)$



Graphes parfaits : passé, présent…

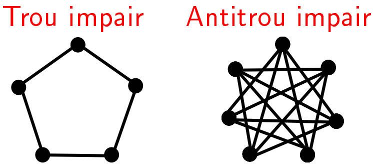
- Def : Berge 1960
  Tout sous-graphe induit H de G vérifie $\overline{\chi}(H) = \alpha(H)$
- Optimisation Grötschel, Lovász, Schrijver 1984
  Partition min en cliques et stable max sont polynomiaux

Graphes parfaits : passé, présent...

- Def : Berge 1960
  Tout sous-graphe induit H de G vérifie $\overline{\chi}(H) = \alpha(H)$
- Optimisation Grötschel, Lovász, Schrijver 1984
  Partition min en cliques et stable max sont polynomiaux
- SPGT Chudnovsky, Robertson, Seymour, Thomas 2002
  Conjecture forte des graphes parfaits Berge 1960
  G parfait $\iff$ ni trou impair, ni antitrou impair

Graphes parfaits : passé, présent...

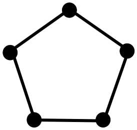
- Def : Berge 1960
  Tout sous-graphe induit H de G vérifie $\overline{\chi}(H) = \alpha(H)$
- Optimisation Grötschel, Lovász, Schrijver 1984
  Partition min en cliques et stable max sont polynomiaux
- SPGT Chudnovsky, Robertson, Seymour, Thomas 2002
  Conjecture forte des graphes parfaits Berge 1960
  G parfait $\Longleftrightarrow$ ni trou impair, ni antitrou impair



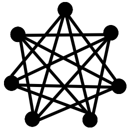
Graphes parfaits : passé, présent...

- Def : Berge 1960
  Tout sous-graphe induit H de G vérifie $\overline{\chi}(H) = \alpha(H)$
- Optimisation Grötschel, Lovász, Schrijver 1984
  Partition min en cliques et stable max sont polynomiaux
- SPGT Chudnovsky, Robertson, Seymour, Thomas 2002
  Conjecture forte des graphes parfaits Berge 1960
  G parfait $\iff$ ni trou impair, ni antitrou impair

Trou impair



Antitrou impair



- Reconnaissance polynomiale
  Chudnovsky, Cornuéjols, Liu, Seymour, Vušković 2005

Futur des graphes parfaits : ordonnancement chromatique

- Applications de coloration $\Longrightarrow$ contraintes supplémentaires

Futur des graphes parfaits : ordonnancement chromatique

- Applications de coloration $\Longrightarrow$ contraintes supplémentaires
- Contraintes étudiées en ordonnancement

Futur des graphes parfaits : ordonnancement chromatique

- Applications de coloration $\Longrightarrow$ contraintes supplémentaires
- Contraintes étudiées en ordonnancement
- Nouveaux problèmes NP-difficiles dans les graphes parfaits...

Futur des graphes parfaits : ordonnancement chromatique

- Applications de coloration $\Longrightarrow$ contraintes supplémentaires
- Contraintes étudiées en ordonnancement
- Nouveaux problèmes NP-difficiles dans les graphes parfaits...
- ...mais polynomiaux
  dans sous-classes importantes pour applications

Futur des graphes parfaits : ordonnancement chromatique

- Applications de coloration $\Longrightarrow$ contraintes supplémentaires
- Contraintes étudiées en ordonnancement
- Nouveaux problèmes NP-difficiles dans les graphes parfaits...
- ...mais polynomiaux
  dans sous-classes importantes pour applications

  $+$ **Relations min-max qui généralisent** $\overline{\chi}(G) \geq \alpha(G)$

II) Extension de pré-partition en cliques

L'ubiquité des contraintes de pré-affectation

1						5		
	3			4		1		
		4		6	2	9		
	5							
			6		3		1	
				7				
		5					9	
		2						7
			7		9		2	

L'ubiquité des contraintes de pré-affectation

1						5		
	3			4		1		
		4		6	2	9		
	5							
			6		3		1	
				7				
		5					9	
		2						7
			7		9		2	

- Sudoku : extension d'une pré-coloration

L'ubiquité des contraintes de pré-affectation

1						5		
	3			4		1		
		4		6	2	9		
	5							
			6		3		1	
				7				
		5					9	
		2						7
			7		9		2	

- Sudoku : extension d'une pré-coloration

L'ubiquité des contraintes de pré-affectation

1						5		
	3			4		1		
		4		6	2	9		
	5							
			6		3		1	
				7				
		5					9	
		2						7
			7		9		2	

- Sudoku : extension d'une pré-coloration

L'ubiquité des contraintes de pré-affectation

1						5		
	3			4		1		
		4		6	2	9		
	5							
			6		3		1	
				7				
		5					9	
		2						7
			7		9		2	

- Sudoku : extension d'une pré-coloration d'un graphe
- 81 sommets

L'ubiquité des contraintes de pré-affectation

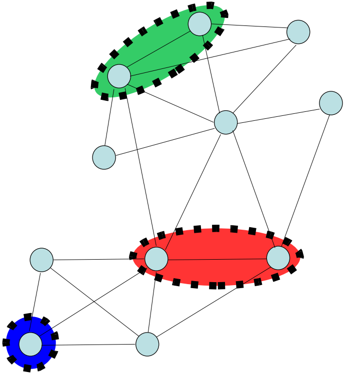
1						5		
	3			4		1		
		4		6	2	9		
	5							
			6		3		1	
				7				
		5					9	
		2						7
			7		9		2	

- Sudoku : extension d'une pré-coloration d'un graphe
- 81 sommets
- même ligne, colonne ou carré $\Longrightarrow$ arête

[$\overline{\text{PrExt}}$] : extension de pré-partition en cliques

Données : Graphe G, entier k,
famille de cliques disjointes $\mathcal{Q} = \{Q_1, Q_2, \ldots\}$ de G

Question : $\exists$ partition de G en k cliques qui étende $\mathcal{Q}$?

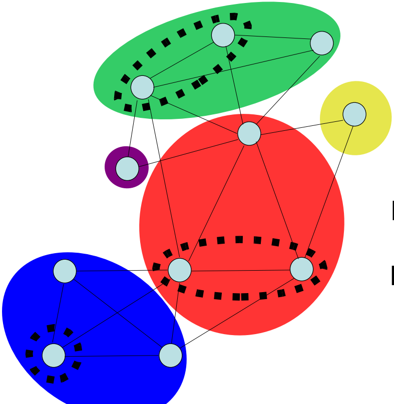


Exemple:

k=5 ???

[PrExt] : extension de pré-partition en cliques

Données :	Graphe G, entier k,
	famille de cliques disjointes $\mathcal{Q} = \{Q_1, Q_2, \ldots\}$ de G
Question :	$\exists$ partition de G en k cliques qui étende $\mathcal{Q}$?
Complexité :	*NP*



Exemple:

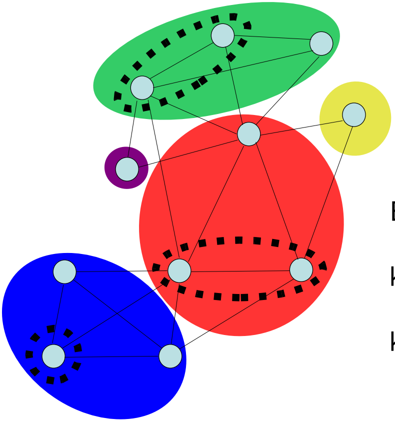
k=5 OK!

$\overline{\text{[PrExt]}}$: extension de pré-partition en cliques

Données : Graphe G, entier k,
famille de cliques disjointes $\mathcal{Q} = \{Q_1, Q_2, \ldots\}$ de G

Question : $\exists$ partition de G en k cliques qui étende $\mathcal{Q}$?

Complexité : NP-complet même dans les graphes parfaits



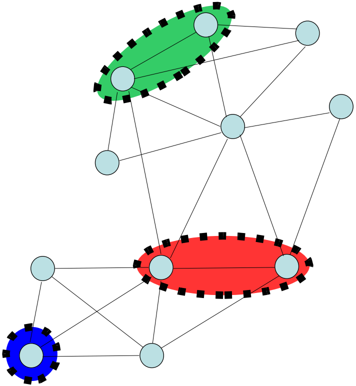
Exemple:

k=5 OK!

k=4 ???

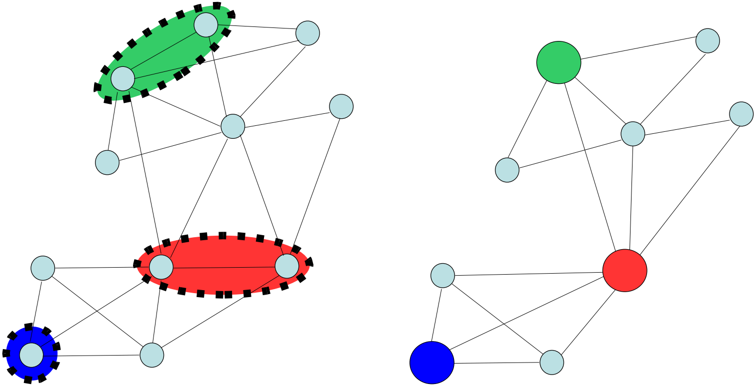
[PrExt] : la technique de contraction

- **Pour un graphe G et une pré-partition $\mathcal{Q}$ de G**



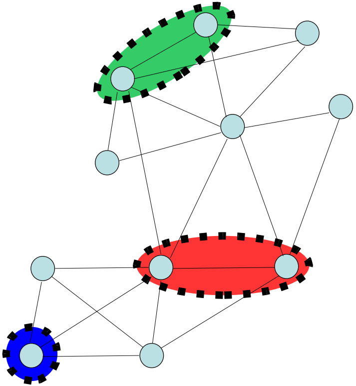
[PrExt] : la technique de contraction

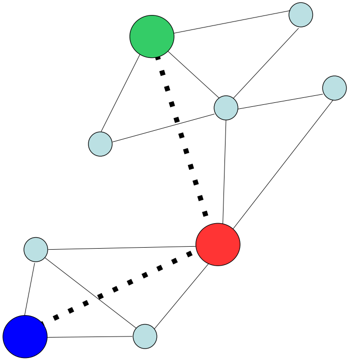
- Pour un graphe G et une pré-partition $\mathcal{Q}$ de G
- **Contracter chaque clique de $\mathcal{Q}$ en un sommet**



[PrExt] : la technique de contraction

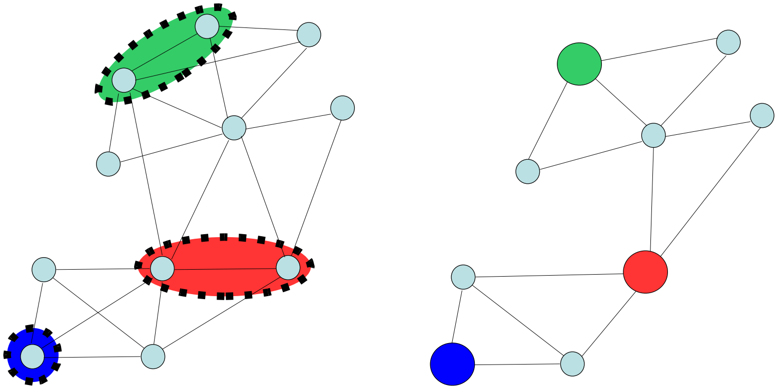
- Pour un graphe G et une pré-partition $\mathcal{Q}$ de G
- Contracter chaque clique de $\mathcal{Q}$ en un sommet
- **Effacer arêtes entre pré-cliques**





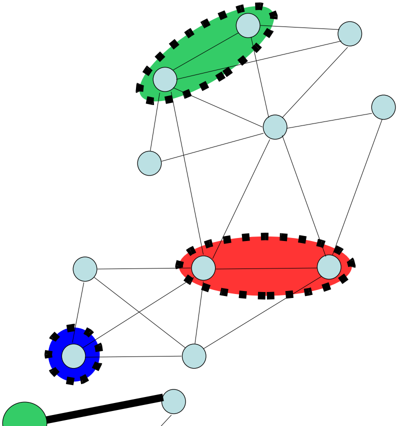
[PrExt] : la technique de contraction

- Pour un graphe G et une pré-partition $\mathcal{Q}$ de G
- Contracter chaque clique de $\mathcal{Q}$ en un sommet
- **Effacer arêtes entre pré-cliques**



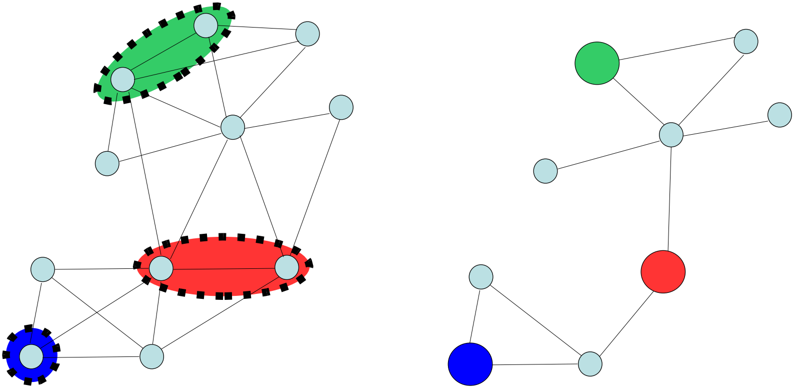
[PrExt] : la technique de contraction

- Pour un graphe G et une pré-partition $\mathcal{Q}$ de G
- Contracter chaque clique de $\mathcal{Q}$ en un sommet
- Effacer arêtes entre pré-cliques
- **Voisinage d'une pré-clique** $:=$ $\{$**Voisins communs**$\}$



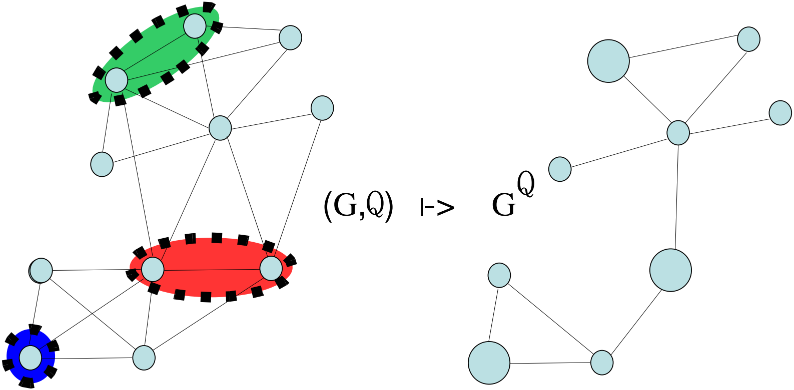
[PrExt] : la technique de contraction

- Pour un graphe G et une pré-partition $\mathcal{Q}$ de G
- Contracter chaque clique de $\mathcal{Q}$ en un sommet
- Effacer arêtes entre pré-cliques
- **Voisinage d'une pré-clique** $:=$ $\{$**Voisins communs**$\}$

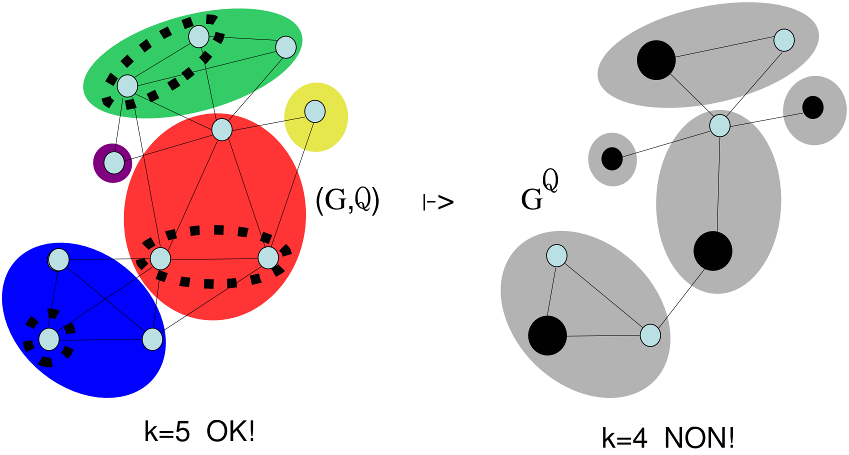


[PrExt] : la technique de contraction

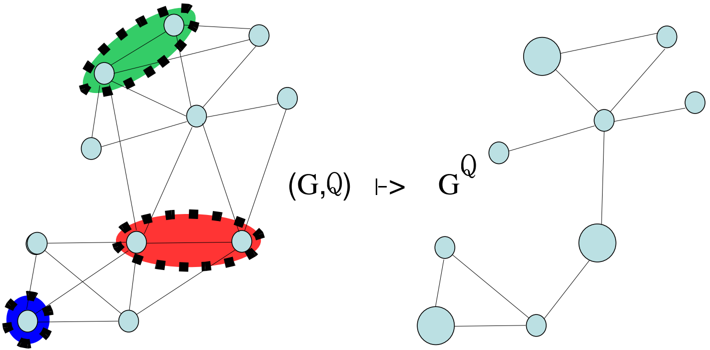
- Pour un graphe G et une pré-partition $\mathcal{Q}$ de G
- Contracter chaque clique de $\mathcal{Q}$ en un sommet
- Effacer arêtes entre pré-cliques
- Voisinage d'une pré-clique := {Voisins communs}



[PrExt] : un certificat d'optimalité

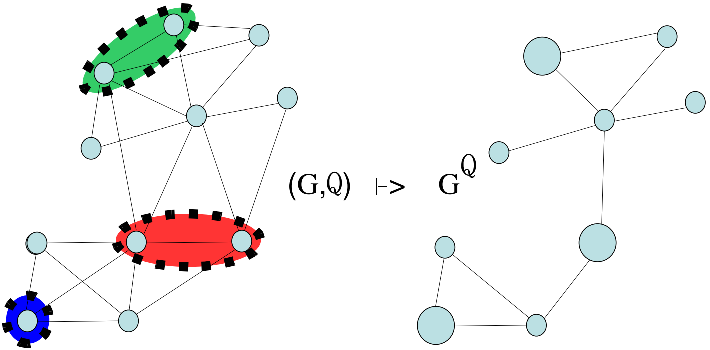


[PrExt] : le lemme de contraction



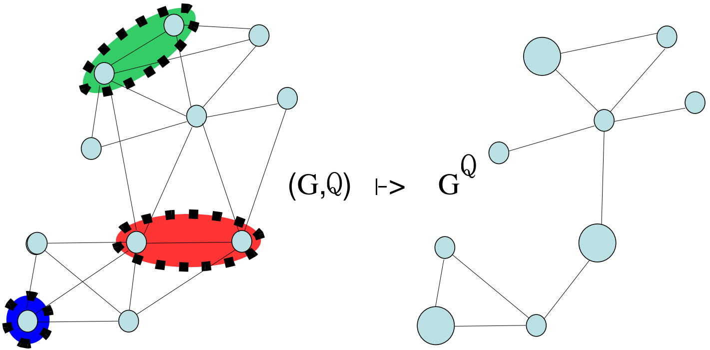
- Bijection entre
  - partitions en cliques de G qui étendent $\mathcal{Q}$
  - partitions en cliques de $G^{\mathcal{Q}}$

$\overline{[\text{PrExt}]}$: le lemme de contraction



- Bijection entre
  - partitions en cliques de G qui étendent $\mathcal{Q}$
  - partitions en cliques de $G^{\mathcal{Q}}$
- Def : G est $\overline{\text{PrExt}}$-parfait si $G^{\mathcal{Q}}$ est parfait pour tout $\mathcal{Q}$

$\overline{\text{PrExt}}$: le lemme de contraction



- Bijection entre
  - partitions en cliques de G qui étendent $\mathcal{Q}$
  - partitions en cliques de $G^{\mathcal{Q}}$
- Def : G est $\overline{\text{PrExt}}$-parfait si $G^{\mathcal{Q}}$ est parfait pour tout $\mathcal{Q}$
- Hujter, Tuza 1996

  $\overline{\text{PrExt}}$-parfait $\supset$ split, sans-P_4, bipartis-sans-P_5, co-bipartis

- Hertz 1989 $G^{\mathcal{Q}}$ est parfait si G est Meyniel et $|Q_i| = 1\ \forall\ i$

Les graphes $\overline{\text{PrExt}}$-parfaits : la capture du taureau

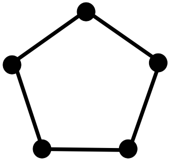
- Def : G est $\overline{\text{PrExt}}$-parfait si $G^{\mathcal{Q}}$ est parfait pour tout $\mathcal{Q}$

Les graphes $\overline{\text{PrExt}}$-parfaits : la capture du taureau

- Def : G est $\overline{\text{PrExt}}$-parfait si $G^{\mathcal{Q}}$ est parfait pour tout $\mathcal{Q}$
- Par la queue : minimaux non-$\overline{\text{PrExt}}$-parfaits

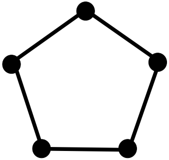
Les graphes $\overline{\text{PrExt}}$-parfaits : la capture du taureau

- Def : G est $\overline{\text{PrExt}}$-parfait si $G^{\mathcal{Q}}$ est parfait pour tout $\mathcal{Q}$
- Par la queue : minimaux non-$\overline{\text{PrExt}}$-parfaits
  - trous impairs...

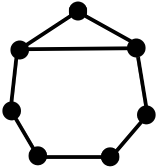


Les graphes $\overline{\text{PrExt}}$-parfaits : la capture du taureau

- Def : G est $\overline{\text{PrExt}}$-parfait si $G^{\mathcal{Q}}$ est parfait pour tout $\mathcal{Q}$
- Par la queue : minimaux non-$\overline{\text{PrExt}}$-parfaits
  - trous impairs,

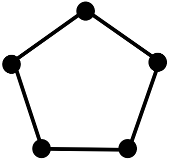


  - maisons...

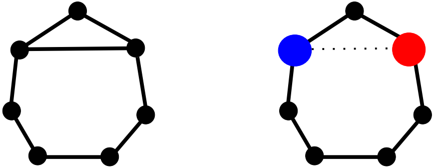


Les graphes $\overline{\text{PrExt}}$-parfaits : la capture du taureau

- Def : G est $\overline{\text{PrExt}}$-parfait si $G^{\mathcal{Q}}$ est parfait pour tout $\mathcal{Q}$
- Par la queue : minimaux non-$\overline{\text{PrExt}}$-parfaits
  - trous impairs,

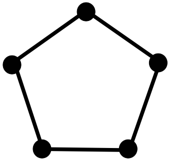
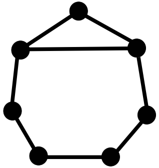


  - maisons. . .



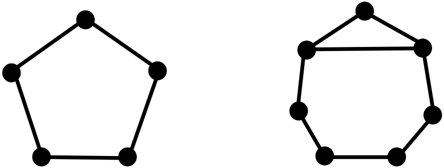
Les graphes $\overline{\text{PrExt}}$-parfaits : la capture du taureau

- Def : G est $\overline{\text{PrExt}}$-parfait si $G^{\mathcal{Q}}$ est parfait pour tout $\mathcal{Q}$
- Par la queue : minimaux non-$\overline{\text{PrExt}}$-parfaits
  - trous impairs, maisons. . .

Les graphes $\overline{\text{PrExt}}$-parfaits : la capture du taureau

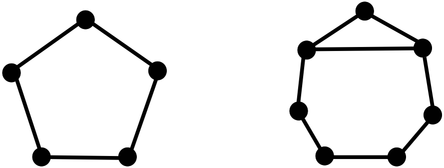
- Def : G est $\overline{\text{PrExt}}$-parfait si $G^{\mathcal{Q}}$ est parfait pour tout $\mathcal{Q}$
- Par la queue : minimaux non-$\overline{\text{PrExt}}$-parfaits
  - trous impairs, maisons



  - et c'est tout ! Jost, Lévêque, Maffray 2005

Les graphes $\overline{\text{PrExt}}$-parfaits : la capture du taureau

- Def : G est $\overline{\text{PrExt}}$-parfait si $G^{\mathcal{Q}}$ est parfait pour tout $\mathcal{Q}$
- Par la queue : minimaux non-$\overline{\text{PrExt}}$-parfaits
  - trous impairs, maisons

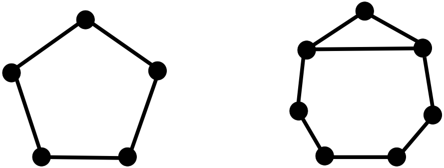


  - et c'est tout ! Jost, Lévêque, Maffray 2005

$$\boxed{G \text{ est } \overline{\text{PrExt}}\text{-parfait} \iff G \text{ est un graphe de Meyniel}}$$

Les graphes $\overline{\text{PrExt}}$-parfaits : la capture du taureau

- Def : G est $\overline{\text{PrExt}}$-parfait si $G^{\mathcal{Q}}$ est parfait pour tout $\mathcal{Q}$
- Par la queue : minimaux non-$\overline{\text{PrExt}}$-parfaits
  - trous impairs, maisons

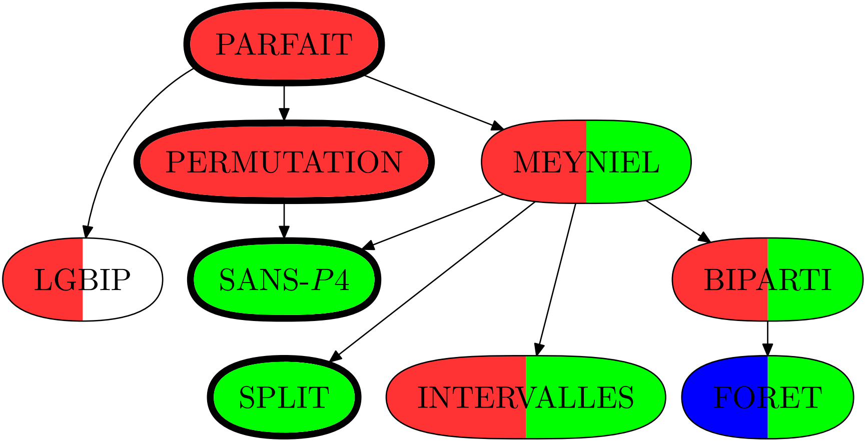


  - et c'est tout ! Jost, Lévêque, Maffray 2005

$$\boxed{G \text{ est } \overline{\text{PrExt}}\text{-parfait} \iff G \text{ est un graphe de Meyniel}}$$

[$\overline{\text{PrExt}}$] est polynomial sur les graphes de Meyniel

Complexité de $[\overline{\text{PrExt}}]$ sur classe $(\overline{\mathcal{C}} \mid \mathcal{C})$



NP-complet Polynomial PrExt-parfait

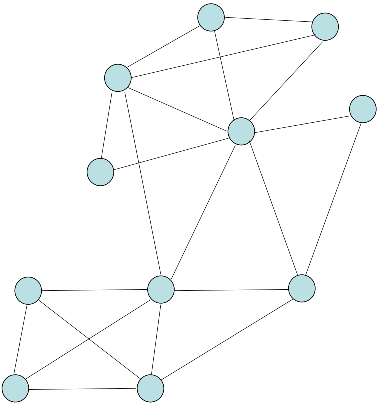
III) Partition en cliques bornées

[PCliqB] : partition en cliques de taille bornée

Données : Graphe G, entiers b et k
Question : $\exists$ partition de G en k cliques ayant au plus b sommets ?

[PCliqB] : partition en cliques de taille bornée

Données : Graphe G, entiers b et k
Question : $\exists$ partition de G en k cliques ayant au plus b sommets ?

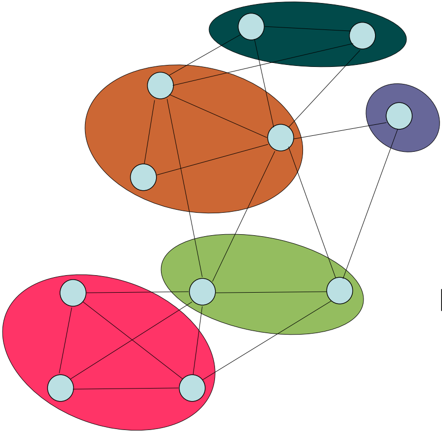


Exemple:

b=3, k=5 ???

[PCliqB] : partition en cliques de taille bornée

Données : Graphe G, entiers b et k
Question : $\exists$ partition de G en k cliques ayant au plus b sommets ?
Complexité : NP

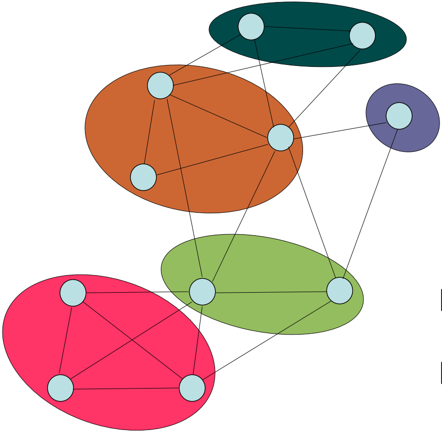


Exemple:

b=3, k=5 OK!

[PCliqB] : partition en cliques de taille bornée

Données : Graphe G, entiers b et k
Question : $\exists$ partition de G en k cliques ayant au plus b sommets ?
Complexité : NP-complet, même dans les graphes parfaits

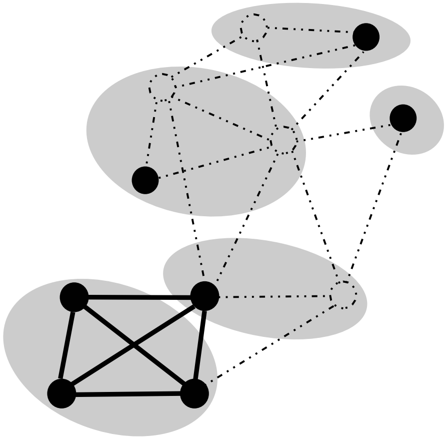


Exemple:

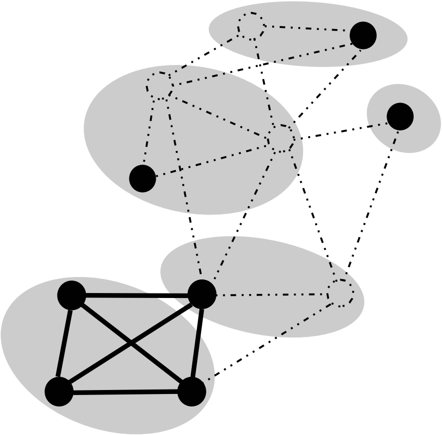
b=3, k=5 OK!

b=3, k=4 ???

[PCliqB] : un certificat d'optimalité



[PCliqB] : un certificat d'optimalité



$C_1(U), C_2(U), \ldots C_t(U) :=$ composantes connexes de $G[U]$

$$\sigma_b(G) := \max_{U \subseteq V} \sum_{i=1}^{t} \left\lceil \frac{|C_i(U)|}{b} \right\rceil$$

[PCliqB] : la formule de "Berge-Tutte-Gallai mod-b"

- Finke, Jost, Sebő, Queyranne 2004
  On a toujours

$$\overline{\chi}_b(G) \geq \sigma_b(G) := \max_{U \subseteq V} \sum_i \left\lceil \frac{|C_i(U)|}{b} \right\rceil$$

[PCliqB] : la formule de "Berge-Tutte-Gallai mod-b"

- Finke, Jost, Sebő, Queyranne 2004
  On a toujours

$$\overline{\chi}_b(G) \geq \sigma_b(G) := \max_{U \subseteq V} \sum_i \left\lceil \frac{|C_i(U)|}{b} \right\rceil$$

- Cas avec égalité :
  - $\overline{\chi}(G) = \alpha(G) \qquad (\Leftarrow \{G \text{ parfait}, \, b \geq |V|\})$

[PCliqB] : la formule de "Berge-Tutte-Gallai mod-b"

- Finke, Jost, Sebő, Queyranne 2004
  On a toujours

$$\overline{\chi}_b(G) \geq \sigma_b(G) := \max_{U \subseteq V} \sum_i \left\lceil \frac{|C_i(U)|}{b} \right\rceil$$

- Cas avec égalité :
  - $\overline{\chi}(G) = \alpha(G) \qquad (\Leftarrow \{G \text{ parfait}, b \geq |V|\})$
  - "Berge-Tutte" pour couplage max ($\iff b = 2$)

[PCliqB] : la formule de "Berge-Tutte-Gallai mod-b"

- Finke, Jost, Sebő, Queyranne 2004
  On a toujours

$$\overline{\chi}_b(G) \geq \sigma_b(G) := \max_{U \subseteq V} \sum_i \left\lceil \frac{|C_i(U)|}{b} \right\rceil$$

- Cas avec égalité :
  - $\overline{\chi}(G) = \alpha(G) \qquad (\Leftarrow \ \{G \text{ parfait}, \ b \geq |V|\})$
  - "Berge-Tutte" pour couplage max ($\Longleftrightarrow \ b = 2$)
  - Pour tout b : intervalles, triangulés, bipartis, co-LGBIP...

[PCliqB] : la formule de "Berge-Tutte-Gallai mod-b"

- Finke, Jost, Sebő, Queyranne 2004
  On a toujours

$$\overline{\chi}_b(G) \geq \sigma_b(G) := \max_{U \subseteq V} \sum_i \left\lceil \frac{|C_i(U)|}{b} \right\rceil$$

- Cas avec égalité :
  - $\overline{\chi}(G) = \alpha(G) \qquad (\Leftarrow \{G \text{ parfait}, b \geq |V|\})$
  - "Berge-Tutte" pour couplage max ($\iff b = 2$)
  - Pour tout b : intervalles, triangulés, bipartis, co-LGBIP...

- Def : G est borné-parfait si $\overline{\chi}_b(H) = \sigma_b(H)$
  pour tout b et tout sous-graphe induit H de G

Graphes bornés-parfaits : la capture du taureau

- Def : G est borné-parfait si pour tout b et tout $U \subseteq V$

$$\overline{\chi}_b(G[U]) = \sigma_b(G[U])$$

Graphes bornés-parfaits : la capture du taureau

- Def : G est borné-parfait si pour tout b et tout $U \subseteq V$

$$\overline{\chi}_b(G[U]) = \sigma_b(G[U])$$

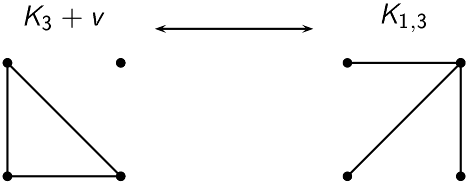
- Par les cornes : propriétés des bornés-parfaits
- Par la queue : minimaux non-bornés-parfaits

Graphes bornés-parfaits : la capture du taureau

- Def : G est borné-parfait si pour tout b et tout $U \subseteq V$

$$\overline{\chi}_b(G[U]) = \sigma_b(G[U])$$

- Par les cornes : propriétés des bornés-parfaits
  - $\supset$ parfaits-sans-$\{K_3 + v\}$ De Werra 85. Gardi 04



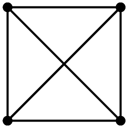
Graphes bornés-parfaits : la capture du taureau

- Def : G est borné-parfait si pour tout b et tout $U \subseteq V$

$$\overline{\chi}_b(G[U]) = \sigma_b(G[U])$$

- Par les cornes : propriétés des bornés-parfaits
  - $\supset$ parfaits-sans-$\{K_3 + v\}$ De Werra 85. Gardi 04
  - $\supset$ parfaits-sans-K_4 Hansen, Hertz, Kuplinski 93. FJQS 04

K_4

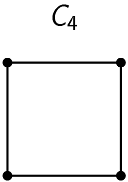


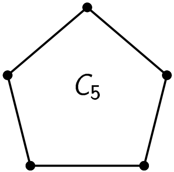
Graphes bornés-parfaits : la capture du taureau

- Def : G est borné-parfait si pour tout b et tout $U \subseteq V$

$$\overline{\chi}_b(G[U]) = \sigma_b(G[U])$$

- Par les cornes : propriétés des bornés-parfaits
  - $\supset$ parfaits-sans-$\{K_3 + v\}$ De Werra 85. Gardi 04
  - $\supset$ parfaits-sans-K_4 Hansen, Hertz, Kuplinski 93. FJQS 04
  - $\supset$ triangulés Jost 05





Graphes bornés-parfaits : la capture du taureau

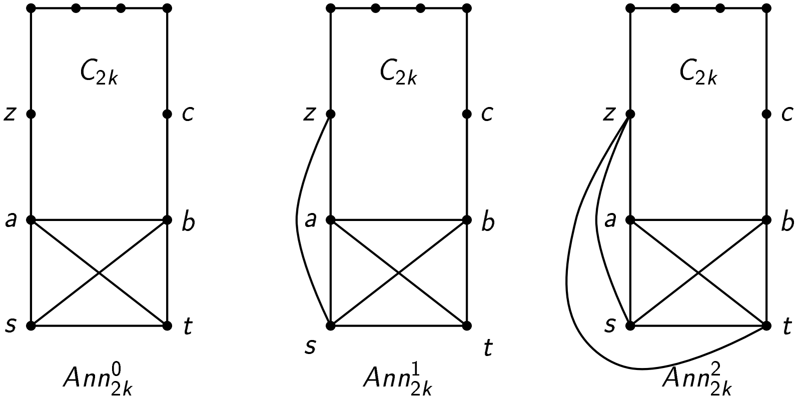
- Def : G est borné-parfait si pour tout b et tout $U \subseteq V$

$$\overline{\chi}_b(G[U]) = \sigma_b(G[U])$$

- Par les cornes : propriétés des bornés-parfaits
  - $\supset$ parfaits-sans-$\{K_3 + v\}$ De Werra 85. Gardi 04
  - $\supset$ parfaits-sans-K_4 Hansen, Hertz, Kuplinski 93. FJQS 04
  - $\supset$ triangulés Jost 05
- Par la queue : minimaux non-bornés-parfaits
  - trous impairs et leurs compléments

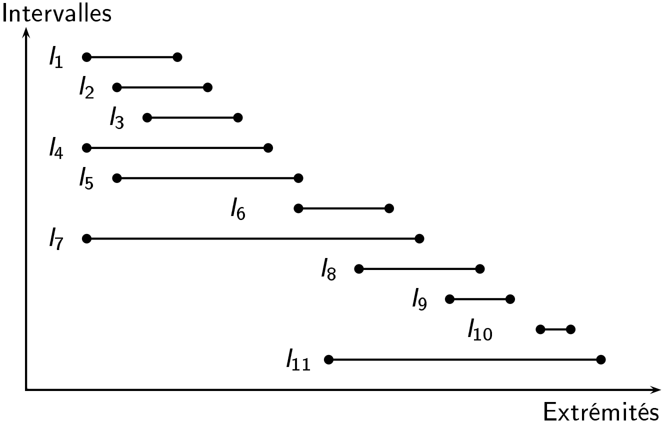
Graphes bornés-parfaits : la capture du taureau

- Par les cornes : propriétés des bornés-parfaits
  - $\supset$ parfaits-sans-$\{K_3 + v\}$, parfaits-sans-K_4, triangulés
- Par la queue : minimaux non-bornés-parfaits
  - trous impairs et leurs compléments
  - antennes



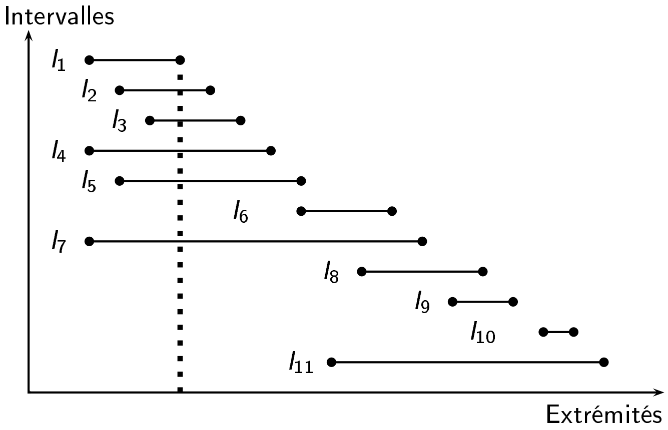
[PCliqB] : un algorithme glouton pour les intervalles

- Trier par ordre croissant des fins d'intervalles



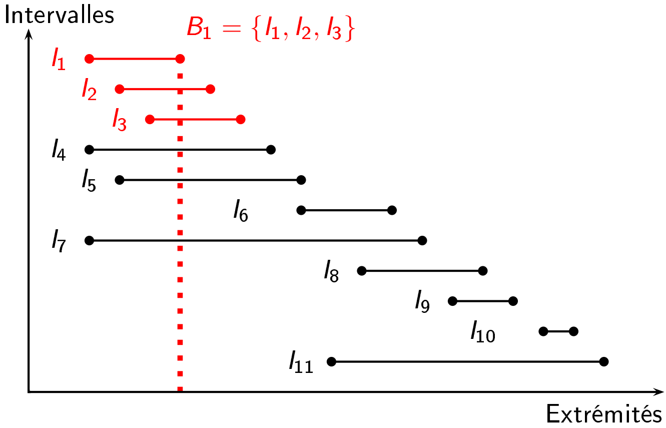
[PCliqB] : un algorithme glouton pour les intervalles

- Les intervalles compatibles avec I_1



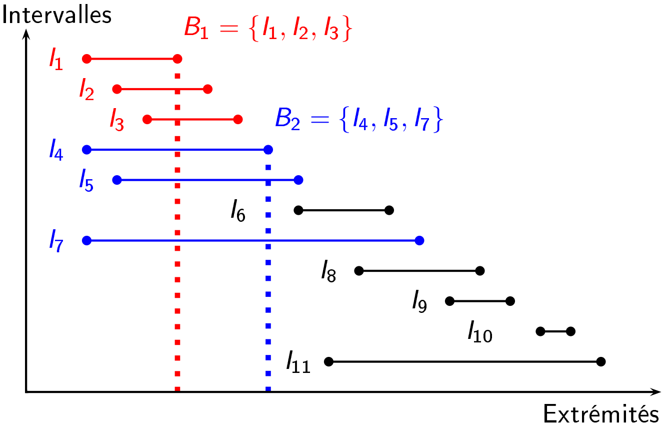
[PCliqB] : un algorithme glouton pour les intervalles

- Un choix glouton pour la clique contenant I_1 $(b = 3)$



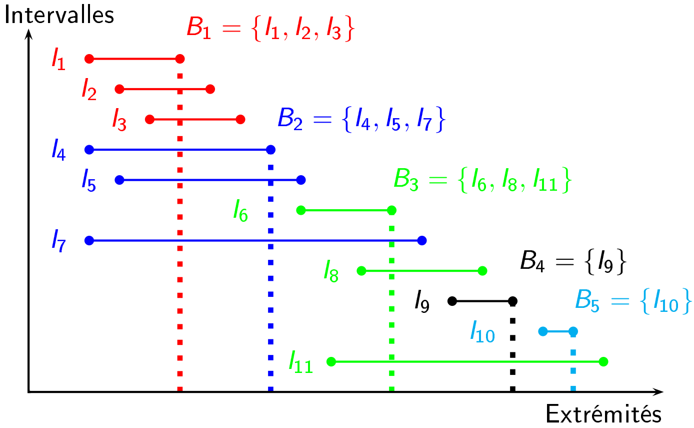
[PCliqB] : un algorithme glouton pour les intervalles

- Après l'entrée, le gratin Dauphinois ! ($b = 3$)



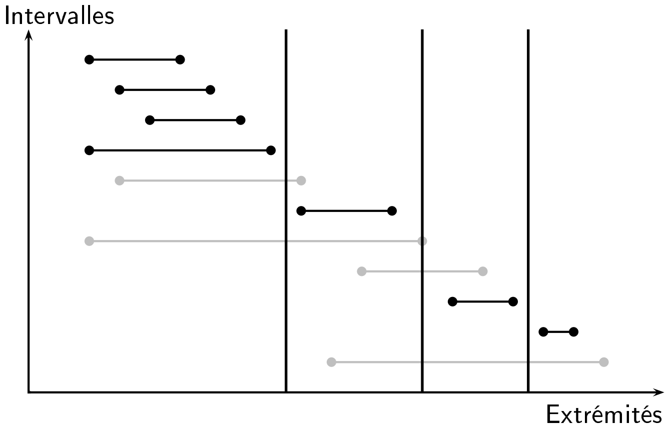
[PCliqB] : un algorithme glouton pour les intervalles

- Garguantua est repu ! ! ! ($b = 3$)

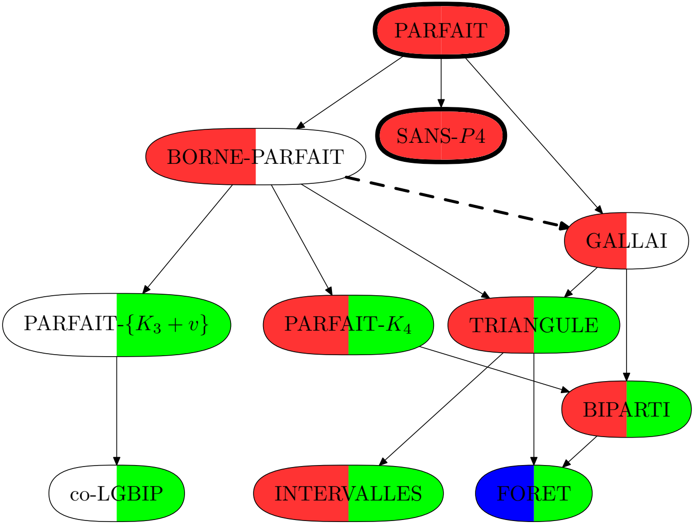


[PCliqB] : un algorithme glouton pour les intervalles

- Solution duale dans la formule de Berge-Tutte-Gallai mod-3



Complexité de (Coloration | Partition en cliques) b-bornée



NP-complet Polynomial Borné-parfait + polynomial

IV) Partition de coût minimum (en cliques)

Combinatoire polyèdrale

Combinatoire polyèdrale, systèmes TDI et TDAU

[PCliqW] : partition de coût minimum (en cliques)

Données : graphe G, fonction de coût $f : \mathcal{P}(V) \rightarrow \mathbb{R}_+$
(f est donnée par un oracle de valeur)
Résultat : une partition en cliques $\mathcal{K} = \{Q_1, Q_2, \ldots Q_k\}$ de G
Objectif : minimiser $\sum_{i=1}^{k} f(Q_i)$
Complexité : exponentielle

[PCliqW] : partition de coût minimum (en cliques)

Données : graphe G, fonction de coût $f : \mathcal{P}(V) \rightarrow \mathbb{R}_+$ (f est donnée par un oracle de valeur) Résultat : une partition en cliques $\mathcal{K} = \{Q_1, Q_2, \ldots Q_k\}$ de G Objectif : minimiser $\sum_{i=1}^{k} f(Q_i)$ Complexité : exponentielle

$$
\text{(PLNE)} \quad \left\{ \begin{array}{l} \min fy \\ y(v) = 1 \text{ pour tout } v \in V \\ y_Q \in \{0, 1\} \text{ pour toute clique } Q \text{ de } G \end{array} \right.
$$

[PCliqW] : partition de coût minimum (en cliques)

Données : graphe G, fonction de coût $f : \mathcal{P}(V) \to \mathbb{R}_+$
(f est donnée par un oracle de valeur)
Résultat : une partition en cliques $\mathcal{K} = \{Q_1, Q_2, \ldots Q_k\}$ de G
Objectif : minimiser $\sum_{i=1}^{k} f(Q_i)$
Complexité : exponentielle

$$
\text{(PLNE)} \quad \begin{cases} \min fy \\ y(v) = 1 \text{ pour tout } v \in V \\ y_Q \in \{0,1\} \text{ pour toute clique } Q \text{ de } G \end{cases}
$$

- dual de relaxation linéaire

$$
\text{(Dual)} \quad \begin{array}{l} \max \mathbf{1}x \\ x(Q) \leq f(Q) \text{ pour toute clique } Q \text{ de } G \end{array}
$$

[PCliqW] : partition de coût minimum (en cliques)

Données : graphe G, fonction de coût $f : \mathcal{P}(V) \to \mathbb{R}_+$
(f est donnée par un oracle de valeur)
Résultat : une partition en cliques $\mathcal{K} = \{Q_1, Q_2, \dots Q_k\}$ de G
Objectif : minimiser $\sum_{i=1}^{k} f(Q_i)$
Complexité : exponentielle

$$
\text{(PLNE)} \quad \left\{ \begin{array}{l} \min fy \\ y(v) = 1 \text{ pour tout } v \in V \\ y_Q \in \{0,1\} \text{ pour toute clique } Q \text{ de } G \end{array} \right.
$$

- dual de relaxation linéaire

$$
\text{(Dual)} \quad \begin{array}{l} \max \mathbf{1}x \\ x(Q) \leq f(Q) \text{ pour toute clique } Q \text{ de } G \end{array}
$$

- Paires (G, f) telles que (Dual) est TDI ou TDAU ?

[PCliqW] : quelques classiques de la combinatoire polyèdrale

- Le système avec variables $x \in \mathbb{R}^V$

$$x(Q) \leq f(Q) \text{ pour toute clique } Q \text{ de } G$$

[PCliqW] : quelques classiques de la combinatoire polyèdrale

- Le système avec variables $x \in \mathbb{R}^V$

$$x(Q) \leq f(Q) \text{ pour toute clique } Q \text{ de } G$$

- est TDI si G est parfait et $f \equiv 1$ Fulkerson, Lovász 70's

[PCliqW] : quelques classiques de la combinatoire polyèdrale

- Le système avec variables $x \in \mathbb{R}^V$

$$x(Q) \leq f(Q) \text{ pour toute clique } Q \text{ de } G$$

- est TDI si G est parfait et $f \equiv 1$ Fulkerson, Lovász 70's
- est TDAU si G est complet et f est sous-modulaire (Troncation de Dilworth Edmonds 70)

[PCliqW] : quelques classiques de la combinatoire polyèdrale

- Le système avec variables $x \in \mathbb{R}^V$

$$x(Q) \leq f(Q) \text{ pour toute clique } Q \text{ de } G$$

- est TDI si G est parfait et $f \equiv 1$ Fulkerson, Lovász 70's
- est TDAU si G est complet et f est sous-modulaire (Troncation de Dilworth Edmonds 70)
- est TDAU si G est (co-)comparabilité et $f \equiv 1$ Greene, Kleitman, Cameron, Edmonds, Giles 70's

[PCliqW] : quelques classiques de la combinatoire polyèdrale

- Le système avec variables $x \in \mathbb{R}^V$

$$x(Q) \leq f(Q) \text{ pour toute clique } Q \text{ de } G$$

- est TDI si G est parfait et $f \equiv 1$ Fulkerson, Lovász 70's
- est TDAU si G est complet et f est sous-modulaire (Troncation de Dilworth Edmonds 70)
- est TDAU si G est (co-)comparabilité et $f \equiv 1$ Greene, Kleitman, Cameron, Edmonds, Giles 70's
- d'autres cas intéressants ?

[PCliqW] : une hybridation fructueuse mais complexe

- Complexité de [PCliqW] et cas TDI du système

$$x(Q) \leq f(Q) \text{ pour toute clique } Q \text{ de } G$$

[PCliqW] : une hybridation fructueuse mais complexe

- Complexité de [PCliqW] et cas TDI du système

$$x(Q) \leq f(Q) \text{ pour toute clique } Q \text{ de } G$$

f \ G	LGBIP	sans-$P4$	Intervalles	Triangulé	Parfait
Unitaire	P	P	P	P	P
Max-batch	P	P*	P*	NPC	NPC
Steiner TSP sur un arbre	P	?	NPC	NPC	NPC
Sous-modulaire (modèle oracle)	P*	EXP*	NPH	NPH	EXP

[PCliqW] : une hybridation fructueuse mais complexe

- Complexité de [PCliqW] et cas TDI du système

$$x(Q) \leq f(Q) \text{ pour toute clique } Q \text{ de } G$$

f \ G	LGBIP	sans-$P4$	Intervalles	Triangulé	Parfait
Unitaire	P	P	P	P	P
Max-batch	P	P *	P *	NPC	NPC
Steiner TSP sur un arbre	P	?	NPC	NPC	NPC
Sous-modulaire (modèle oracle)	P *	EXP *	NPH	NPH	EXP

- Pont entre relations min-max pour fonctions sous-modulaires et graphes parfaits, mais pas de généralisation commune

Apport énergetique

- Extension de pré-coloration ($[\overline{PrExt}]$-parfait = Meyniel)
- Partition en cliques bornées (conjectures borné-parfait)
- Partition de coût minimum (systèmes TDAU et TDI)

Apport énergetique, fibres alimentaires

- Extension de pré-coloration ($[\overline{PrExt}]$-parfait = Meyniel)
- Partition en cliques bornées (conjectures borné-parfait)
- Partition de coût minimum (systèmes TDAU et TDI)

♣ Conjecture de Fraenkel pour les palindrômes Brauner, Jost 03

♣ Ordonnancement juste-à-temps Lebacque, Jost, Brauner 04

♣ Cas polynomial de [PCliqW] Gijswijt, Jost, Queyranne 06
G est d'intervalles et f est valeur-polymatroïdale

Apport énergetique, fibres alimentaires et vitamines

- Extension de pré-coloration ($[\overline{PrExt}]$-parfait = Meyniel)
- Partition en cliques bornées (conjectures borné-parfait)
- Partition de coût minimum (systèmes TDAU et TDI)

♣ Conjecture de Fraenkel pour les palindrômes Brauner, Jost 03
♣ Ordonnancement juste-à-temps Lebacque, Jost, Brauner 04
♣ Cas polynomial de [PCliqW] Gijswijt, Jost, Queyranne 06
G est d'intervalles et f est valeur-polymatroïdale

♡ Jeux coopératif sur des structures combinatoires
♡ Classification de problèmes d'ordonnancement chromatique

Apport énergetique, fibres alimentaires et vitamines

- Extension de pré-coloration ([$\overline{PrExt}$]-parfait = Meyniel)
- Partition en cliques bornées (conjectures borné-parfait)
- Partition de coût minimum (systèmes TDAU et TDI)

♣ Conjecture de Fraenkel pour les palindrômes Brauner, Jost 03
♣ Ordonnancement juste-à-temps Lebacque, Jost, Brauner 04
♣ Cas polynomial de [PCliqW] Gijswijt, Jost, Queyranne 06
G est d'intervalles et f est valeur-polymatroïdale

♡ Jeux coopératif sur des structures combinatoires
♡ Classification de problèmes d'ordonnancement chromatique
♡ Freakombinatorics :
  ♡ PLNE avec variables sur les arêtes pour coloration Cornaz, Jost
  ♡ PLNE avec variables sur les sommets pour le TSP

Apport énergetique, fibres alimentaires et vitamines

- Extension de pré-coloration ([$\overline{PrExt}$]-parfait = Meyniel)
- Partition en cliques bornées (♡ conjectures borné-parfait)
- Partition de coût minimum (♡ systèmes TDAU et TDI)

♣ Conjecture de Fraenkel pour les palindrômes Brauner, Jost 03
♣ Ordonnancement juste-à-temps Lebacque, Jost, Brauner 04
♣ Cas polynomial de [PCliqW] Gijswijt, Jost, Queyranne 06
G est d'intervalles et f est valeur-polymatroïdale

♡ Jeux coopératif sur des structures combinatoires
♡ Classification de problèmes d'ordonnancement chromatique
♡ Freakombinatorics :
  ♡ PLNE avec variables sur les arêtes pour coloration Cornaz, Jost
  ♡ PLNE avec variables sur les sommets pour le TSP