Ordonnancement chromatique : polyèdres, complexité et classification

Vincent JOST

Soutenance de thèse le 5 Octobre 2006 à 14h00

Jury
Pierre BÉRARD (président) professeur à l'UJF à Grenoble
Gérard CORNUÉJOLS (rapporteur) professeur à Aix-Marseille II
Dominique DE WERRA (rapporteur) professeur à l'EPFL à Lausanne
Philippe BAPTISTE (examinateur) CR CNRS au LIX à Palaiseau
András SEBŐ (directeur) DR CNRS à Grenoble
Nadia BRAUNER (co-directrice) MdC-HDR à l'UPMF à Grenoble

Résumé
La coloration des graphes permet de modéliser certaines applications de la recherche opérationnelle. Souvent, le problème classique de la coloration minimum n'est pas assez souple pour exprimer les contraintes qui apparaissent naturellement dans des contextes appliqués. Or certains des raffinements nécessaires sont déjà connus dans la théorie de l'ordonnancement. C'est du mélange de formulations issues de la coloration et de l'ordonnancement que naît le terme "ordonnancement chromatique".

Un tel problème est "l'extension pré-colorée", dans lequel certains sommets du graphe sont déjà coloriés avant que l'on ne décide la couleur des autres. Par exemple, le "Sudoku" peut être formulé comme l'extension pré-colorée d'un graphe à 81 sommets.

Nous étudions aussi le problème de la "coloration b-bornée", dans lequel chaque couleur doit être utilisée par au plus b sommets. Ce modèle est particulièrement utile quand les sommets du graphe représentent des objets du monde physique, comme des personnes que l'on doit répartir autour de tables lors d'un mariage, dans des bureaux au sein d'un laboratoire, ou encore dans des véhicules lors d'un covoiturage.

Nous construisons de nouvelles bornes inférieures pour le nombre minimum de couleurs nécessaires pour respecter des "contraintes exotiques", issues de problèmes appliqués. Les résultats principaux montrent que ces bornes inférieures donnent des formules min-max dans des sous-classes de graphes parfaits. En particulier, nous obtenons des formules min-max et des algorithmes efficaces pour les compléments de graphes d'intervalles (fondamentaux dans les problèmes de production et de transport) ou les line-graphes de bipartis (fondamentaux dans les problèmes d'emploi du temps).

Ces problèmes d'ordonnancement chromatique sont souvent NP-difficiles même pour les graphes bipartis (et donc pour les graphes parfaits). En fonction du problème et de la classe de graphe à laquelle on s'intéresse, nous avons tenté de tracer les frontières entre les cas polynomiaux, les cas NP-difficiles et les cas où la borne inférieure proposée donne une formule min-max. Ceci permet de résumer les principaux résultats connus et d'orienter les recherches pour trouver des bornes inférieures plus générales ainsi que des algorithmes ayant un bon rapport d'approximation.

1 Quelques éléments pour suivre

– **Batch** : ensemble de tâches traitées en même temps
– **Clique** : ensemble de sommets tous reliés deux à deux
– **Stable** : ensemble de sommets n'induisant aucune arête
– $\overline{\chi}(\mathbf{G})$: nombre minimum de cliques pour partitionner les sommets de G
– $\alpha(\mathbf{G})$: taille maximum d'un stable dans G

2 Extension de pré-partition en cliques [$\overline{\textbf{PrExt}}$]

Données : graphe G, entier k, famille de cliques disjointes $\mathcal{Q} = \{Q_1, Q_2, \ldots\}$ de G **Question :** $\exists$ partition de G en k cliques qui étende $\mathcal{Q}$?

3 Partition en cliques de taille bornée [PCliqB]

Données : graphe G, entiers b et k **Question :** $\exists$ partition de G en k cliques ayant au plus b sommets ?

Intérêt et définition de $\sigma_{\mathbf{b}}(\mathbf{G})$

$$\overline{\chi}_b(G) \geq \sigma_b(G) := \max_{U \subseteq V} \sum_{i=1}^{t} \left\lceil \frac{|C_i(U)|}{b} \right\rceil$$

avec $C_1(U), C_2(U), \ldots C_t(U)$:= composantes connexes de $G[U]$

4 Partition de coût minimum [PCliqW]

Données : graphe G, fonction de coût $f : \mathcal{P}(V) \to \mathbb{R}_+$ (f est donnée par un oracle de valeur) **Résultat :** une partition en cliques $\mathcal{K} = \{Q_1, Q_2, \ldots Q_k\}$ de $V(G)$ **Objectif :** minimiser $\sum_{i=1}^{k} f(Q_i)$

$$\text{(PLNE)} \quad \begin{cases} \min fy \\ y(v) = 1 \text{ pour tout } v \in V \\ y_Q \in \{0,1\} \text{ pour toute clique } Q \text{ de } G \end{cases}$$

Dual de relaxation linéaire

$$\text{(Dual)} \qquad \begin{array}{l} \max \mathbf{1}x \\ x(Q) \leq f(Q) \text{ pour toute clique } Q \text{ de } G \end{array}$$

Notions utiles de combinatoire polyédrale

– TDI : (système) *Totally Dual Integer*
– TDAU : (système) Totalement Dualement Activement Unimodulaire
– TTU : (matrice) Totalement Unimodulaire

$$\text{TTU} \Rightarrow \text{TDAU} \Rightarrow \text{box-TDI} \Rightarrow \text{TDI} \Rightarrow \begin{cases} \text{polyèdre entier} \\ \text{formule min-max} \end{cases}$$