

# Combinatoire bijective des cartes planaires

de l'algébricité des séries génératrices  
à l'étude de grandes cartes aléatoires

GILLES SCHAEFFER      CNRS & École Polytechnique

Partially supported by ERC RStG 208471 "ExploreMaps"

Colloquium de l'institut Camille Jordan, lundi 7 mai 2012

Cartes et formules de Tutte

Séries rationnelles et algébriques en combinatoire

Cartes, arbres et énumération bijective

Grandes cartes aléatoires

Aperçu combinatoire de la carte Brownienne

## Cartes et formules de Tutte

Séries rationnelles et algébriques en combinatoire

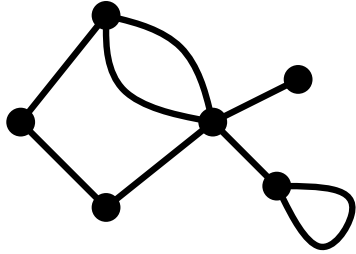
Cartes, arbres et énumération bijective

Grandes cartes aléatoires

Aperçu combinatoire de la carte Brownienne

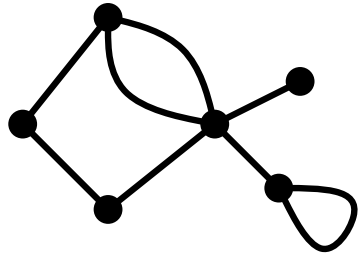
# Graphes plans et cartes planaires

graphe plan = { plongement d'un graphe connexe  
dans le plan



# Graphes plans et cartes planaires

graphe plan = { plongement d'un graphe connexe  
dans le plan



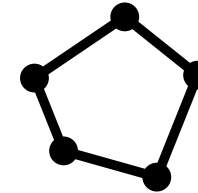
sommets



arêtes

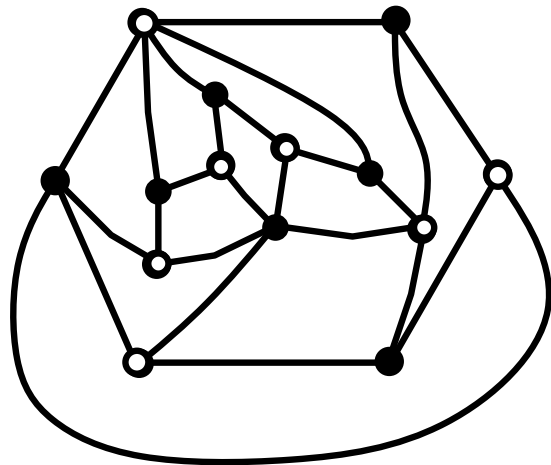
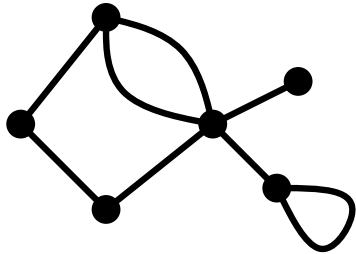


faces



# Graphes plans et cartes planaires

graphe plan = { plongement d'un graphe connexe  
dans le plan



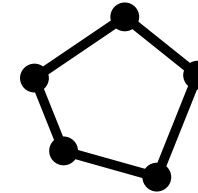
sommets



arêtes

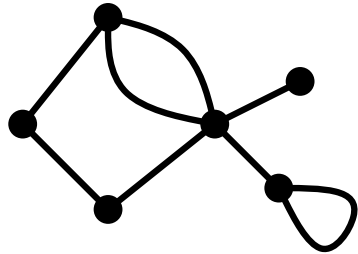


faces



# Graphes plans et cartes planaires

graphe plan =  $\left\{ \begin{array}{l} \text{plongement d'un graphe connexe} \\ \text{dans le plan} \end{array} \right.$



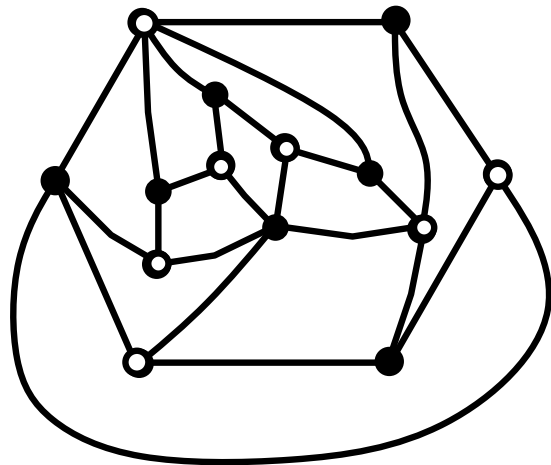
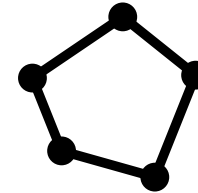
sommets



arêtes



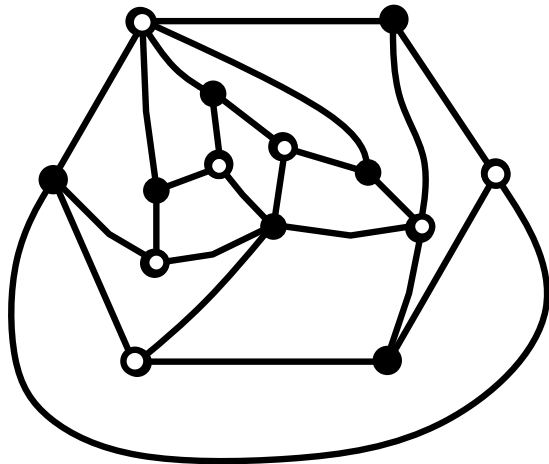
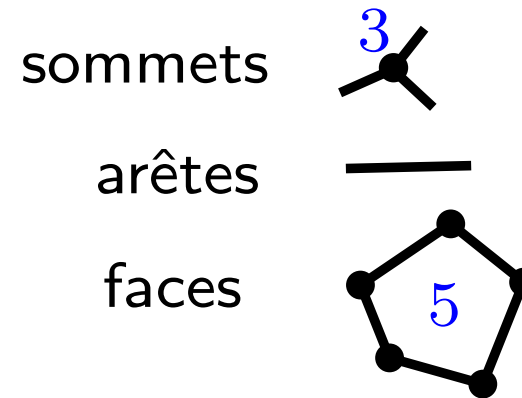
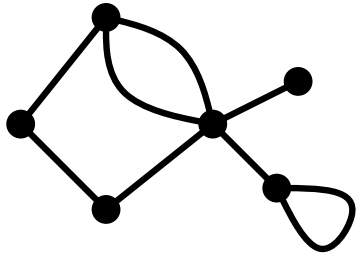
faces



degré d'un sommet ou d'une face = nb de "coins"

# Graphes plans et cartes planaires

graphe plan =  $\left\{ \begin{array}{l} \text{plongement d'un graphe connexe} \\ \text{dans le plan} \end{array} \right.$

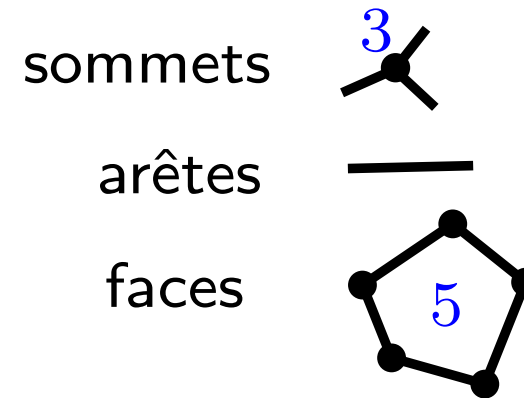
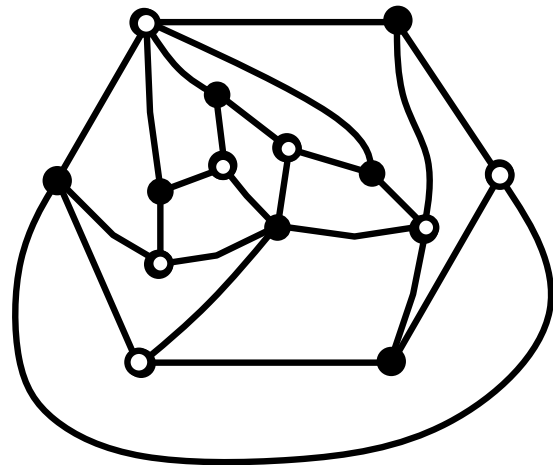
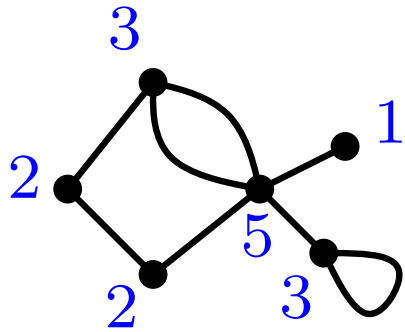


degré d'un sommet ou d'une face = nb de "coins"



# Graphes plans et cartes planaires

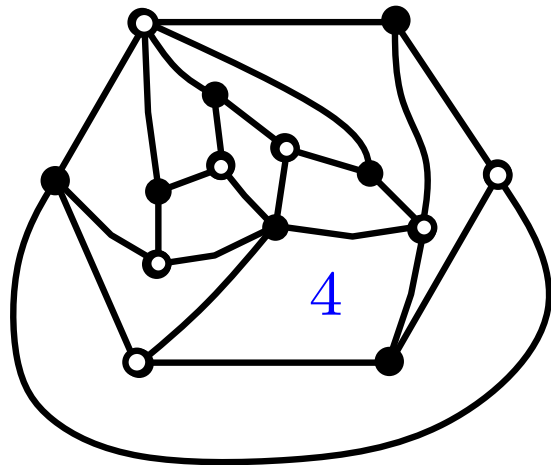
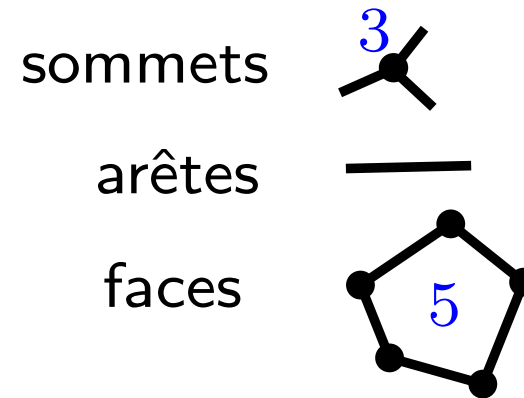
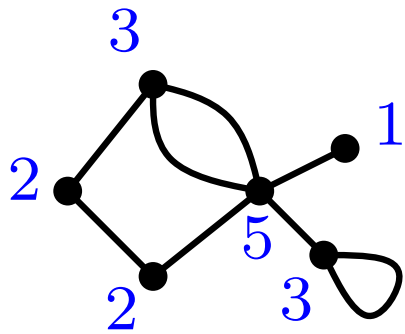
graphe plan =  $\left\{ \begin{array}{l} \text{plongement d'un graphe connexe} \\ \text{dans le plan} \end{array} \right.$



degré d'un sommet ou d'une face = nb de "coins"

# Graphes plans et cartes planaires

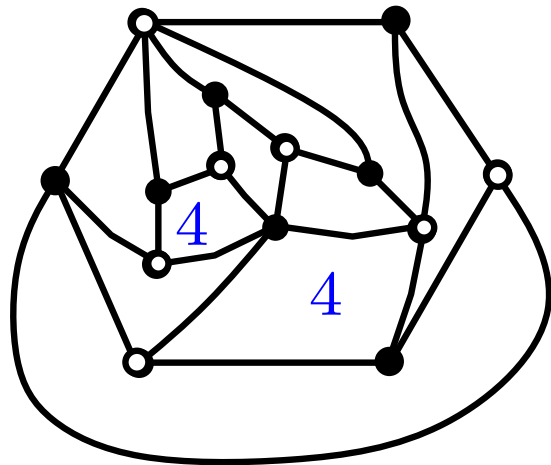
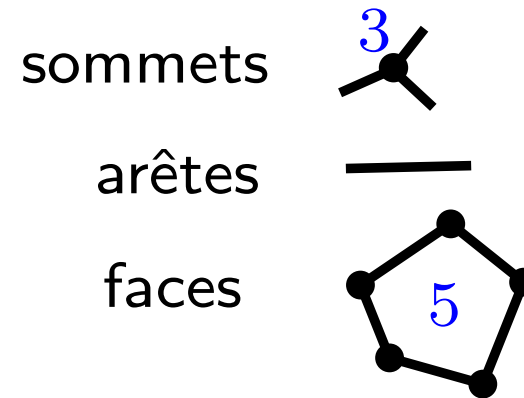
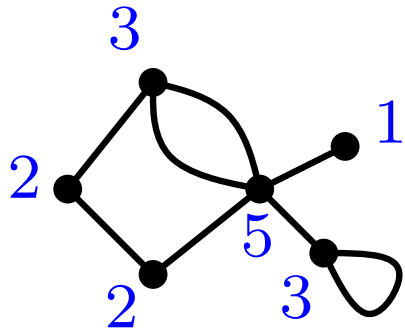
graphe plan =  $\left\{ \begin{array}{l} \text{plongement d'un graphe connexe} \\ \text{dans le plan} \end{array} \right.$



degré d'un sommet ou d'une face = nb de "coins"

# Graphes plans et cartes planaires

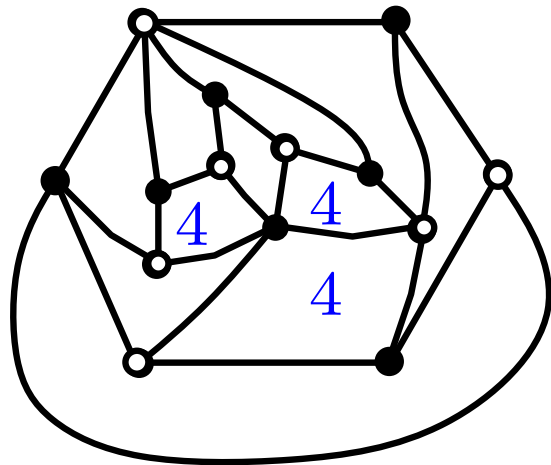
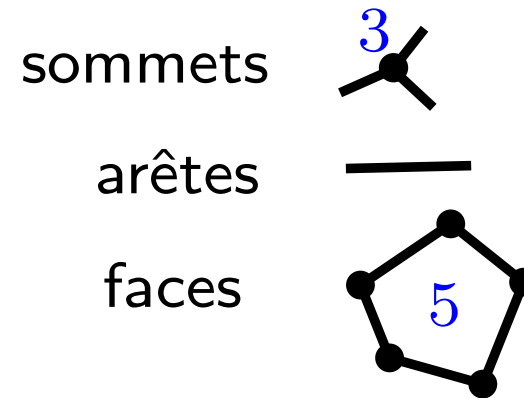
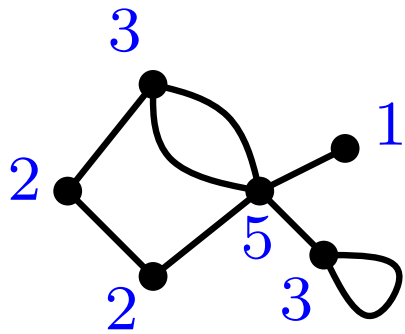
graphe plan =  $\left\{ \begin{array}{l} \text{plongement d'un graphe connexe} \\ \text{dans le plan} \end{array} \right.$



degré d'un sommet ou d'une face = nb de "coins"

# Graphes plans et cartes planaires

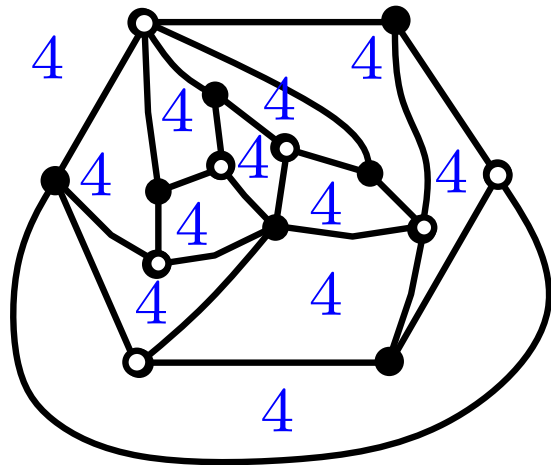
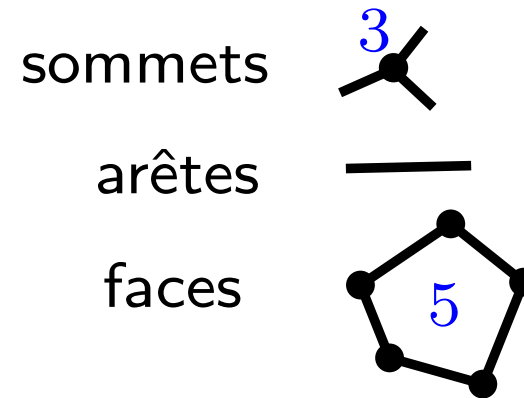
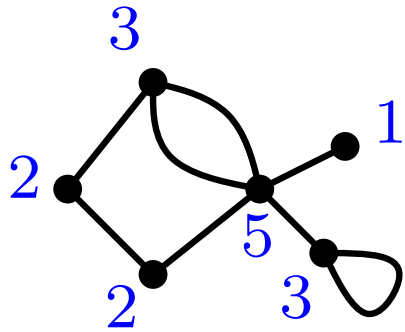
graphe plan =  $\left\{ \begin{array}{l} \text{plongement d'un graphe connexe} \\ \text{dans le plan} \end{array} \right.$



degré d'un sommet ou d'une face = nb de "coins"

# Graphes plans et cartes planaires

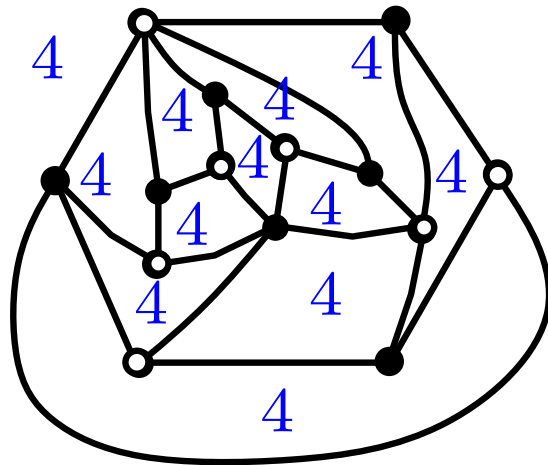
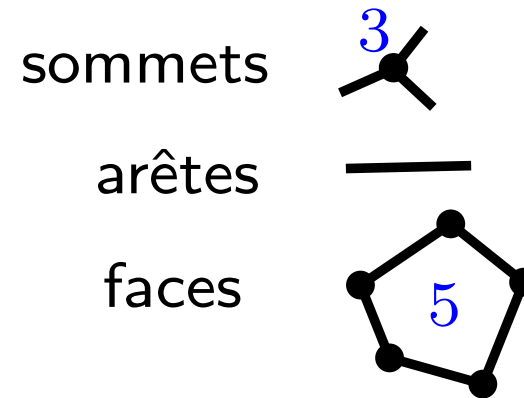
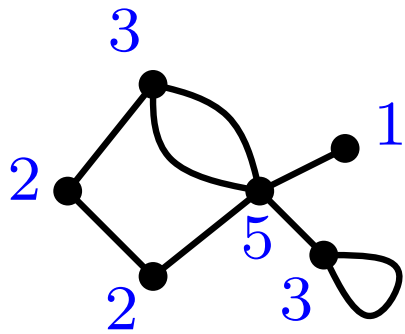
graphe plan = { plongement d'un graphe connexe  
dans le plan



degré d'un sommet ou d'une face = nb de "coins"

# Graphes plans et cartes planaires

graphe plan = { plongement d'un graphe connexe  
dans le plan

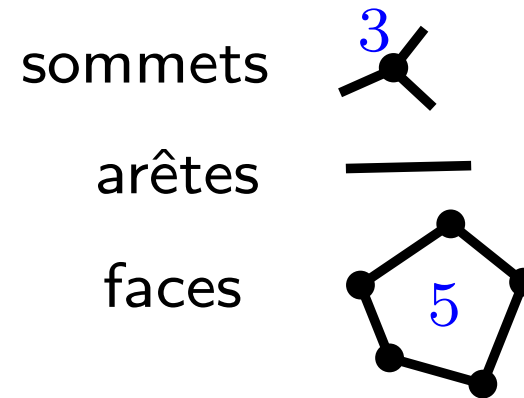
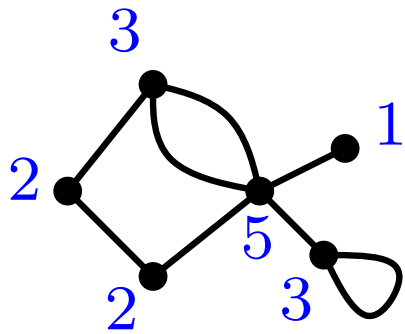


quadrangulation  
plane

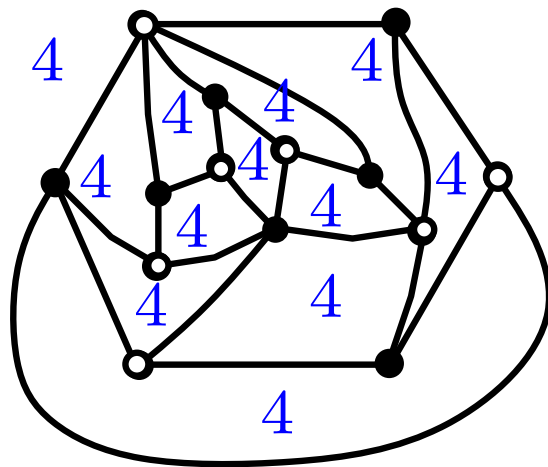
degré d'un sommet ou d'une face = nb de "coins"

# Graphes plans et cartes planaires

graphe plan = { plongement d'un graphe connexe  
dans le plan

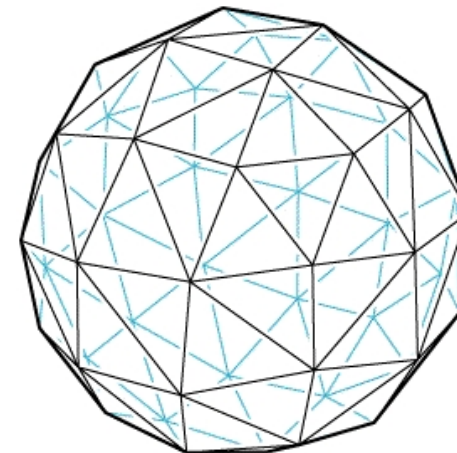


degré d'un sommet ou d'une face = nb de "coins"



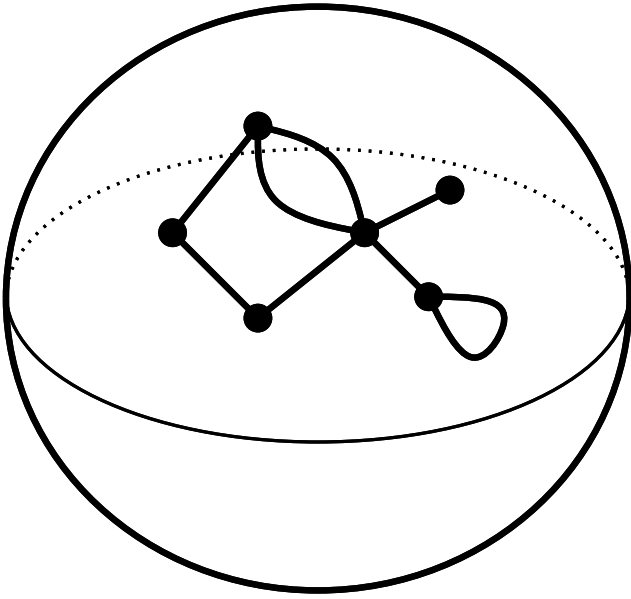
quadrangulation  
plane

triangulation de  
la sphère



# Graphes plans et cartes planaires

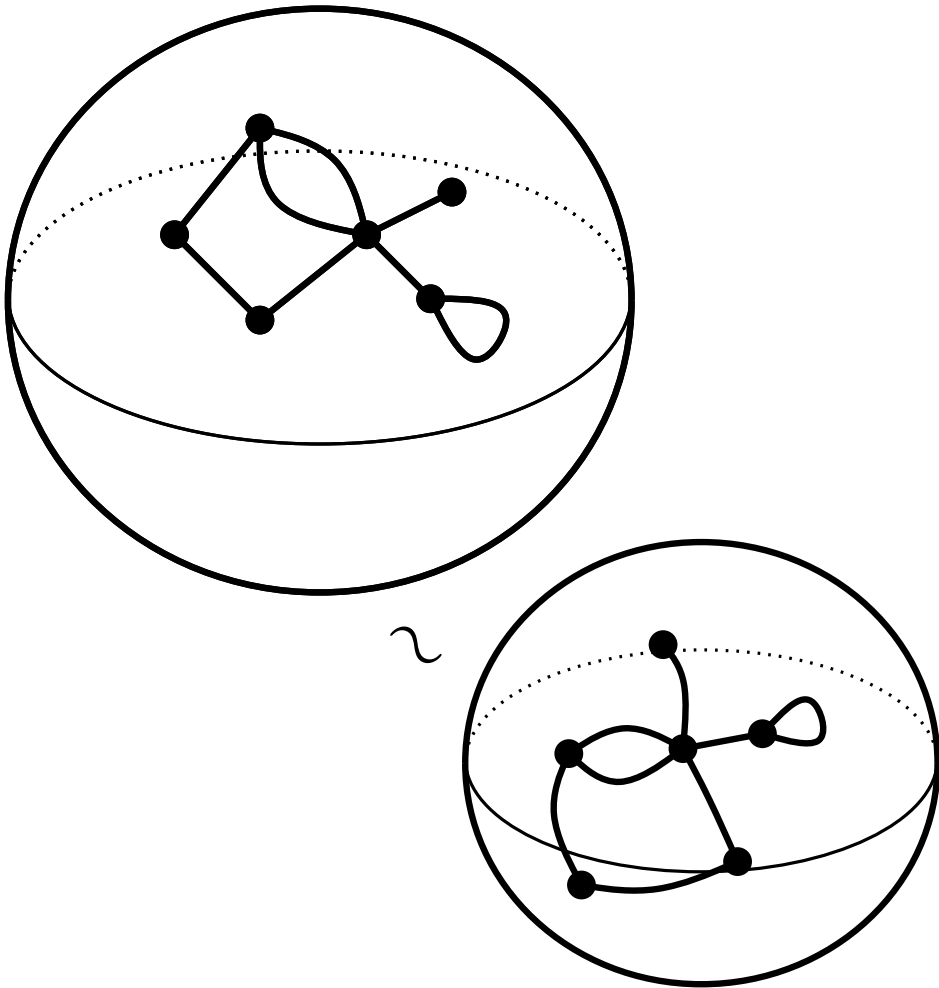
graphe plan =  $\left\{ \begin{array}{l} \text{plongement d'un graphe connexe} \\ \text{dans le plan ou la sphère} \end{array} \right.$





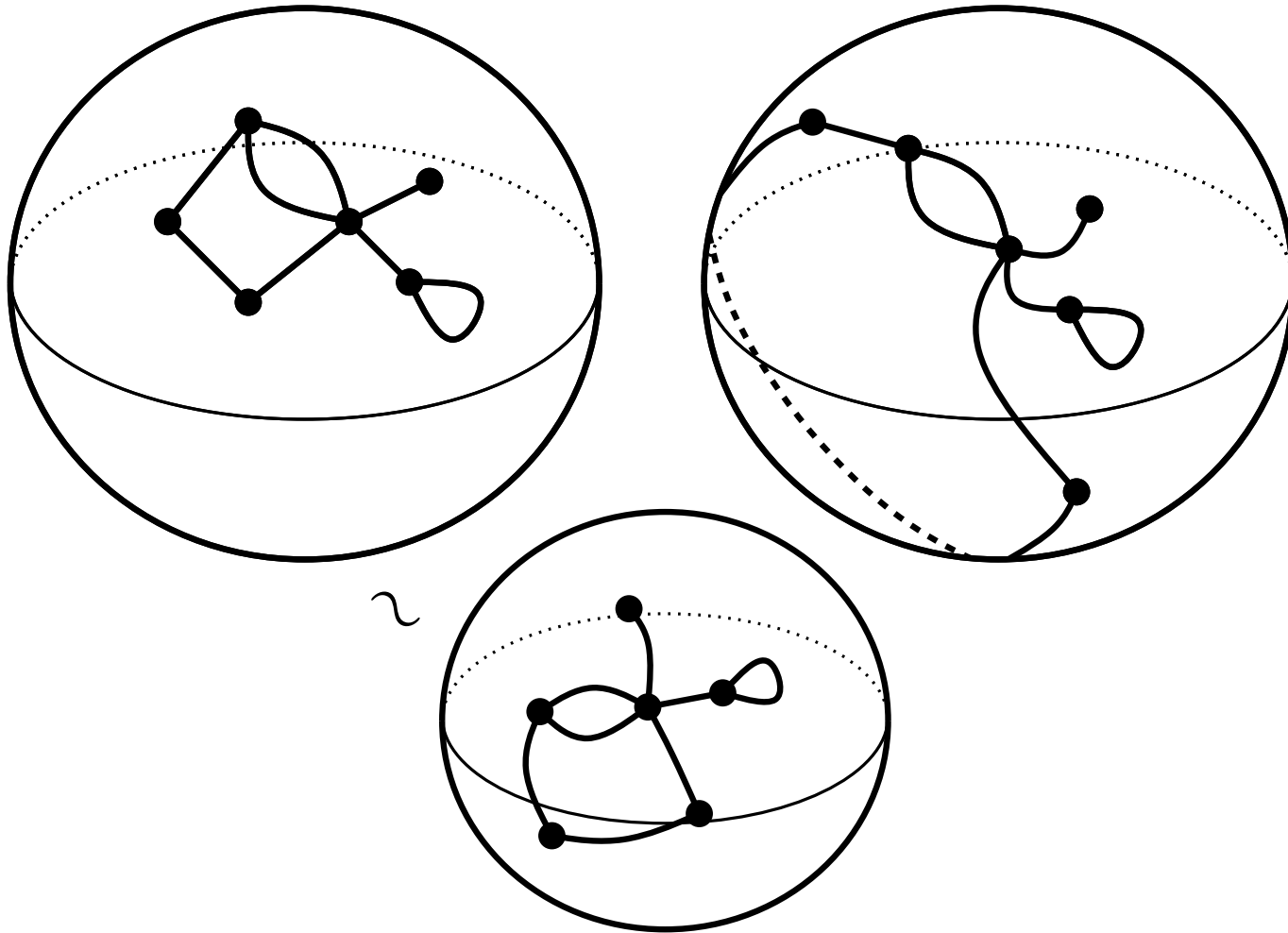
# Graphes plans et cartes planaires

carte planaire =  $\left\{ \begin{array}{l} \text{graphe plan} = \left\{ \begin{array}{l} \text{plongement d'un graphe connexe} \\ \text{dans le plan} \end{array} \right. \\ \text{la sphère} \\ \text{considé} \text{r} \text{é} \text{ à homéomorphisme de la sphère orientée près} \end{array} \right.$



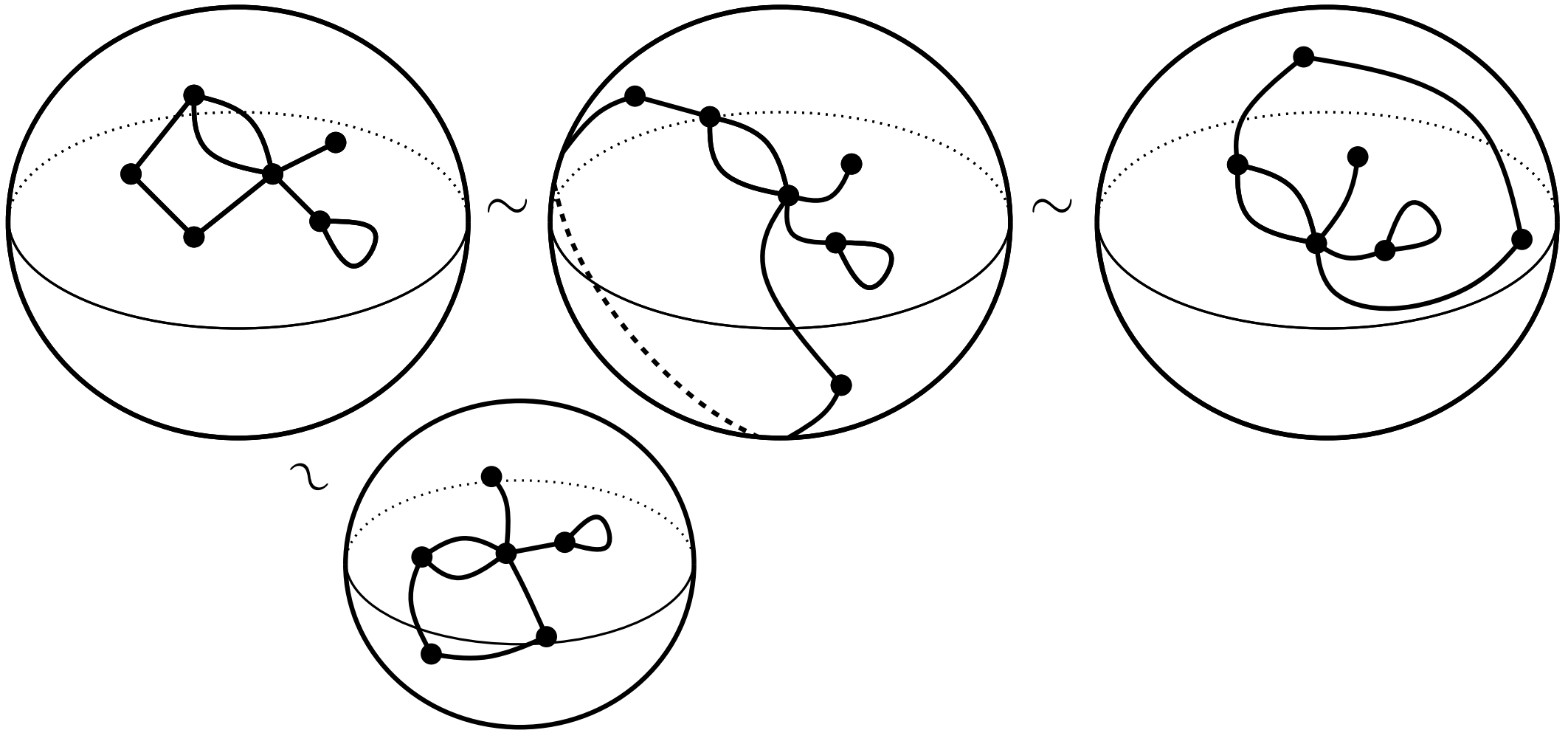
# Graphes plans et cartes planaires

carte planaire =  $\left\{ \begin{array}{l} \text{graphe plan} = \left\{ \begin{array}{l} \text{plongement d'un graphe connexe} \\ \text{dans le plan ou la sphère} \end{array} \right. \\ \text{considéré à homéomorphisme de la sphère orientée près} \end{array} \right.$



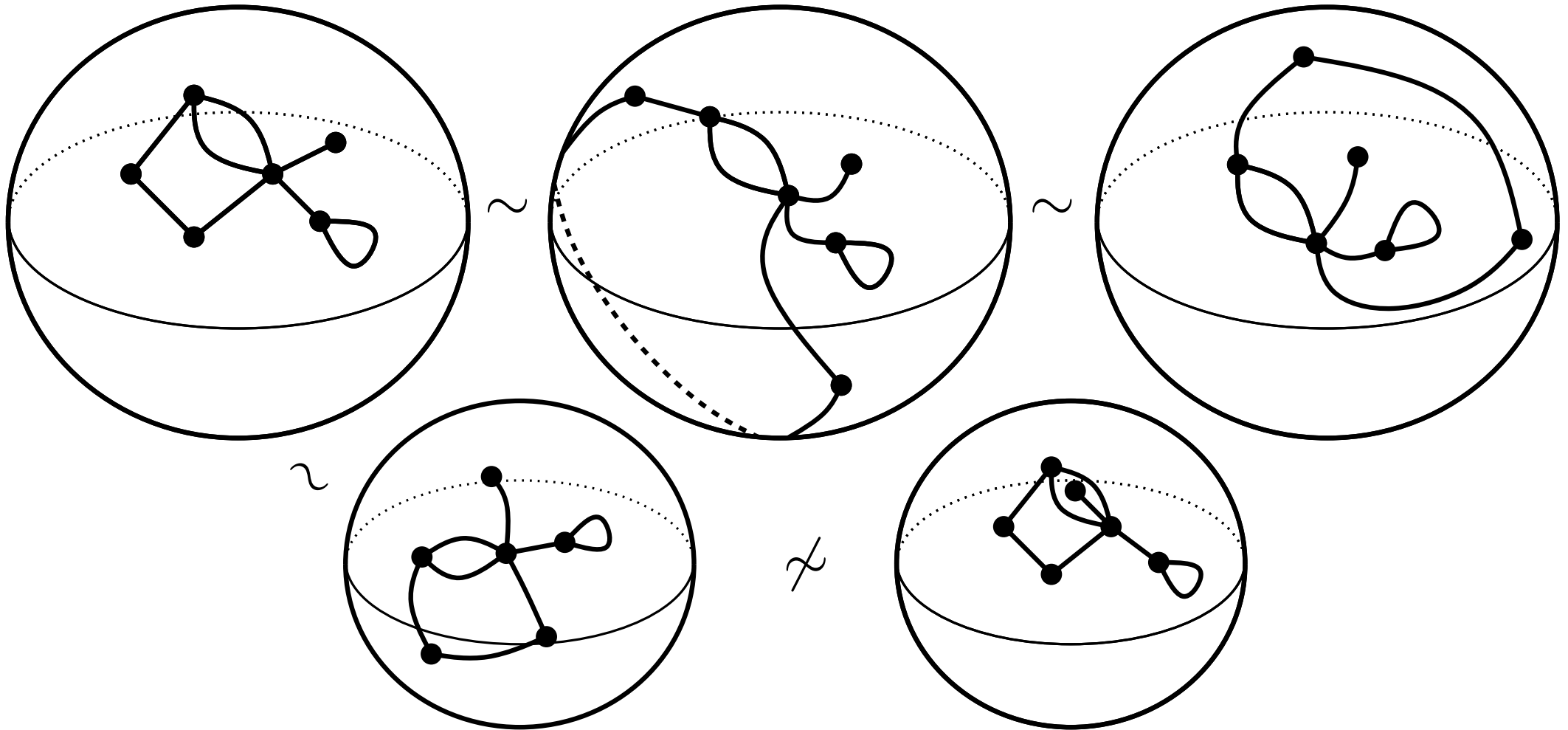
# Graphes plans et cartes planaires

carte planeaire =  $\left\{ \begin{array}{l} \text{graphe plan} = \left\{ \begin{array}{l} \text{plongement d'un graphe connexe} \\ \text{dans le plan} \end{array} \right. \\ \text{dans la sphère} \end{array} \right.$   
considéré à homéomorphisme de la sphère orientée près



# Graphes plans et cartes planaires

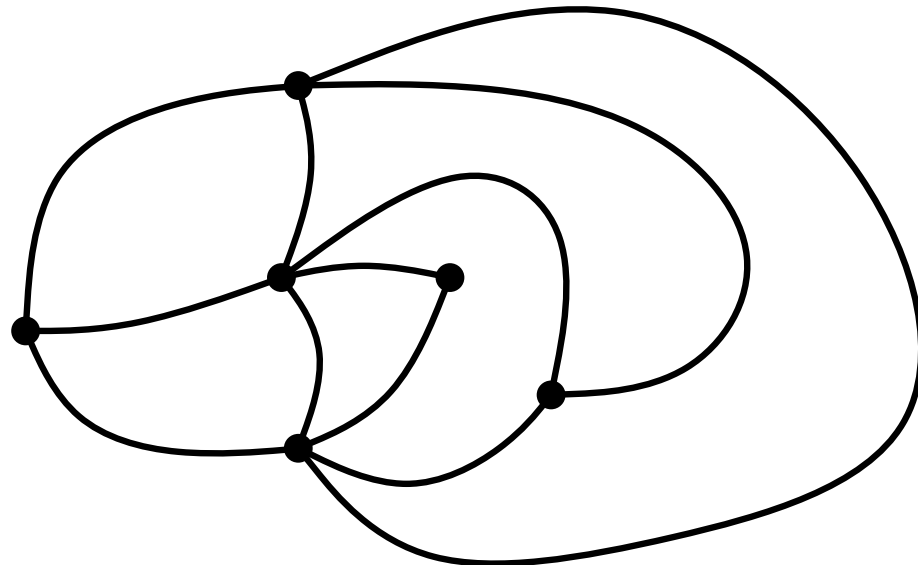
carte planaire =  $\left\{ \begin{array}{l} \text{graphe plan} = \left\{ \begin{array}{l} \text{plongement d'un graphe connexe} \\ \text{dans le plan ou la sphère} \end{array} \right. \\ \text{considéré à homéomorphisme de la sphère orientée près} \end{array} \right.$



# Cartes planaires, arbres couvrants et dualité

Toute carte planaire satisfait la relation d'Euler:

$$(\#\text{sommets}-1)+(\#\text{faces}-1)= \#\text{arêtes}$$

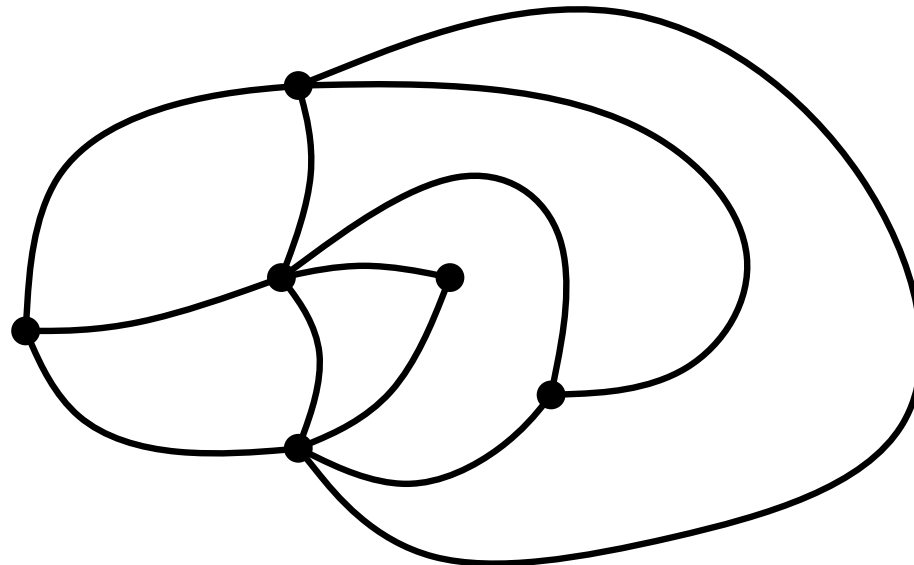


# Cartes planaires, arbres couvrants et dualité

Toute carte planaire satisfait la relation d'Euler:

$$(\#\text{sommets}-1)+(\#\text{faces}-1)= \#\text{arêtes}$$

Preuve ?



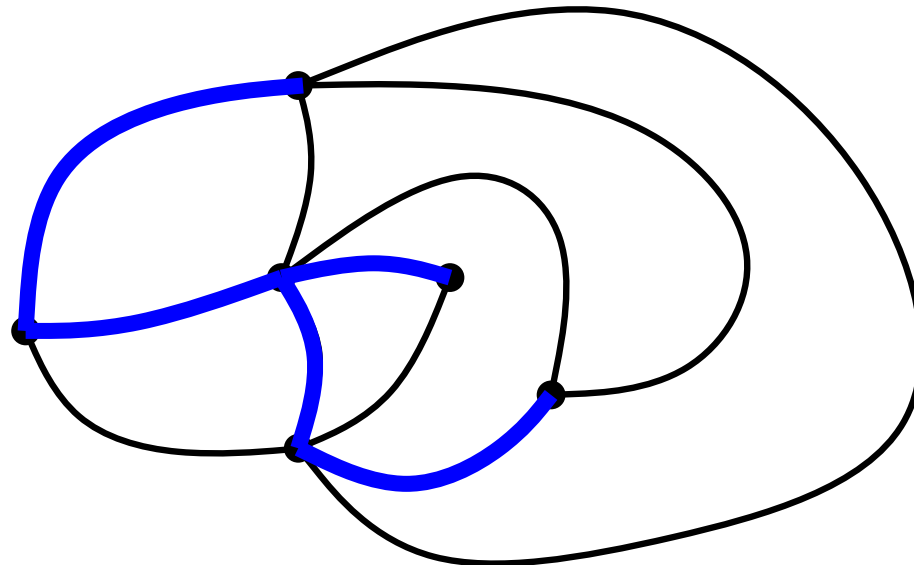
# Cartes planaires, arbres couvrants et dualité

Toute carte planaire satisfait la relation d'Euler:

$$(\#\text{sommets}-1)+(\#\text{faces}-1)= \#\text{arêtes}$$

Preuve ?

Un **arbre couvrant** est un sous-graphe connexe sans cycle et qui visite tous les sommets. Une **carte boisée** est une carte munie d'un arbre couvrant.



# Cartes planaires, arbres couvrants et dualité

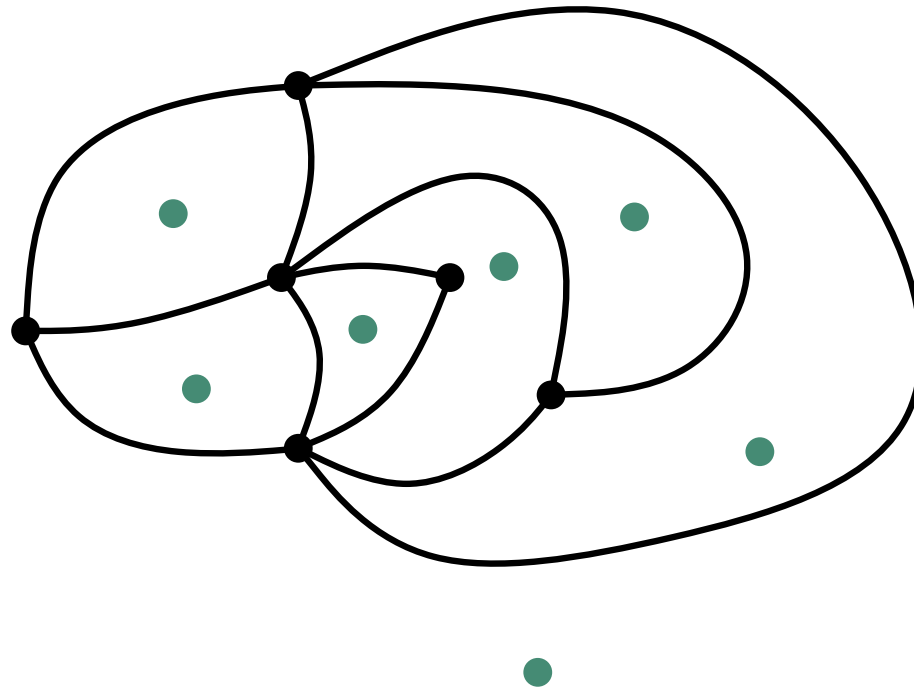
Toute carte planaire satisfait la relation d'Euler:

$$(\#\text{sommets}-1)+(\#\text{faces}-1)= \#\text{arêtes}$$

Preuve ?

Un **arbre couvrant** est un sous-graphe connexe sans cycle et qui visite tous les sommets. Une **carte boisée** est une carte munie d'un arbre couvrant.

La carte **duale** d'une carte est la carte d'incidence entre les faces





# Cartes planaires, arbres couvrants et dualité

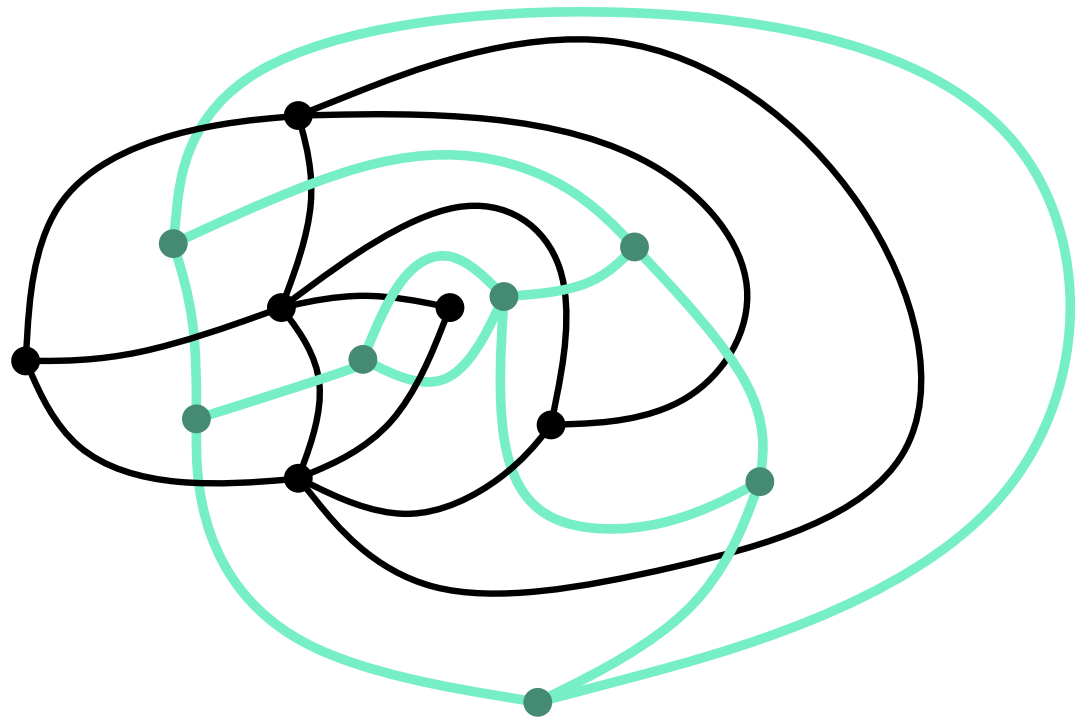
Toute carte planaire satisfait la relation d'Euler:

$$(\#\text{sommets}-1)+(\#\text{faces}-1)= \#\text{arêtes}$$

Preuve ?

Un **arbre couvrant** est un sous-graphe connexe sans cycle et qui visite tous les sommets. Une **carte boisée** est une carte munie d'un arbre couvrant.

La carte **duale** d'une carte est la carte d'incidence entre les faces



# Cartes planaires, arbres couvrants et dualité

Toute carte planaire satisfait la relation d'Euler:

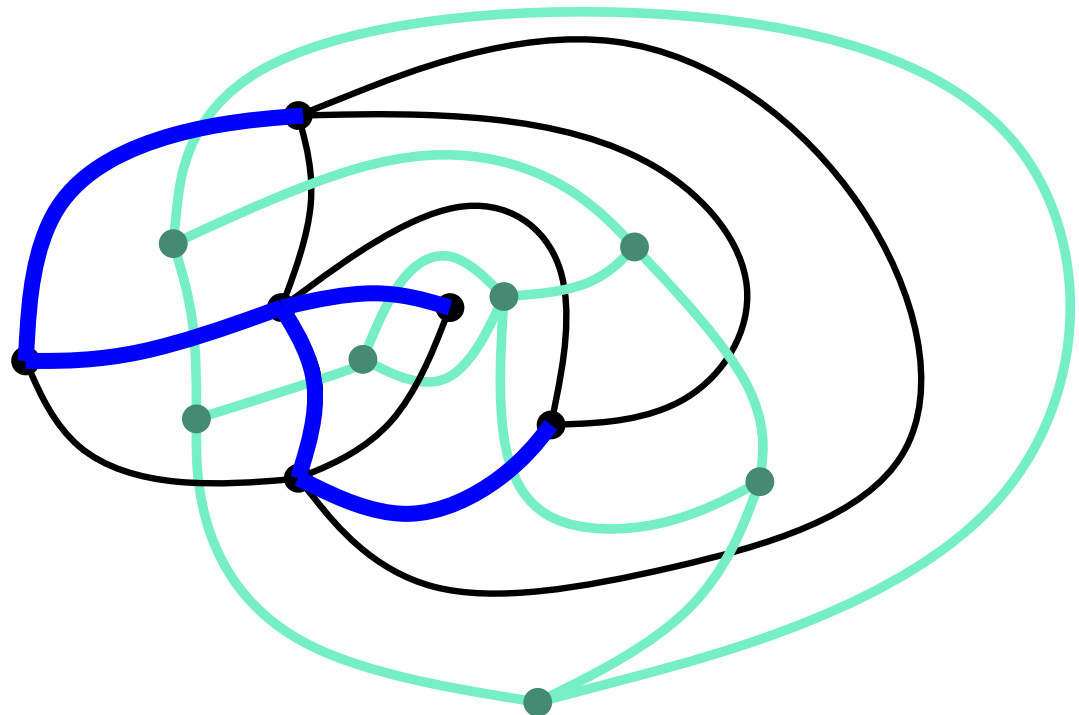
$$(\#\text{sommets}-1)+(\#\text{faces}-1)= \#\text{arêtes}$$

Preuve ?

Un **arbre couvrant** est un sous-graphe connexe sans cycle et qui visite tous les sommets. Une **carte boisée** est une carte munie d'un arbre couvrant.

La carte **duale** d'une carte est la carte d'incidence entre les faces

La carte duale d'une carte boisée est une carte boisée: elle est naturellement munie d'un **arbre couvrant dual**.



# Cartes planaires, arbres couvrants et dualité

Toute carte planaire satisfait la relation d'Euler:

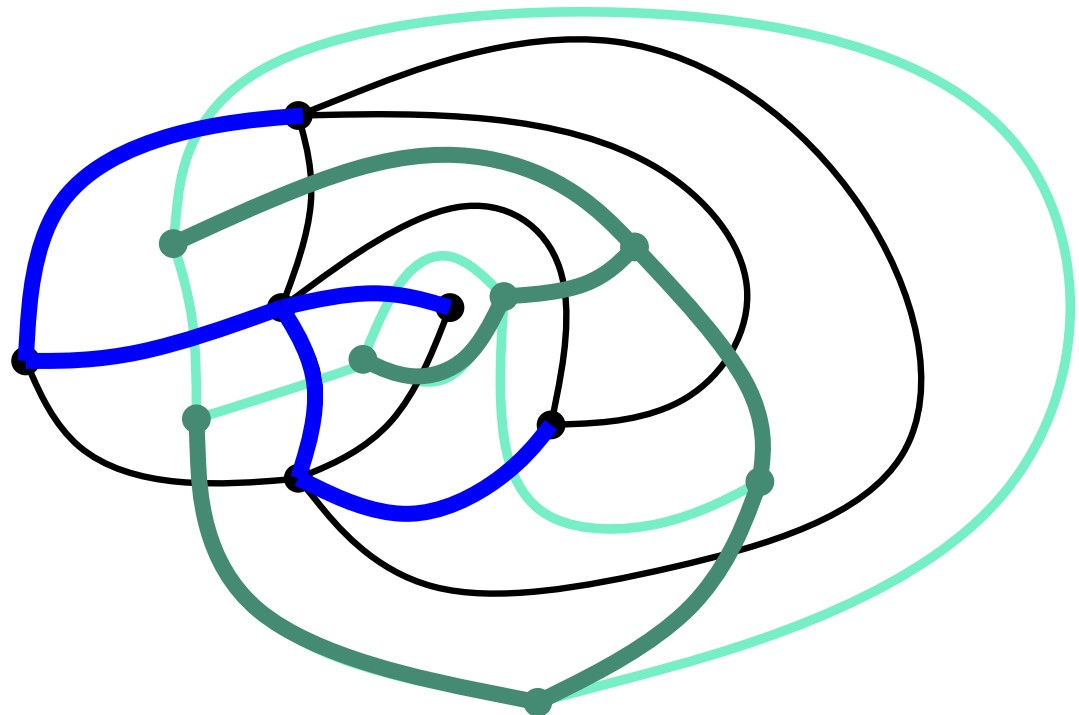
$$(\#\text{sommets}-1)+(\#\text{faces}-1)= \#\text{arêtes}$$

Preuve ?

Un **arbre couvrant** est un sous-graphe connexe sans cycle et qui visite tous les sommets. Une **carte boisée** est une carte munie d'un arbre couvrant.

La carte **duale** d'une carte est la carte d'incidence entre les faces

La carte duale d'une carte boisée est une carte boisée: elle est naturellement munie d'un **arbre couvrant dual**. Preuve : lemme de Jordan!



# Cartes planaires, arbres couvrants et dualité

Toute carte planaire satisfait la relation d'Euler:

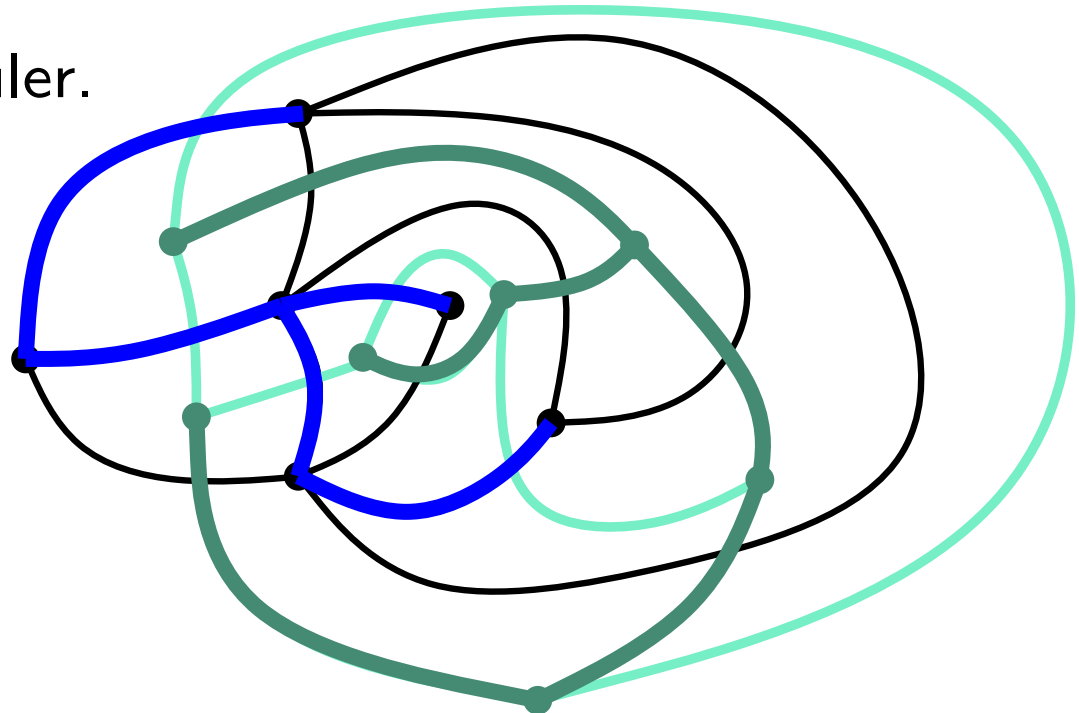
$$(\#\text{sommets}-1)+(\#\text{faces}-1)= \#\text{arêtes}$$

Un **arbre couvrant** est un sous-graphe connexe sans cycle et qui visite tous les sommets. Une **carte boisée** est une carte munie d'un arbre couvrant.

La carte **duale** d'une carte est la carte d'incidence entre les faces

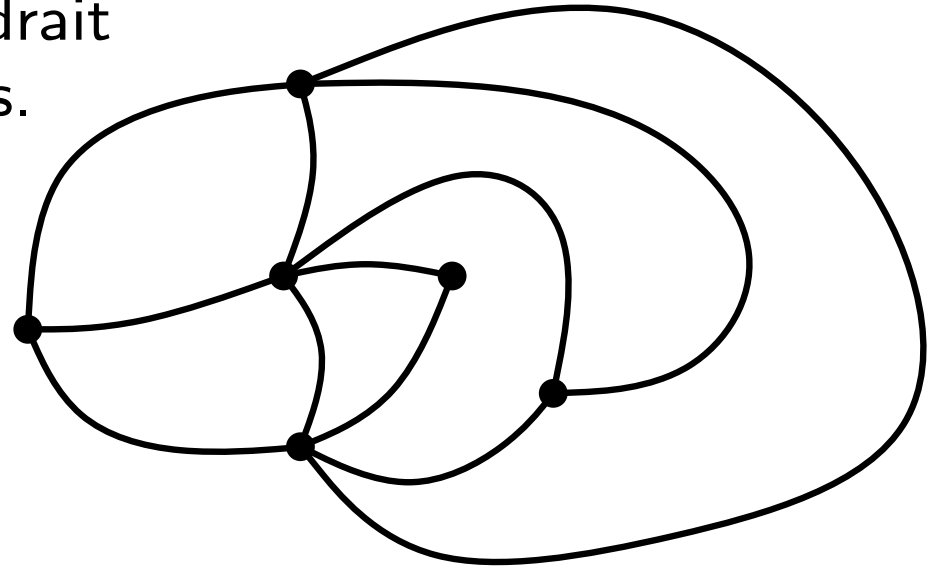
La carte duale d'une carte boisée est une carte boisée: elle est naturellement munie d'un **arbre couvrant dual**. Preuve : lemme de Jordan!

On en déduit la relation d'Euler.



## Comparer, lister les cartes planaires

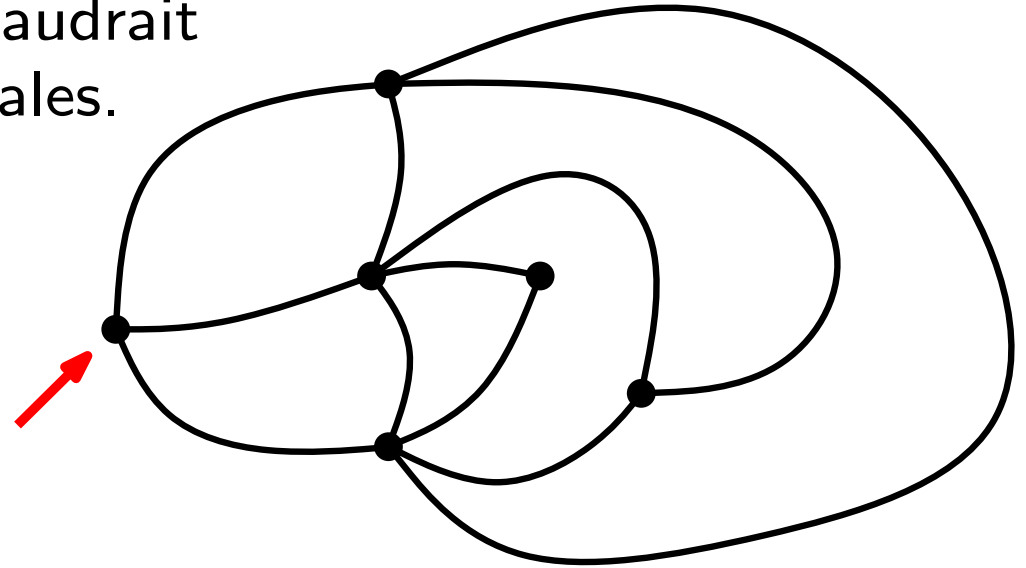
On voudra compter des cartes, il faudrait déjà savoir dire si 2 cartes sont égales.



# Comparer, lister les cartes planaires

On voudra compter des cartes, il faudrait déjà savoir dire si 2 cartes sont égales.

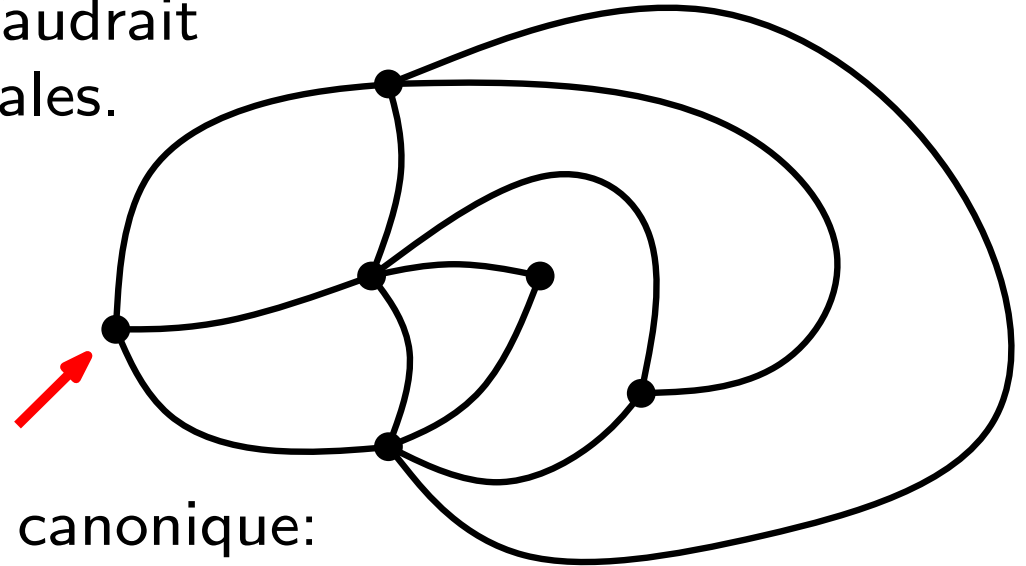
**Carte enracinée** = carte avec un coin marqué (la racine)



# Comparer, lister les cartes planaires

On voudra compter des cartes, il faudrait déjà savoir dire si 2 cartes sont égales.

**Carte enracinée** = carte avec un coin marqué (la racine)



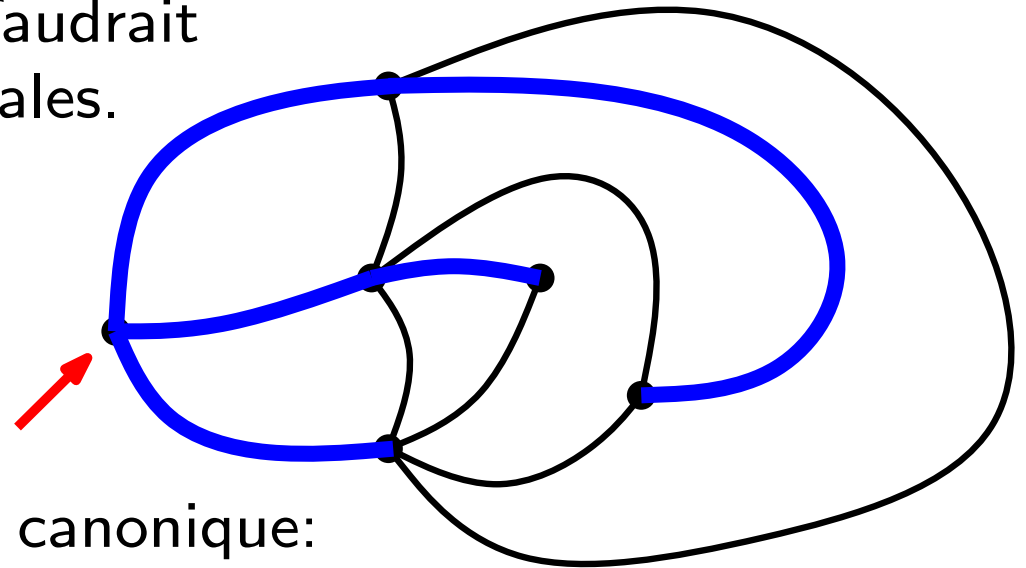
**Idée:** construire un arbre couvrant canonique:

*par exemple*, par un parcours en largeur à gauche à partir de la racine

# Comparer, lister les cartes planaires

On voudra compter des cartes, il faudrait déjà savoir dire si 2 cartes sont égales.

**Carte enracinée** = carte avec un coin marqué (la racine)



**Idée:** construire un arbre couvrant canonique:

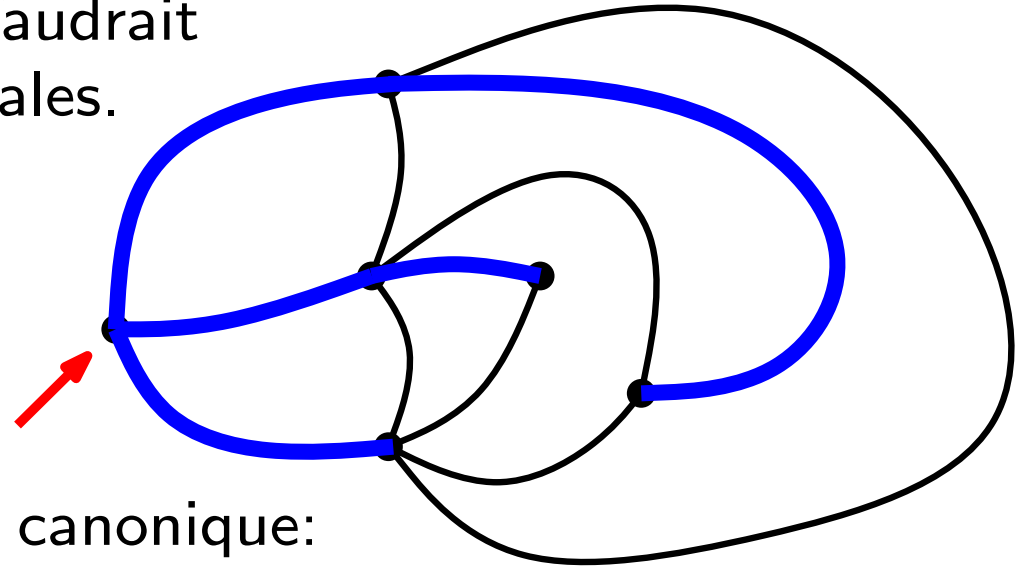
*par exemple*, par un parcours en largeur à gauche à partir de la racine



# Comparer, lister les cartes planaires

On voudra compter des cartes, il faudrait déjà savoir dire si 2 cartes sont égales.

**Carte enracinée** = carte avec un coin marqué (la racine)



**Idée:** construire un arbre couvrant canonique:

*par exemple*, par un parcours en largeur à gauche à partir de la racine

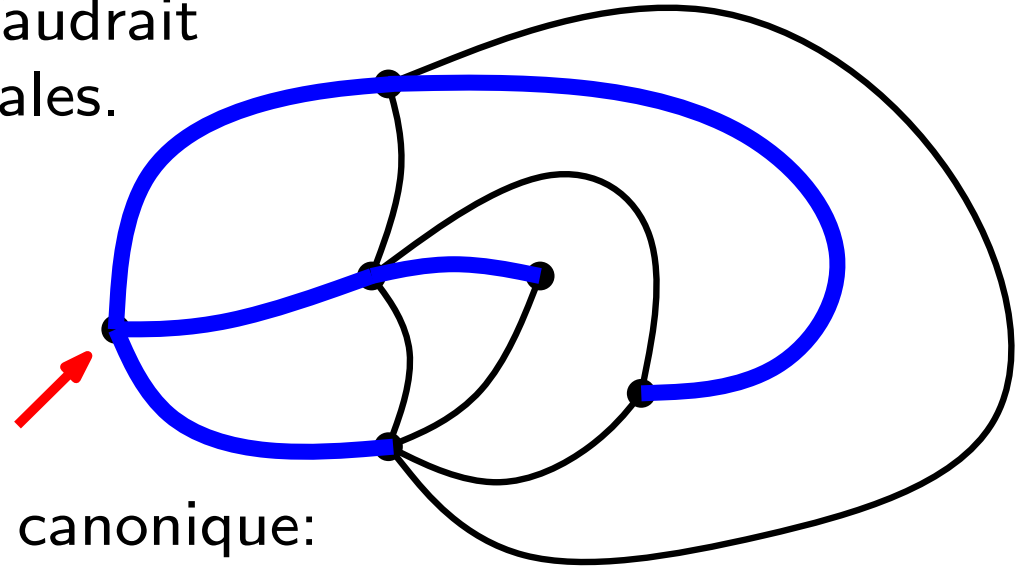
⇒ comparer les arbres et les arêtes en dehors de l'arbre.

sur les petits exemples ça se fait bien à l'oeil nu, en redessinant

# Comparer, lister les cartes planaires

On voudra compter des cartes, il faudrait déjà savoir dire si 2 cartes sont égales.

**Carte enracinée** = carte avec un coin marqué (la racine)



**Idée:** construire un arbre couvrant canonique:

*par exemple*, par un parcours en largeur à gauche à partir de la racine

⇒ comparer les arbres et les arêtes en dehors de l'arbre.

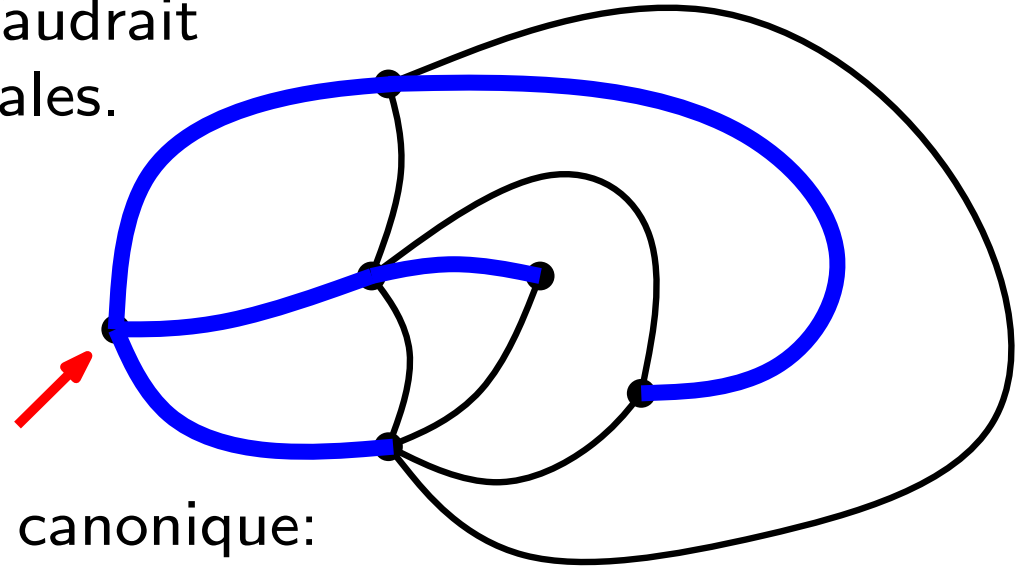
sur les petits exemples ça se fait bien à l'oeil nu, en redessinant

**Thm.** L'isomorphisme de cartes enracinées se teste en temps linéaire.

# Comparer, lister les cartes planaires

On voudra compter des cartes, il faudrait déjà savoir dire si 2 cartes sont égales.

**Carte enracinée** = carte avec un coin marqué (la racine)



**Idée:** construire un arbre couvrant canonique:

*par exemple*, par un parcours en largeur à gauche à partir de la racine

⇒ Pour lister les cartes, lister les arbres et ajouter les arêtes de toutes les façons **licites** (pour que l'arbre soit canonique)!

# Compter / la combinatoire énumérative

Un ensemble  $\mathcal{A}$  d'objets discrets, muni d'une taille:  $\mathcal{A} \rightarrow \mathbb{N}, a \mapsto |a|$ .

On suppose  $\mathcal{A}_n = \{a \in \mathcal{A} \mid |a| = n\}$  fini pour tout  $n$ .

Le **problème d'énumération** est de calculer les  $a_n = |\mathcal{A}_n|, n \geq 0$

La **série génératrice** des objets de  $\mathcal{A}$  selon la taille est

$$A(t) = \sum_{n \geq 0} a_n t^n = \sum_{a \in \mathcal{A}} t^{|a|}.$$

Ainsi le nombre de mots de longueur  $n$  sur l'alphabet  $\{0, 1\}$  est  $2^n$

et la série génératrice de ces mots comptés selon la longueur est

$$A(t) = 1 + 2t + 4t^2 + 8t^3 + \dots = \frac{1}{1-2t}$$

# Énumération de cartes

Pourquoi diable vouloir compter des cartes ?

- Tutte *et al.* (1962→ 2012, décompositions et équations fonctionnelles)  
au départ dans l'espoir de démontrer le théorème des 4 couleurs

# Énumération de cartes

Pourquoi diable vouloir compter des cartes ?

- Tutte *et al.* (1962 → 2012, décompositions et équations fonctionnelles)  
au départ dans l'espoir de démontrer le théorème des 4 couleurs

**Théorème** (Tutte, 1963): Soit  $\mathcal{Q}_n = \{\text{quadrangulations enracinées à } n \text{ faces}\}$

et la série génératrice:  $Q(t) = \sum_{q \in \mathcal{Q}_n} t^{|q|}$ , où  $|q| = \#\text{faces de } q$ .

$$Q(t) = 1 + 2t + 9t^2 + \dots$$

Alors  $Q(t)$  est solution du système  $\begin{cases} Q(t) = R(t) - tR(t)^3 \\ R(t) = 1 + 3tR(t)^2 \end{cases}$

$$\text{d'où } Q(t) = \frac{(1-12t)^{3/2} - 1 + 18t}{54t^2} \quad \text{et} \quad |\mathcal{Q}_n| = \frac{2}{n+2} \frac{3^n}{n+1} \binom{2n}{n}.$$

# Énumération de cartes

Pourquoi diable vouloir compter des cartes ?

- Tutte *et al.* (1962 → 2012, décompositions et équations fonctionnelles)  
au départ dans l'espoir de démontrer le théorème des 4 couleurs

**Théorème** (Tutte, 1963): Soit  $\mathcal{Q}_n = \{\text{quadrangulations enracinées à } n \text{ faces}\}$

et la série génératrice:  $Q(t) = \sum_{q \in \mathcal{Q}_n} t^{|q|}$ , où  $|q| = \#\text{faces de } q$ .

$$Q(t) = 1 + 2t + 9t^2 + \dots$$

Alors  $Q(t)$  est solution du système 
$$\begin{cases} Q(t) = R(t) - tR(t)^3 \\ R(t) = 1 + 3tR(t)^2 \end{cases}$$

$$\text{d'où } Q(t) = \frac{(1-12t)^{3/2} - 1 + 18t}{54t^2} \quad \text{et} \quad |\mathcal{Q}_n| = \frac{2}{n+2} \frac{3^n}{n+1} \binom{2n}{n}.$$

justification *a posteriori*: c'est joli !

# Énumération de cartes

Pourquoi diable vouloir compter des cartes ?

- Tutte *et al.* (1962 → 2012, décompositions et équations fonctionnelles)  
au départ dans l'espoir de démontrer le théorème des 4 couleurs

**Théorème** (Tutte, 1963): Soit  $\mathcal{Q}_n = \{\text{quadrangulations enracinées à } n \text{ faces}\}$

et la série génératrice:  $Q(t) = \sum_{q \in \mathcal{Q}_n} t^{|q|}$ , où  $|q| = \#\text{faces de } q$ .

$$Q(t) = 1 + 2t + 9t^2 + \dots$$

Alors  $Q(t)$  est solution du système  $\begin{cases} Q(t) = R(t) - tR(t)^3 \\ R(t) = 1 + 3tR(t)^2 \end{cases}$  eqs.  
algébriques

d'où  $Q(t) = \frac{(1-12t)^{3/2} - 1 + 18t}{54t^2}$  et  $|\mathcal{Q}_n| = \frac{2}{n+2} \frac{3^n}{n+1} \binom{2n}{n}$ . formule  
explicite

justification *a posteriori*: c'est joli !



# Énumération de cartes

Pourquoi diable vouloir compter des cartes ?

- Tutte *et al.* (1962→ 2012, décompositions et équations fonctionnelles)  
au départ dans l'espoir de démontrer le théorème des 4 couleurs

De nombreux résultats analogues pour d'autres familles  $\mathcal{F}$  de cartes:

- une dizaine de jolies formules d'énumération pour les  $|\mathcal{F}_n|$
- une vingtaine de résultats d'algébricité des séries génératrices

# Énumération de cartes

Pourquoi diable vouloir compter des cartes ?

- Tutte *et al.* (1962 → 2012, décompositions et équations fonctionnelles)  
au départ dans l'espoir de démontrer le théorème des 4 couleurs

De nombreux résultats analogues pour d'autres familles  $\mathcal{F}$  de cartes:

- une dizaine de jolies formules d'énumération pour les  $|\mathcal{F}_n|$
- une vingtaine de résultats d'algébricité des séries génératrices

- Cori, Vauquelin *et al.* (70/80's → 2012, bijections avec des arbres)  
pour *expliquer* les jolies formules et l'algébricité

# Énumération de cartes

Pourquoi diable vouloir compter des cartes ?

- Brezin, Itzykson, Parisi, Zuber, *et al.* (1978 → 2012, intégrales de matrices)

**Remarque fondamentale (t'Hooft):** Le développement en série formelle d'intégrales de matrices hermiennes produisent automatiquement des séries génératrices de cartes...

⇒ redémonstration et extension du théorème précédent de Tutte

**Interprétation et "motivation":** compter permet d'étudier la distribution uniforme sur les cartes de taille  $n$ , qui se trouve être un bon modèle de surface aléatoire

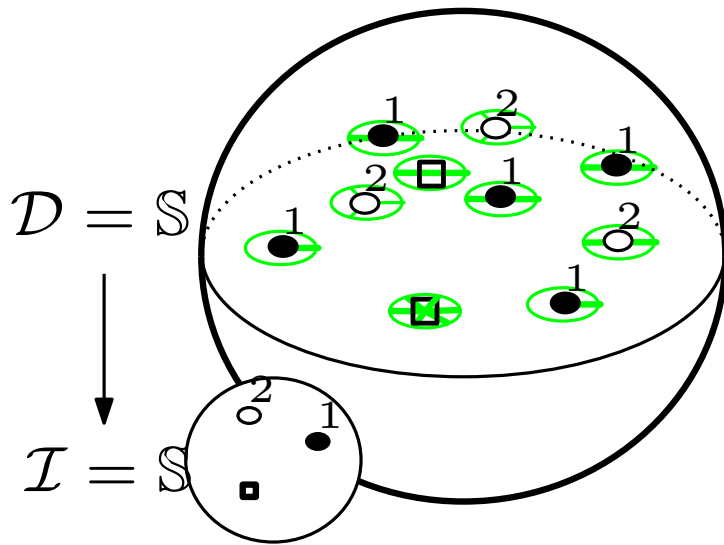
modèle d'Ising sur réseau carré " = " matière sur une géométrie euclidienne

modèle d'Ising sur carte aléatoire " = " matière sur une géométrie quantique

# Énumération de cartes

Pourquoi diable vouloir compter des cartes ?

- Goulden, Jackson *et al.* (80's → 2012, caractères du groupe symétrique) pour le problème d'Hurwitz d'énumération de revêtements ramifiés

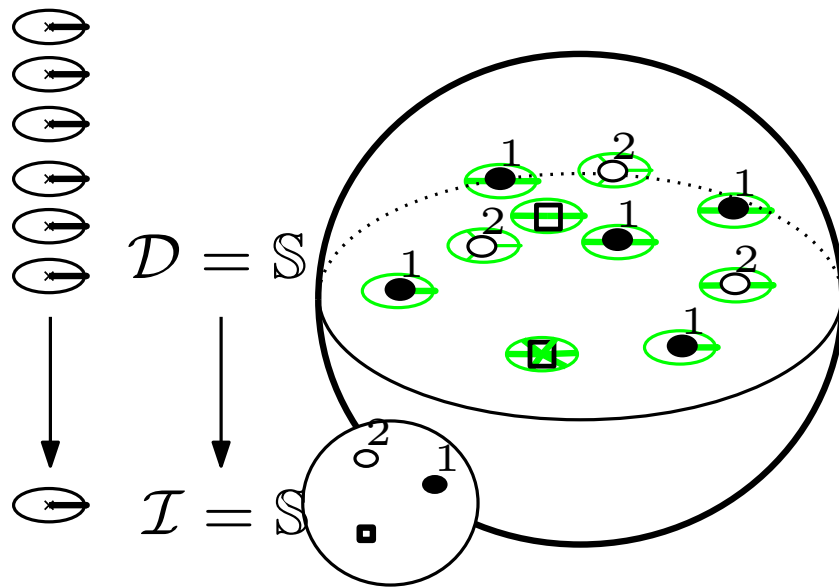


Formule d'Hurwitz (1894):  $h_n(\lambda) = n^{\ell-3} \cdot (n + \ell - 2)! \cdot \prod_{i \geq 1} \frac{1}{\ell_i!} \binom{i^i}{i!}^{\ell_i}$   
 $\#\{\text{revêt}^t \text{ avec } n + \ell - 2 \text{ ramifications simples et } 1 \text{ de type } \lambda = 1^{\ell_1} \dots n^{\ell_n}\}$

# Énumération de cartes

Pourquoi diable vouloir compter des cartes ?

- Goulden, Jackson *et al.* (80's → 2012, caractères du groupe symétrique) pour le problème d'Hurwitz d'énumération de revêtements ramifiés

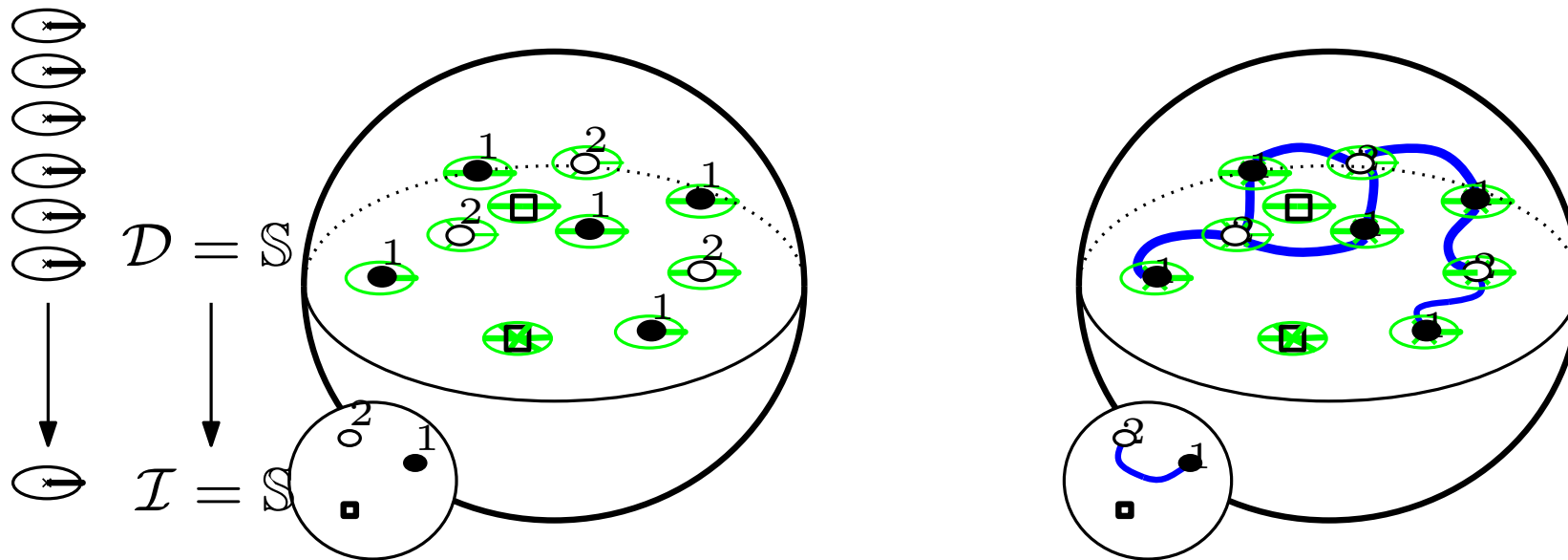


Formule d'Hurwitz (1894):  $h_n(\lambda) = n^{\ell-3} \cdot (n + \ell - 2)! \cdot \prod_{i \geq 1} \frac{1}{\ell_i!} \left( \frac{i^i}{i!} \right)^{\ell_i}$   
 $\#\{\text{revêt}^t \text{ avec } n + \ell - 2 \text{ ramifications simples et } 1 \text{ de type } \lambda = 1^{\ell_1} \dots n^{\ell_n}\}$

# Énumération de cartes

Pourquoi diable vouloir compter des cartes ?

- Goulden, Jackson *et al.* (80's → 2012, caractères du groupe symétrique) pour le problème d'Hurwitz d'énumération de revêtements ramifiés

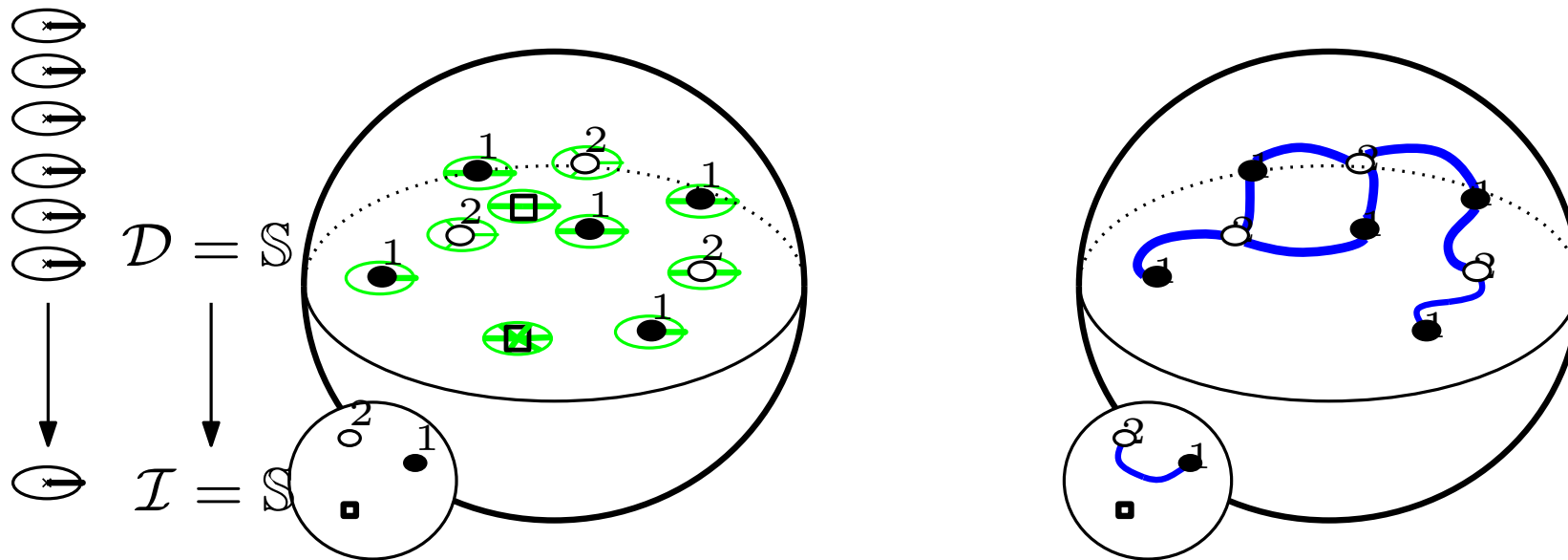


Formule d'Hurwitz (1894):  $h_n(\lambda) = n^{\ell-3} \cdot (n + \ell - 2)! \cdot \prod_{i \geq 1} \frac{1}{\ell_i!} \binom{i^i}{i!}^{\ell_i}$   
 $\#\{\text{revêtem}^t \text{ avec } n + \ell - 2 \text{ ramifications simples et } 1 \text{ de type } \lambda = 1^{\ell_1} \dots n^{\ell_n}\}$

# Énumération de cartes

Pourquoi diable vouloir compter des cartes ?

- Goulden, Jackson *et al.* (80's → 2012, caractères du groupe symétrique) pour le problème d'Hurwitz d'énumération de revêtements ramifiés



Formule d'Hurwitz (1894):  $h_n(\lambda) = n^{\ell-3} \cdot (n + \ell - 2)! \cdot \prod_{i \geq 1} \frac{1}{\ell_i!} \binom{i^i}{i!}^{\ell_i}$   
 $\#\{\text{revê}^t \text{ avec } n + \ell - 2 \text{ ramifications simples et } 1 \text{ de type } \lambda = 1^{\ell_1} \dots n^{\ell_n}\}$

Cartes et formules de Tutte

Séries rationnelles et algébriques en combinatoire

Cartes, arbres et énumération bijective

Grandes cartes aléatoires

Aperçu combinatoire de la carte Brownienne



# Séries rationnelles et algébriques

Une série formelle  $A(t)$  est **algébrique** (sur  $\mathbb{Q}(t)$ ) si elle satisfait une équation polynomiale (non-triviale):  $P(t, A(t)) = 0$ .

Elle est **rationnelle** si elle peut s'écrire  $A(t) = \frac{P(t)}{Q(t)}$  avec  $P(t)$  et  $Q(t)$  des polynomes.

Une famille d'objets est **algébrique** ou **rationnelle** si sa série génératrice l'est.

# Intérêt des séries rationnelles et algébriques

De bonnes propriétés de clôture (+, ×, /, dérivée, composition) et de manipulation (décomposition en fraction partielles, développement de Puiseux, élimination, résultants, bases de Gröbner,...)

On peut calculer les coefficients en temps linéaire à partir de l'équation.

On peut deviner l'algébricité d'une série à partir des premiers coefficients de son développement (par exemple avec l'outil gfun et Maple)

Le comportement asymptotique des coefficients peut se déterminer

quasi automatiquement:  $a_n \sim \frac{\kappa}{\Gamma(d+1)} \rho^{-n} n^d$

avec  $\kappa$  et  $\rho$  des constantes algébriques sur  $\mathbb{Q}$  et  $d \in \mathbb{Q} \setminus \{-1, -2, \dots\}$

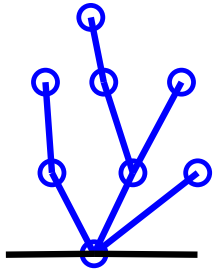
# Série algébrique et combinatoire

Construction	Nombres	Séries
Union: $\mathcal{A} = \mathcal{B} \cup \mathcal{C}$	$a_n = b_n + c_n$	$A(t) = B(t) + C(t)$
Produit: $\mathcal{A} = \mathcal{B} \times \mathcal{C}$ $ \alpha  =  (\beta, \gamma)  =  \beta  +  \gamma $	$a_n = \sum_{i=0}^n b_i c_{n-i}$	$A(t) = B(t) \cdot C(t)$

# Série algébrique et combinatoire

Construction	Nombres	Séries
Union: $\mathcal{A} = \mathcal{B} \cup \mathcal{C}$	$a_n = b_n + c_n$	$A(t) = B(t) + C(t)$
Produit: $\mathcal{A} = \mathcal{B} \times \mathcal{C}$ $ \alpha  =  (\beta, \gamma)  =  \beta  +  \gamma $	$a_n = \sum_{i=0}^n b_i c_{n-i}$	$A(t) = B(t) \cdot C(t)$

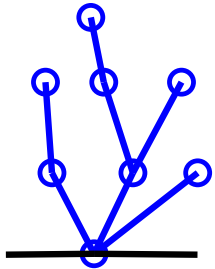
Un exemple typique:  
les arbres ordonnés



# Série algébrique et combinatoire

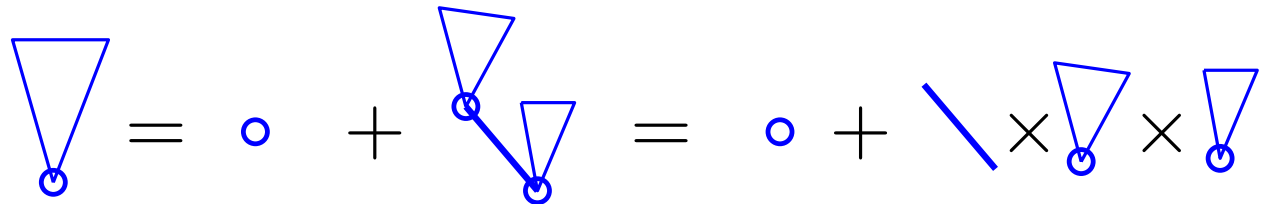
Construction	Nombres	Séries
Union: $\mathcal{A} = \mathcal{B} \cup \mathcal{C}$	$a_n = b_n + c_n$	$A(t) = B(t) + C(t)$
Produit: $\mathcal{A} = \mathcal{B} \times \mathcal{C}$ $ \alpha  =  (\beta, \gamma)  =  \beta  +  \gamma $	$a_n = \sum_{i=0}^n b_i c_{n-i}$	$A(t) = B(t) \cdot C(t)$

Un exemple typique:  
les arbres ordonnés



Soit  $A(t)$  la série génératrice des arbres ordonnés comptés selon le nombre d'arêtes:

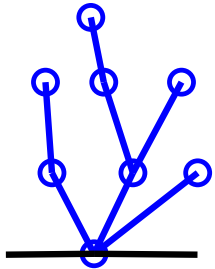
$$A(t) = 1 + tA(t)^2 \quad \text{en effet:}$$



# Série algébrique et combinatoire

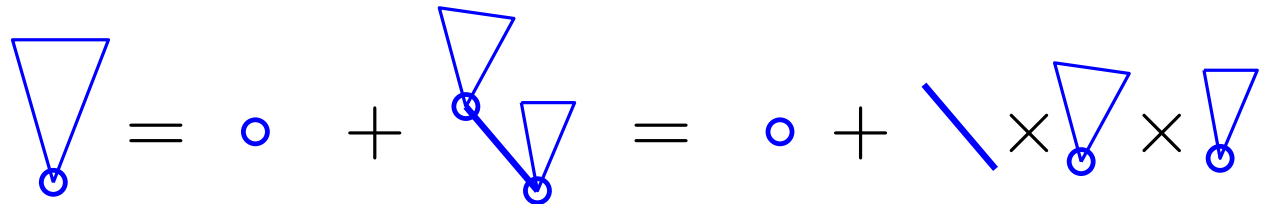
Construction	Nombres	Séries
Union: $\mathcal{A} = \mathcal{B} \cup \mathcal{C}$	$a_n = b_n + c_n$	$A(t) = B(t) + C(t)$
Produit: $\mathcal{A} = \mathcal{B} \times \mathcal{C}$ $ \alpha  =  (\beta, \gamma)  =  \beta  +  \gamma $	$a_n = \sum_{i=0}^n b_i c_{n-i}$	$A(t) = B(t) \cdot C(t)$

Un exemple typique:  
les arbres ordonnés



Soit  $A(t)$  la série génératrice des arbres ordonnés comptés selon le nombre d'arêtes:

$$A(t) = 1 + tA(t)^2 \quad \text{en effet:}$$

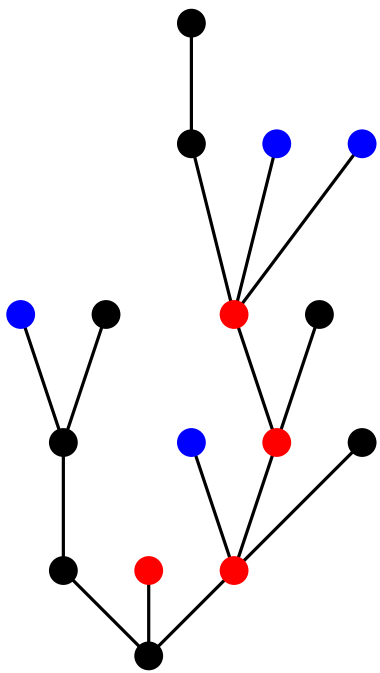


$$\text{D'où on déduit: } A(t) = \frac{1 - \sqrt{1 - 4t}}{2t} = \sum_{n \geq 0} \frac{1}{n+1} \binom{2n}{n} t^n,$$

*i.e.* les arbres ordonnés sont comptés par les nombres de Catalan.

# Intuition combinatoire: objets $\mathbb{N}$ -algébriques

On obtient naturellement des séries algébriques pour les objets  $\mathbb{N}$ -algébriques, *i.e.* décrits par une spécification algébrique (context-free grammars).



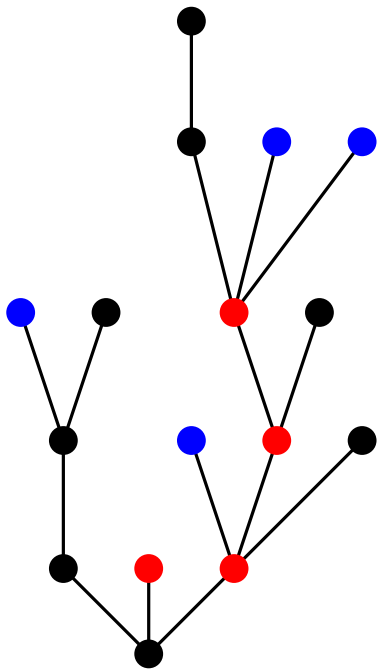
$$\triangle \bullet = \bullet + \begin{array}{c} \triangle \\ \bullet \end{array} + \begin{array}{c} \triangle \quad \triangle \\ \bullet \end{array} + \begin{array}{c} \triangle \quad \triangle \quad \triangle \\ \bullet \end{array}$$

$$\triangle \bullet = \bullet$$

$$\triangle \bullet = \bullet + \begin{array}{c} \triangle \quad \triangle \\ \bullet \end{array} + \begin{array}{c} \triangle \quad \triangle \quad \triangle \\ \bullet \end{array} + \begin{array}{c} \triangle \quad \triangle \quad \triangle \\ \bullet \end{array}$$

# Intuition combinatoire: objets $\mathbb{N}$ -algébriques

On obtient naturellement des séries algébriques pour les objets  $\mathbb{N}$ -algébriques, *i.e.* décrits par une spécification algébrique (context-free grammars).



$$\begin{array}{c}
 \text{Diagram: } \triangle \text{ with black dot} \\
 = \\
 \text{Diagram: } \bullet \\
 + \\
 \text{Diagram: } \triangle \text{ with black dot} \\
 + \\
 \text{Diagram: } \triangle \text{ with blue dot and black dot} \\
 + \\
 \text{Diagram: } \triangle \text{ with black, red, red dots}
 \end{array}$$

$$N(t) = 1 + tN(t) + t^2 B(t)N(t) + t^3 N(t)R(t)^2$$

$$\begin{array}{c}
 \text{Diagram: } \triangle \text{ with blue dot} \\
 = \\
 \text{Diagram: } \bullet
 \end{array}$$

$$B(t) = 1$$

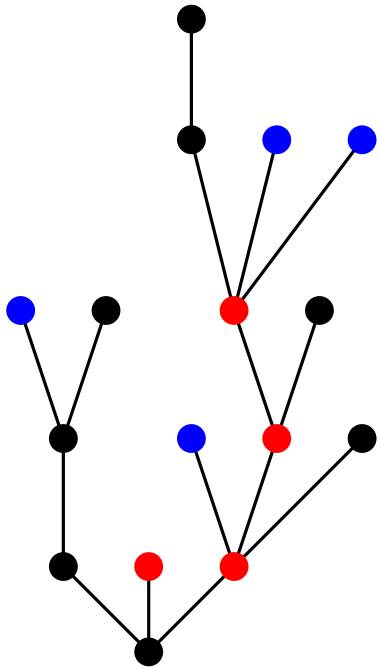
$$\begin{array}{c}
 \text{Diagram: } \triangle \text{ with red dot} \\
 = \\
 \text{Diagram: } \bullet \\
 + \\
 \text{Diagram: } \triangle \text{ with red dot and black dot} \\
 + \\
 \text{Diagram: } \triangle \text{ with black, blue, blue dots} \\
 + \\
 \text{Diagram: } \triangle \text{ with blue, red, black dots}
 \end{array}$$

$$R(t) = 1 + t^2 R(t)N(t) + t^3 N(t)B(t)^2 + t^3 B(t)R(t)N(t)$$



# Intuition combinatoire: objets $\mathbb{N}$ -algébriques

On obtient naturellement des séries algébriques pour les objets  $\mathbb{N}$ -algébriques, *i.e.* décrits par une spécification algébrique (context-free grammars).



$$\begin{array}{c}
 \begin{array}{c} \triangle \\ \bullet \end{array} = \begin{array}{c} \bullet \\ + \\ \begin{array}{c} \triangle \\ \bullet \end{array} \\ + \\ \begin{array}{c} \triangle \quad \triangle \\ \bullet \quad \bullet \end{array} \\ + \\ \begin{array}{c} \triangle \quad \triangle \quad \triangle \\ \bullet \quad \bullet \quad \bullet \end{array}
 \end{array} \\
 N(t) = 1 + tN(t) + t^2 B(t)N(t) + t^3 N(t)R(t)^2
 \end{array}$$

$$\begin{array}{c}
 \begin{array}{c} \triangle \\ \bullet \end{array} = \begin{array}{c} \bullet \\ + \\ \bullet \end{array} \\
 B(t) = 1
 \end{array}$$

$$\begin{array}{c}
 \begin{array}{c} \triangle \\ \bullet \end{array} = \begin{array}{c} \bullet \\ + \\ \begin{array}{c} \triangle \quad \triangle \\ \bullet \quad \bullet \end{array} \\ + \\ \begin{array}{c} \triangle \quad \triangle \quad \triangle \\ \bullet \quad \bullet \quad \bullet \end{array} \\ + \\ \begin{array}{c} \triangle \quad \triangle \quad \triangle \\ \bullet \quad \bullet \quad \bullet \end{array}
 \end{array} \\
 R(t) = 1 + t^2 R(t)N(t) + t^3 N(t)B(t)^2 + t^3 B(t)R(t)N(t)
 \end{array}$$

**Intuition:** Les objets  $\mathbb{N}$ -algébriques ont une structure arborescente avec indépendance des sous-arbres (conditionnellement à leur racine).

# Intuition combinatoire: objets $\mathbb{N}$ -rationnels

Dans le cas où les équations combinatoires sont linéaires, les objets sont dits  $\mathbb{N}$ -rationnels, et on obtient des séries génératrices rationnelles.



$$\begin{array}{c}
 \text{Diagram: Inverted triangle on a black dot} \\
 = \\
 \text{Diagram: Black dot} + \text{Diagram: Inverted triangle on a blue dot connected to a black dot} + \text{Diagram: Inverted triangle on a red dot connected to a black dot} \\
 N(t) = 1 + tB(t) + tR(t)
 \end{array}$$

$$\begin{array}{c}
 \text{Diagram: Inverted triangle on a blue dot} \\
 = \\
 \text{Diagram: Blue dot} \\
 B(t) = 1
 \end{array}$$

$$\begin{array}{c}
 \text{Diagram: Inverted triangle on a red dot} \\
 = \\
 \text{Diagram: Inverted triangle on a red dot connected to another red dot} + \text{Diagram: Inverted triangle on a black dot connected to a red dot} \\
 R(t) = tR(t) + tN(t)
 \end{array}$$

# Intuition combinatoire: objets $\mathbb{N}$ -rationnels

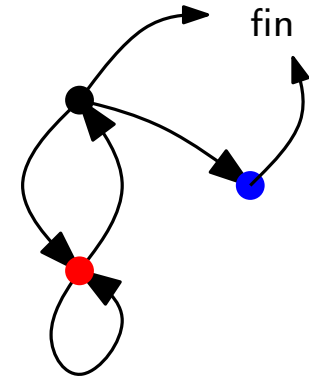
Dans le cas où les équations combinatoires sont linéaires, les objets sont dits  $\mathbb{N}$ -rationnels, et on obtient des séries génératrices rationnelles.



$$\begin{array}{c} \text{Diagram: Inverted triangle on a black dot} \\ \text{Diagram: Black dot} \\ \text{Diagram: Inverted triangle on a blue dot connected to a black dot} \\ \text{Diagram: Inverted triangle on a red dot connected to a black dot} \end{array} = \text{Diagram: Black dot} + \text{Diagram: Inverted triangle on a blue dot connected to a black dot} + \text{Diagram: Inverted triangle on a red dot connected to a black dot}$$
$$N(t) = 1 + tB(t) + tR(t)$$

$$\begin{array}{c} \text{Diagram: Inverted triangle on a blue dot} \\ \text{Diagram: Blue dot} \end{array} = \text{Diagram: Blue dot}$$
$$B(t) = 1$$

$$\begin{array}{c} \text{Diagram: Inverted triangle on a red dot} \\ \text{Diagram: Inverted triangle on a red dot connected to a red dot} \\ \text{Diagram: Inverted triangle on a black dot connected to a red dot} \end{array} = \text{Diagram: Inverted triangle on a red dot connected to a red dot} + \text{Diagram: Inverted triangle on a black dot connected to a red dot}$$
$$R(t) = tR(t) + tN(t)$$



**Intuition:** Les objets  $\mathbb{N}$ -rationnels ont une structure linéaire et une croissance contrôlée par un nombre fini d'états (automates).

# Intuition combinatoire...

L'intuition est "toujours juste" pour les objets rationnels

structures combinatoires + série rationnel  $\Rightarrow$  structures  $\mathbb{N}$ -rationnelles

(implication empirique, on peut créer des contre-exemples ad-hoc)

Au contraire il existe de nombreux exemples d'objets algébriques pour lesquelles l'algébricité est mystérieuse... (cf Bousquet-Mélou ICM06)

structures combinatoires + série algébrique  $\not\Rightarrow$  structures  $\mathbb{N}$ -algébriques

$\Rightarrow$  **problématique bijective**

expliquer l'algébricité combinatoirement (*i.e.* prouver la  $\mathbb{N}$ -algébricité)

pour mieux comprendre la structure des objets algébriques

autrement dit, mettre en évidence une structure arborescente

Cartes et formules de Tutte

Séries rationnelles et algébriques en combinatoire

Cartes, arbres et énumération bijective

Grandes cartes aléatoires

Aperçu combinatoire de la carte Brownienne

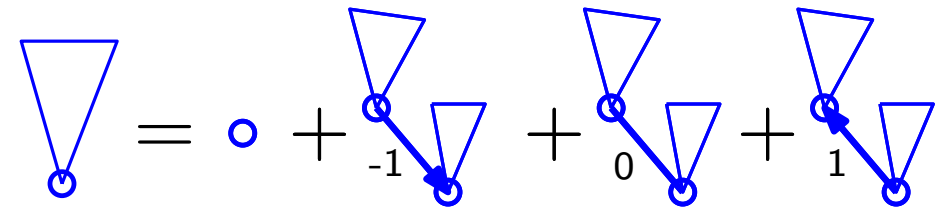
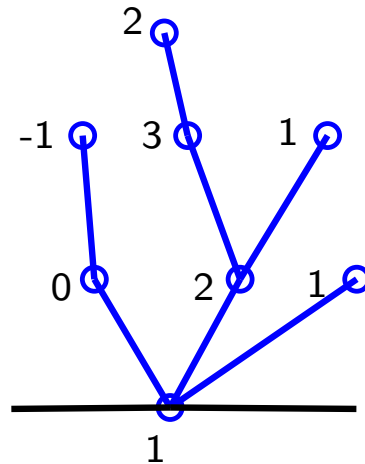
# Quadrangulations et arbres

La série des arbres plans satisfait:  $A(t) = 1 + tA(t)^2$

La série des quadrangulations enracinées:  $\begin{cases} Q(t) = R(t) - tR(t)^3 \\ R(t) = 1 + 3tR(t)^2 \end{cases}$ .

ce qui suggère un lien avec des arbres ayant 3 types d'arêtes

Cori et Vauquelin (1984)  
font ce lien avec des  
arbres bien étiquetés



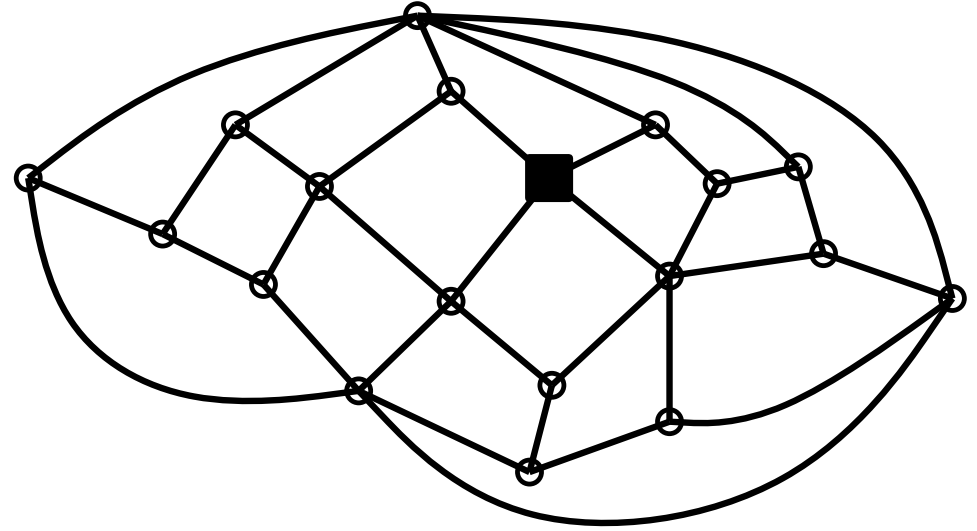
$$A(t) = 1 + 3tA(t)^2$$

Cori et Vauquelin donnent une bijection récursive entre quadrangulations pointées et arbres bien étiquetés **positifs** à l'aide d'une opération d'éclatement.

Il n'est pas clair que les arbres bien étiquetés positifs soient  $\mathbb{N}$ -algébriques.

# Reformulation à l'aide des distances

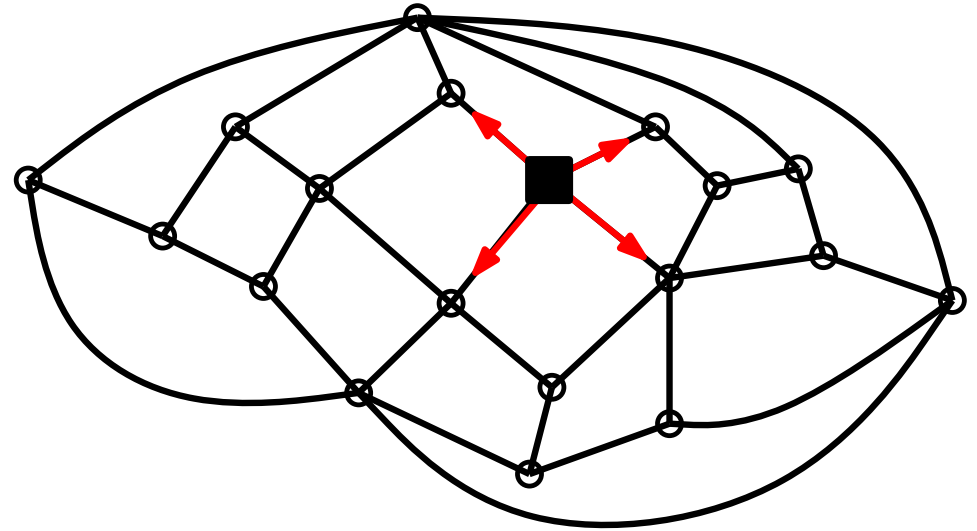
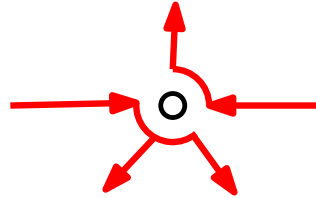
La bijection part d'un sommet origine ■  
et explore la quadrangulation en largeur



# Reformulation à l'aide des distances

La bijection part d'un sommet origine ■  
et explore la quadrangulation en largeur

Autour de chaque sommet,  
l'exploration suit une règle  
de priorité à droite

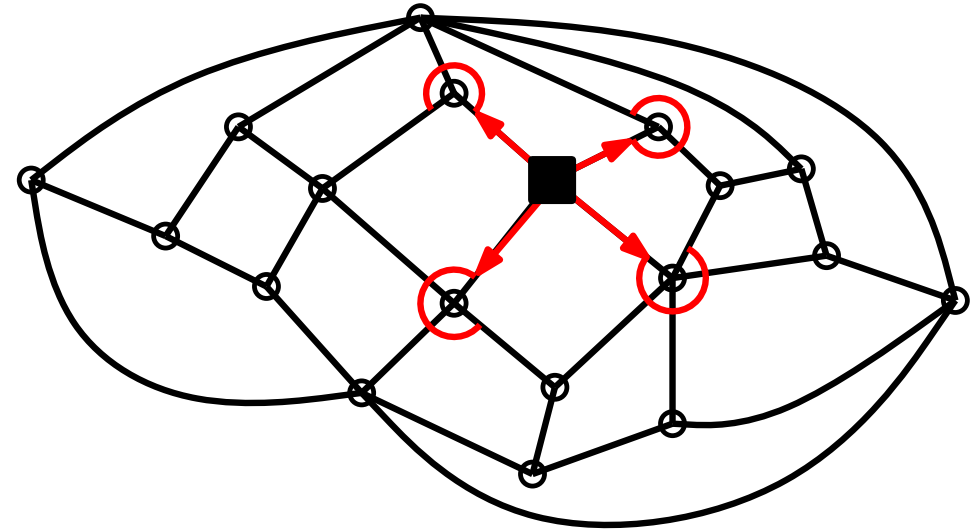
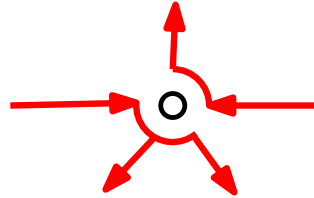




# Reformulation à l'aide des distances

La bijection part d'un sommet origine ■ et explore la quadrangulation en largeur

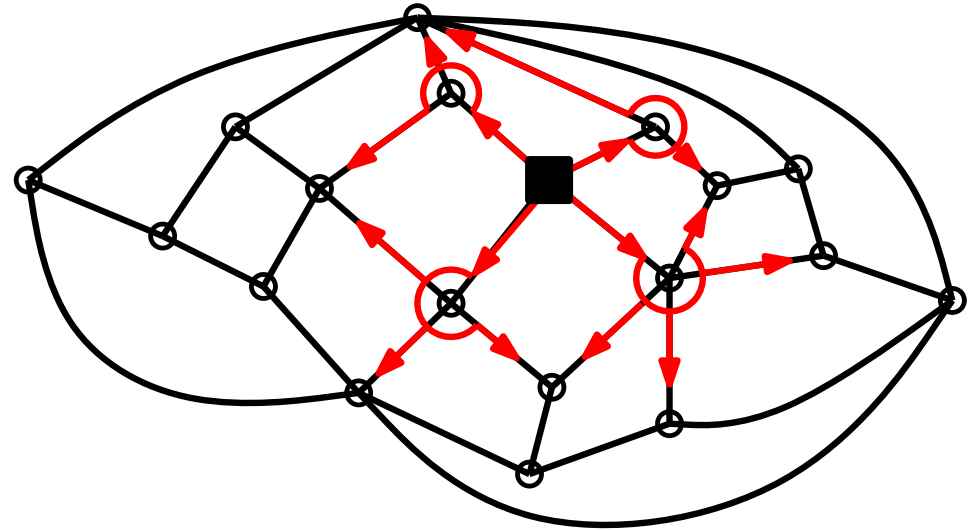
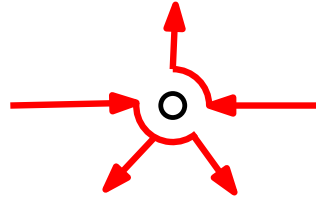
Autour de chaque sommet, l'exploration suit une règle de priorité à droite



# Reformulation à l'aide des distances

La bijection part d'un sommet origine ■ et explore la quadrangulation en largeur

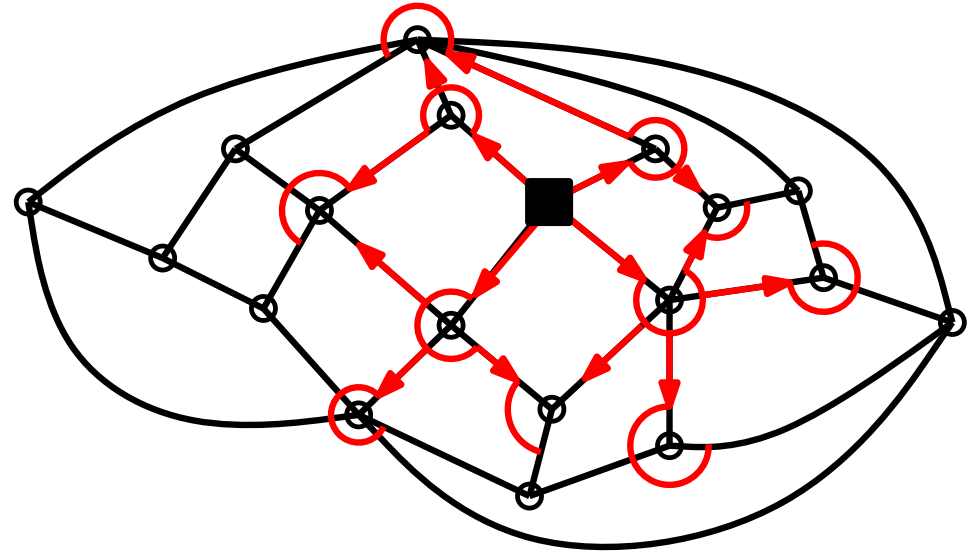
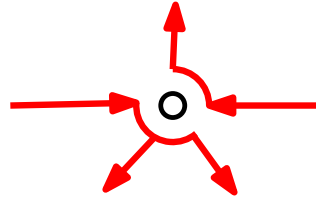
Autour de chaque sommet, l'exploration suit une règle de priorité à droite



# Reformulation à l'aide des distances

La bijection part d'un sommet origine ■ et explore la quadrangulation en largeur

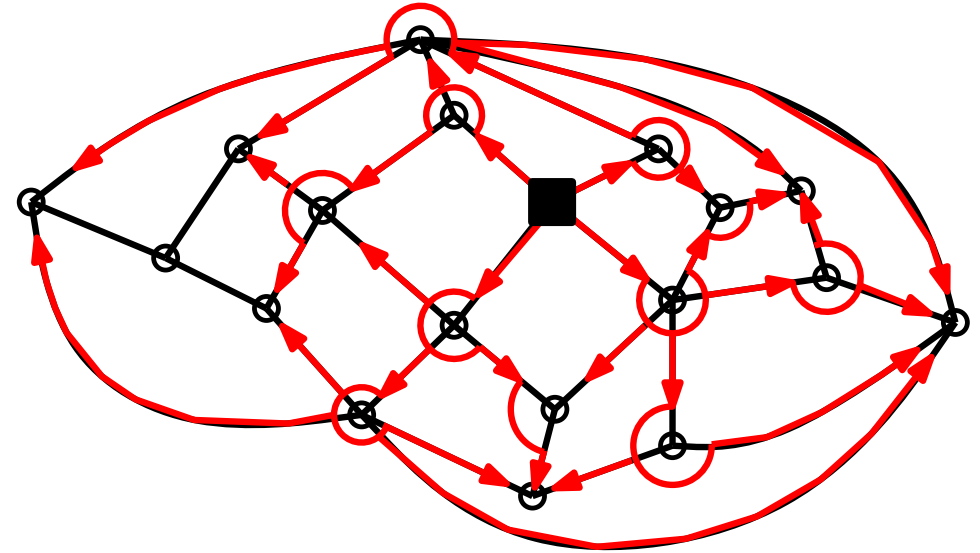
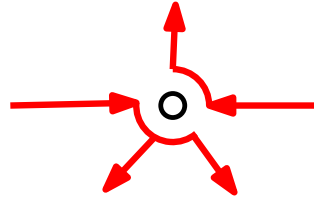
Autour de chaque sommet, l'exploration suit une règle de priorité à droite



# Reformulation à l'aide des distances

La bijection part d'un sommet origine ■  
et explore la quadrangulation en largeur

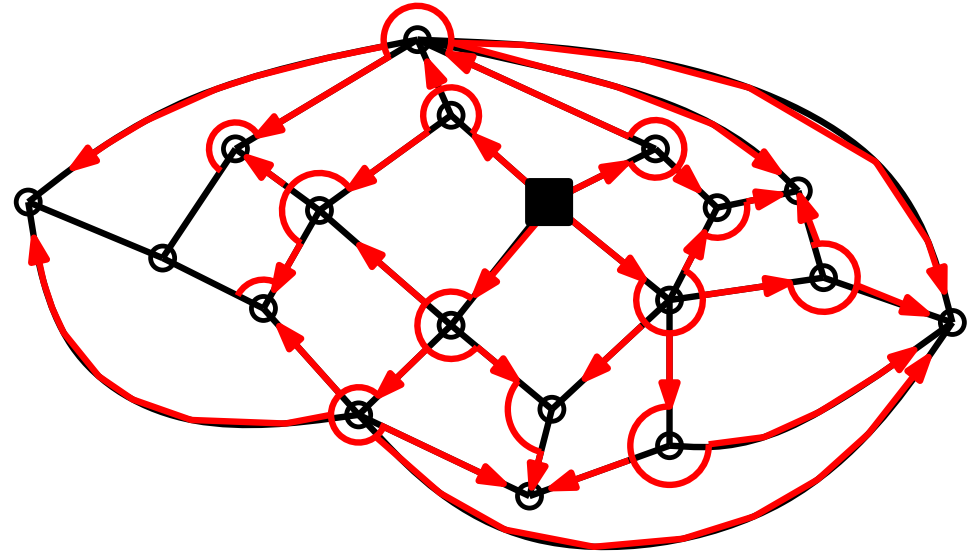
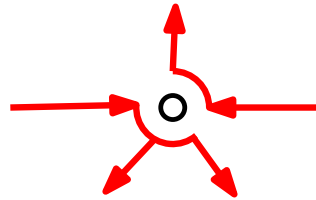
Autour de chaque sommet,  
l'exploration suit une règle  
de priorité à droite



# Reformulation à l'aide des distances

La bijection part d'un sommet origine ■ et explore la quadrangulation en largeur

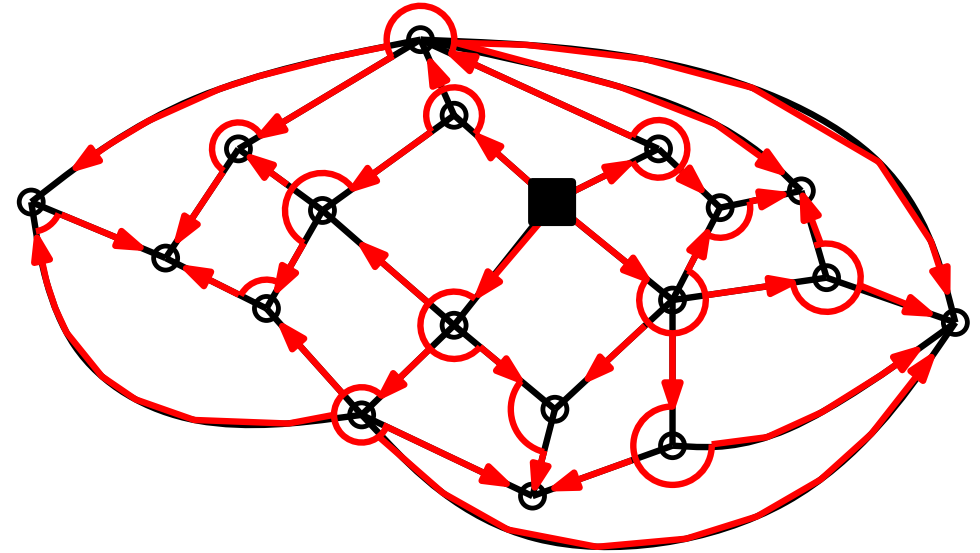
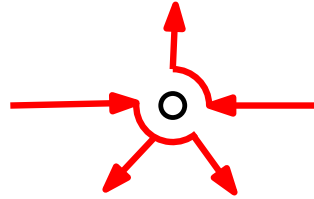
Autour de chaque sommet, l'exploration suit une règle de priorité à droite



# Reformulation à l'aide des distances

La bijection part d'un sommet origine ■  
et explore la quadrangulation en largeur

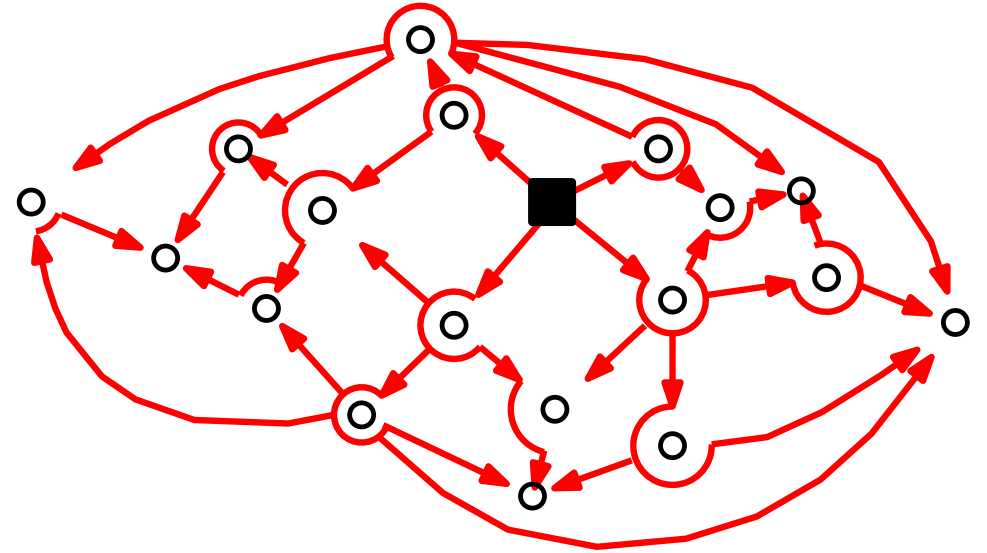
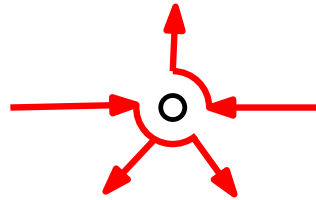
Autour de chaque sommet,  
l'exploration suit une règle  
de priorité à droite



# Reformulation à l'aide des distances

La bijection part d'un sommet origine ■ et explore la quadrangulation en largeur

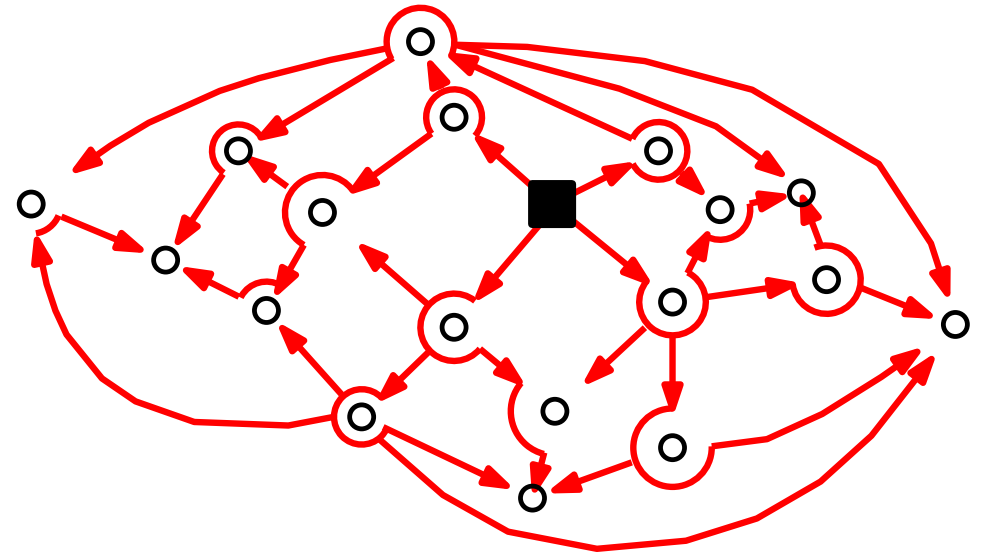
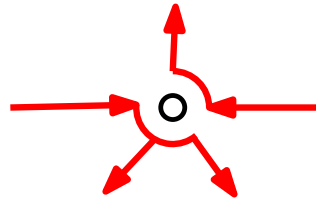
Autour de chaque sommet, l'exploration suit une règle de priorité à droite



# Reformulation à l'aide des distances

La bijection part d'un sommet origine ■  
et explore la quadrangulation en largeur

Autour de chaque sommet,  
l'exploration suit une règle  
de priorité à droite



les chemins rouges forment un arbre

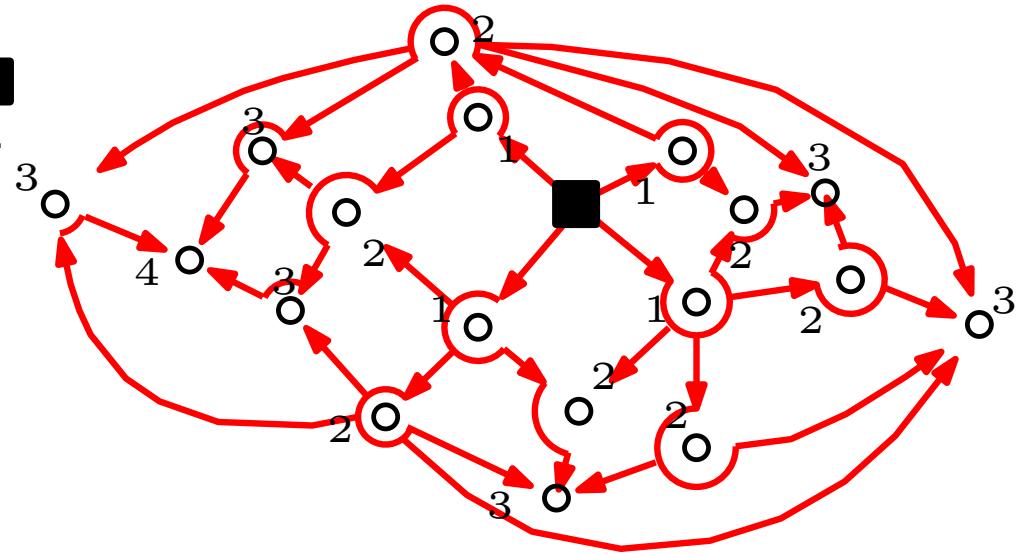
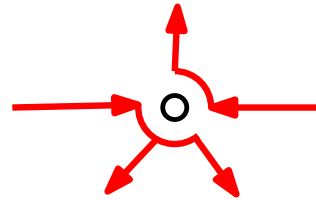


# Reformulation à l'aide des distances

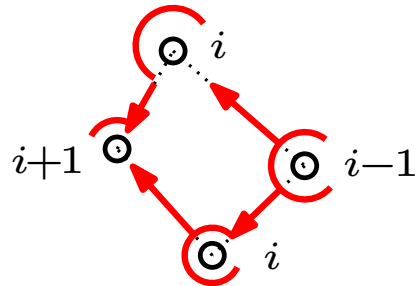
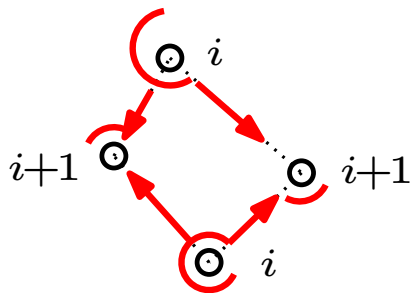
La bijection part d'un sommet origine ■ et explore la quadrangulation en largeur

Around de chaque sommet, l'exploration suit une règle de priorité à droite

Etiqueter les sommets par le round auquel ils ont été visités

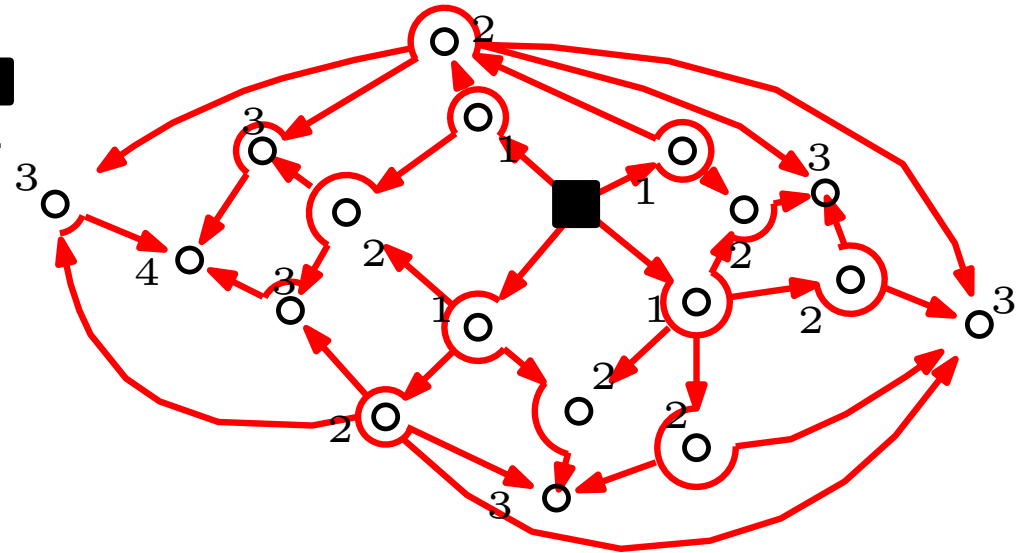


les chemins rouges forment un arbre

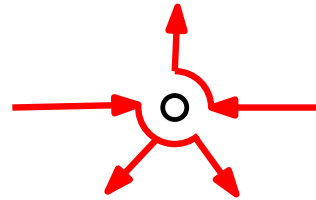


# Reformulation à l'aide des distances

La bijection part d'un sommet origine ■ et explore la quadrangulation en largeur

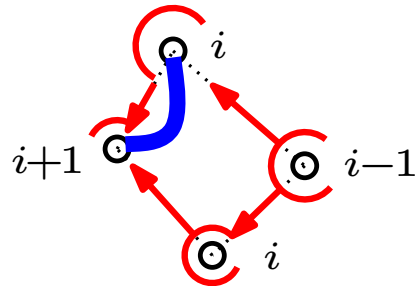
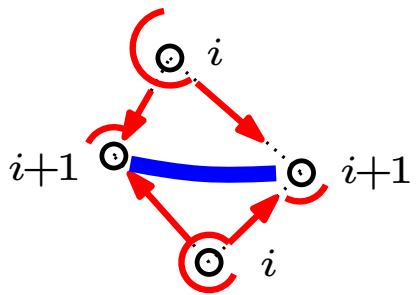


Autour de chaque sommet, l'exploration suit une règle de priorité à droite



Etiqueter les sommets par le round auquel ils ont été visités

les chemins rouges forment un arbre



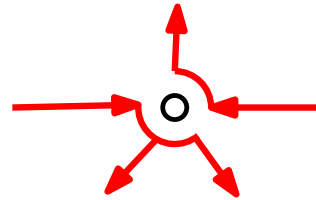
Toute face est incidente à 2 sommets

Joindre ces 2 sommets!

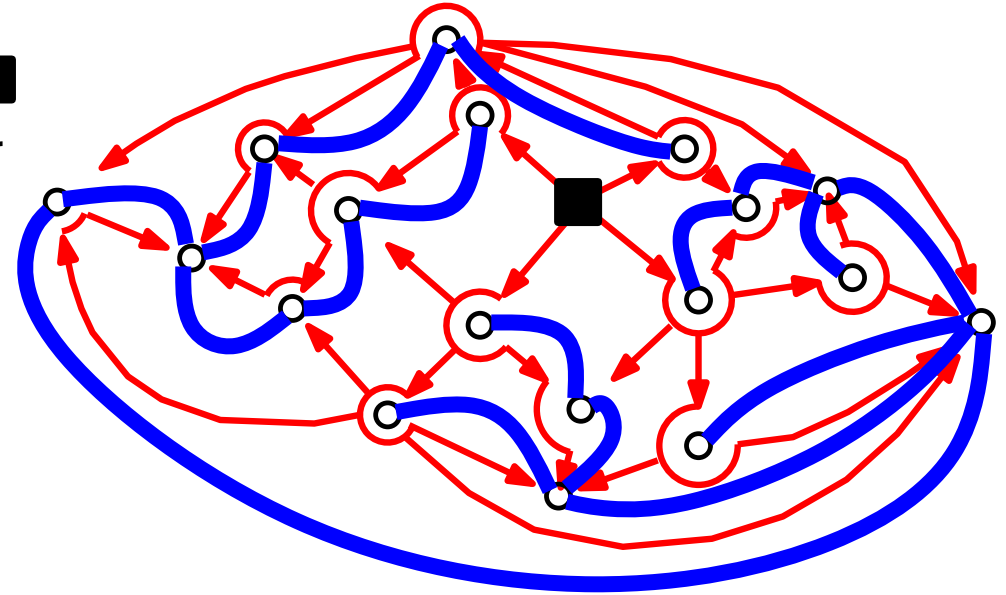
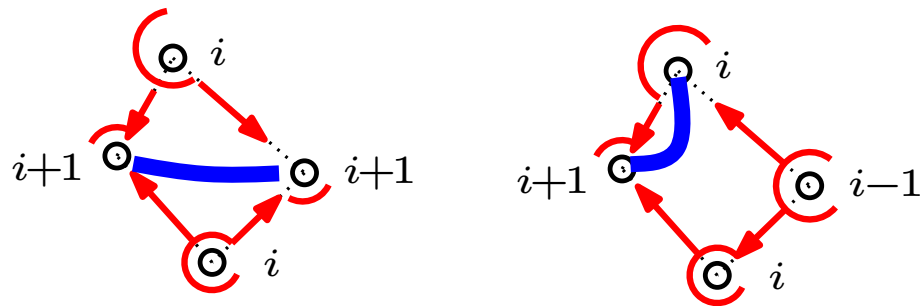
# Reformulation à l'aide des distances

La bijection part d'un sommet origine ■ et explore la quadrangulation en largeur

Autour de chaque sommet, l'exploration suit une règle de priorité à droite



Etiqueter les sommets par le round auquel ils ont été visités



les chemins rouges forment un arbre  
les arêtes bleues forment un arbre

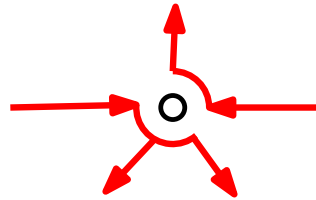
Toute face est incidente à 2 sommets

Joindre ces 2 sommets!

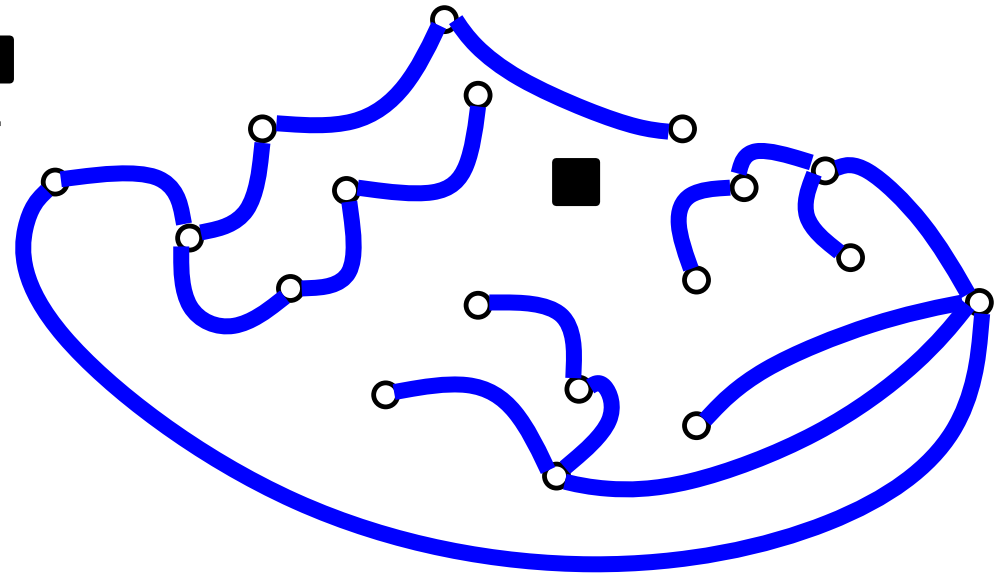
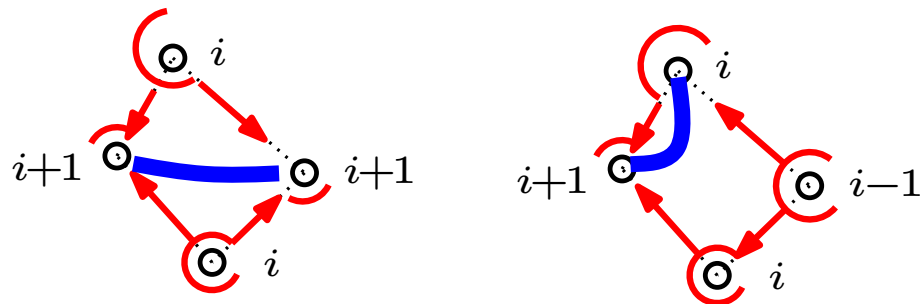
# Reformulation à l'aide des distances

La bijection part d'un sommet origine ■ et explore la quadrangulation en largeur

Autour de chaque sommet, l'exploration suit une règle de priorité à droite



Etiqueter les sommets par le round auquel ils ont été visités



les chemins rouges forment un arbre  
les arêtes bleues forment un arbre

Toute face est incidente à 2 sommets

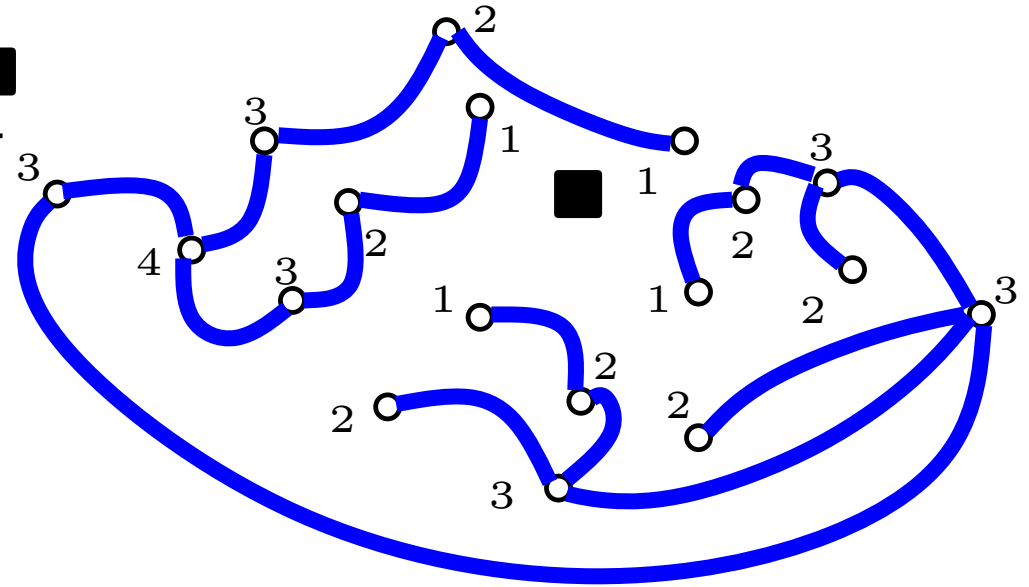
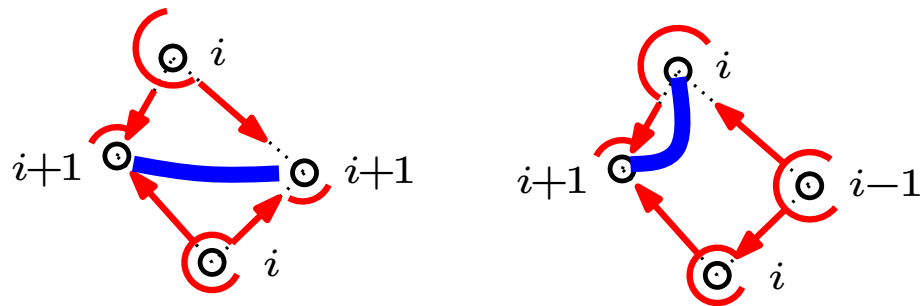
Joindre ces 2 sommets!

# Reformulation à l'aide des distances

La bijection part d'un sommet origine ■  
et explore la quadrangulation en largeur

Autour de chaque sommet,  
l'exploration suit une règle  
de priorité à droite

Etiqueter les sommets par le round  
auquel ils ont été visités



les chemins rouges forment un arbre  
les arêtes bleues forment un arbre  
en fait un arbre bien étiqueté

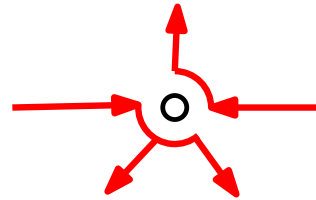
Toute face est incidente à 2 sommets

Joindre ces 2 sommets!

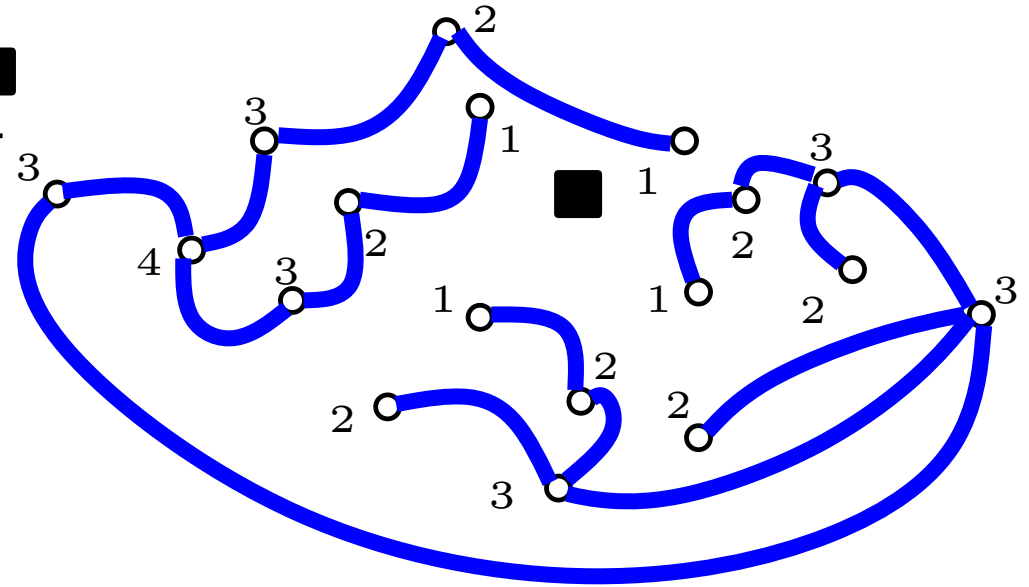
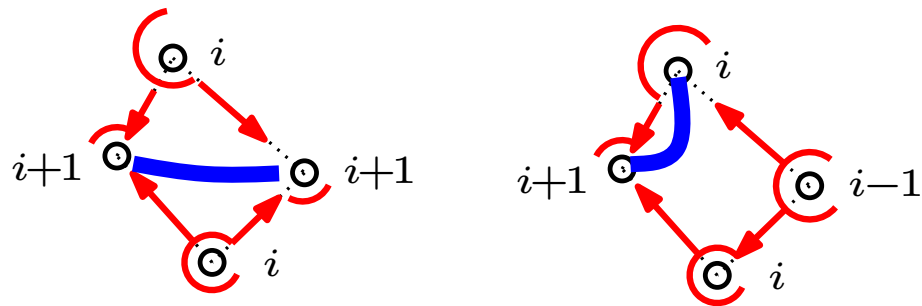
# Reformulation à l'aide des distances

La bijection part d'un sommet origine ■  
et explore la quadrangulation en largeur

Autour de chaque sommet,  
l'exploration suit une règle  
de priorité à droite



Etiqueter les sommets par le round  
auquel ils ont été visités



les chemins rouges forment un arbre  
les arêtes bleues forment un arbre  
en fait un arbre bien étiqueté

les étiquettes encodent l'arbre rouge  
(par son code des hauteurs)

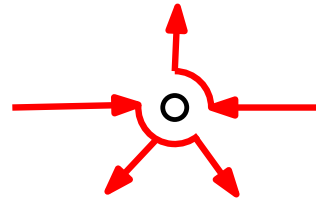
Toute face est incidente à 2 sommets

Joindre ces 2 sommets!

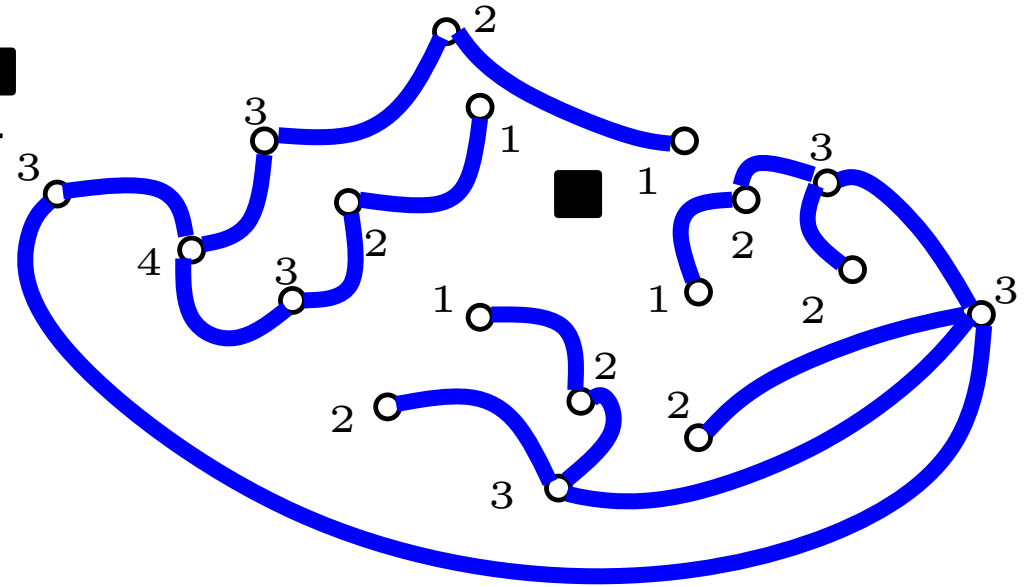
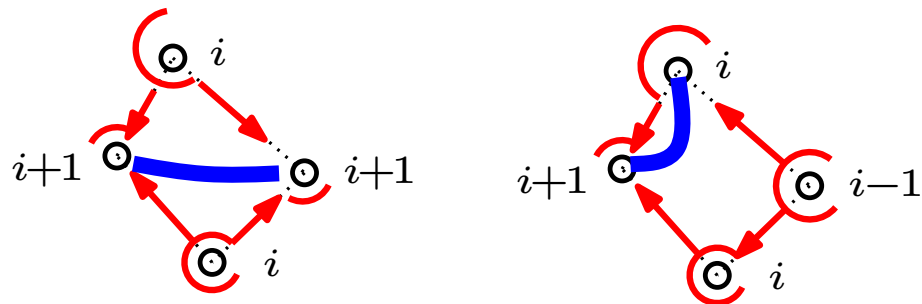
# Reformulation à l'aide des distances

La bijection part d'un sommet origine ■  
et explore la quadrangulation en largeur

Autour de chaque sommet,  
l'exploration suit une règle  
de priorité à droite



Etiqueter les sommets par le round  
auquel ils ont été visités



les chemins rouges forment un arbre  
les arêtes bleues forment un arbre  
en fait un arbre bien étiqueté

les étiquettes encodent l'arbre rouge  
(par son code des hauteurs)

la construction est donc injective.

Toute face est incidente à 2 sommets

Joindre ces 2 sommets!

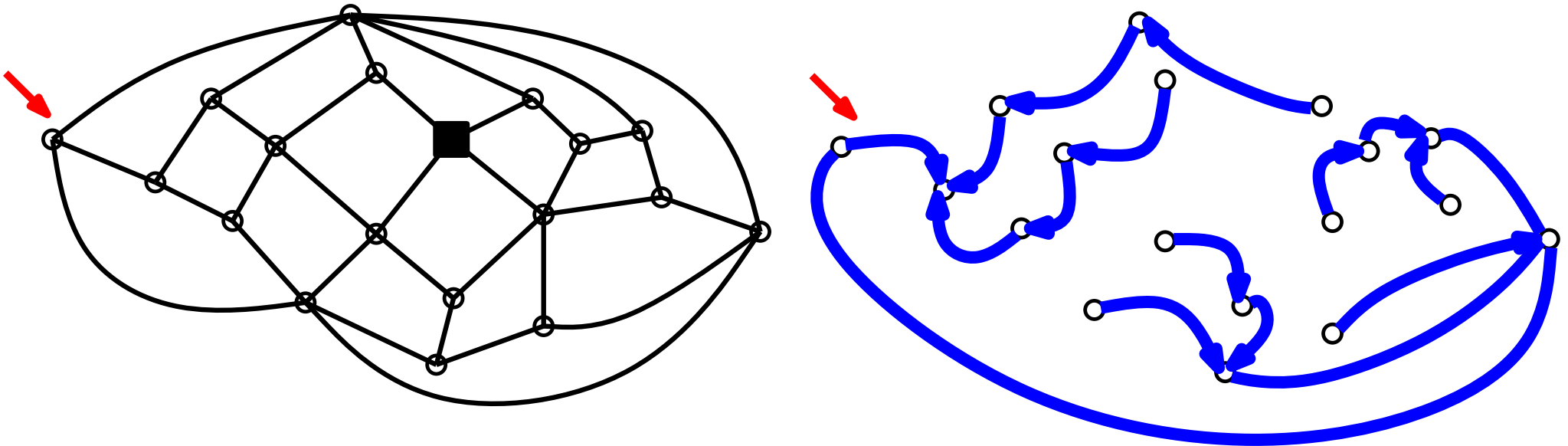




# Quadrangulations et arbres bien étiquetés

**Théorème:** Nous avons décrit une bijection entre

- quadrangulations bien enracinées pointées à  $n$  sommets, et
- arbre bien étiquetés enracinés à  $n$  arêtes

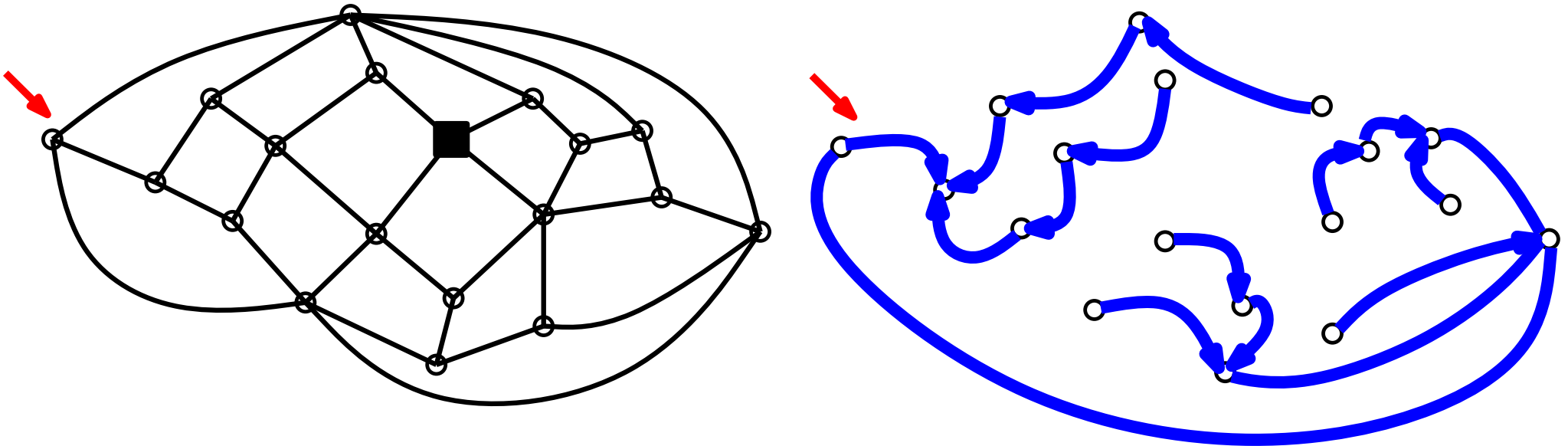


On peut oublier les étiquettes et ne retenir que leur variations.

# Quadrangulations et arbres bien étiquetés

**Théorème:** Nous avons décrit une bijection entre

- quadrangulations bien enracinées pointées à  $n$  sommets, et
- arbre bien étiquetés enracinés à  $n$  arêtes



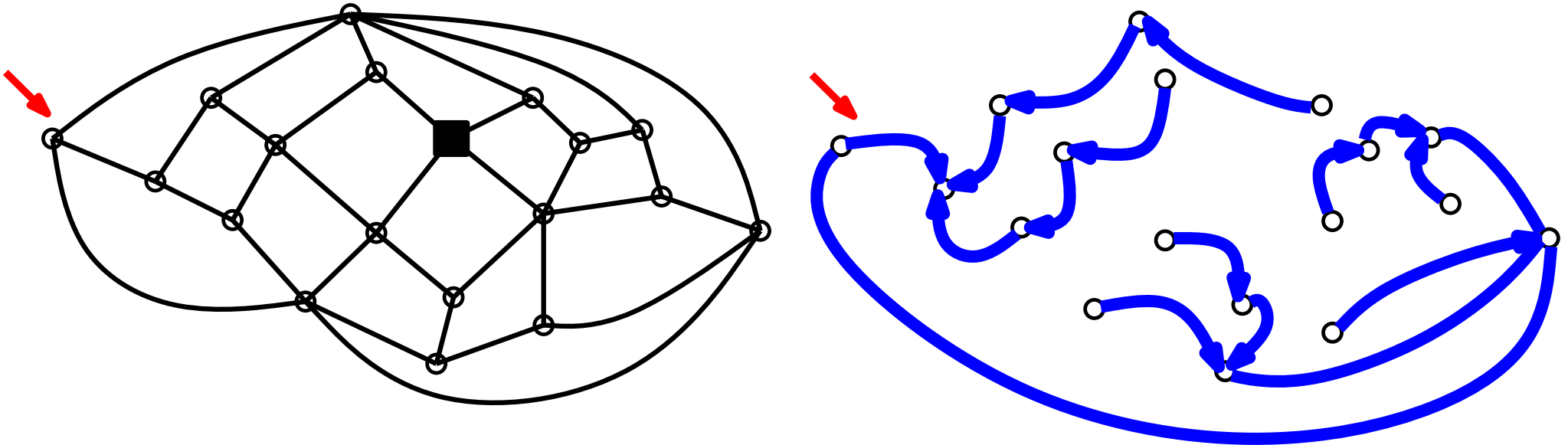
On peut oublier les étiquettes et ne retenir que leur variations.

$$\#\{\text{quadrangulations bien enracinées pointées à } n \text{ sommets}\} = \frac{3^n}{n+1} \binom{2n}{n}.$$

# Quadrangulations et arbres bien étiquetés

**Théorème:** Nous avons décrit une bijection entre

- quadrangulations bien enracinées pointées à  $n$  sommets, et
- arbre bien étiquetés enracinés à  $n$  arêtes



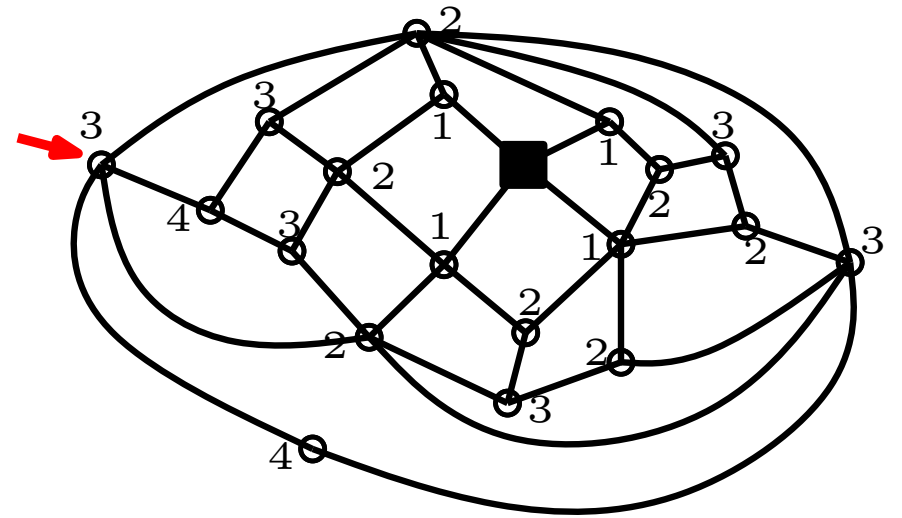
On peut oublier les étiquettes et ne retenir que leur variations.

$$\#\{\text{quadrangulations bien enracinées pointées à } n \text{ sommets}\} = \frac{3^n}{n+1} \binom{2n}{n}.$$

**Corollaire:**  $\#\{\text{quadrangulations enracinées à } n \text{ sommets}\} = \frac{2}{n+2} \frac{3^n}{n+1} \binom{2n}{n}.$

# Décomposition directe des quadrangulations

Couper les 2 chemins géodésiques les plus à gauche de la racine à l'origine

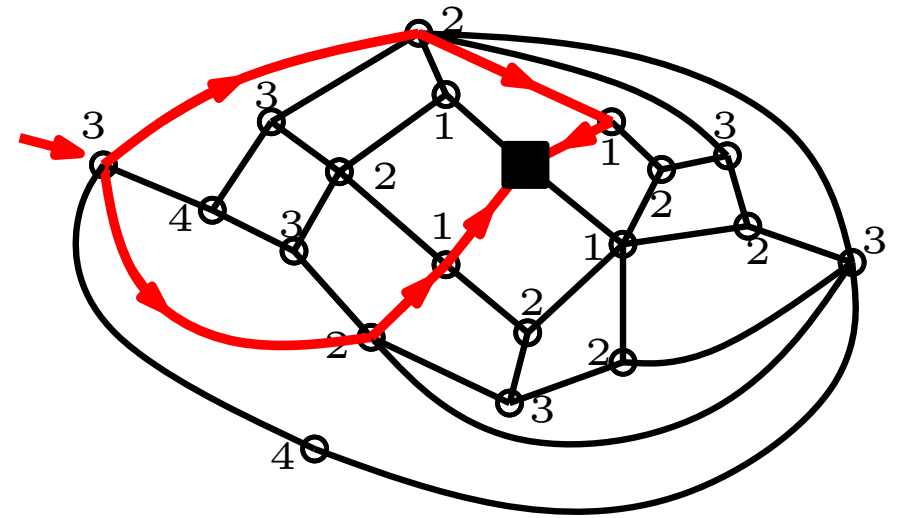




# Décomposition directe des quadrangulations

Couper les 2 chemins géodésiques les plus à gauche de la racine à l'origine

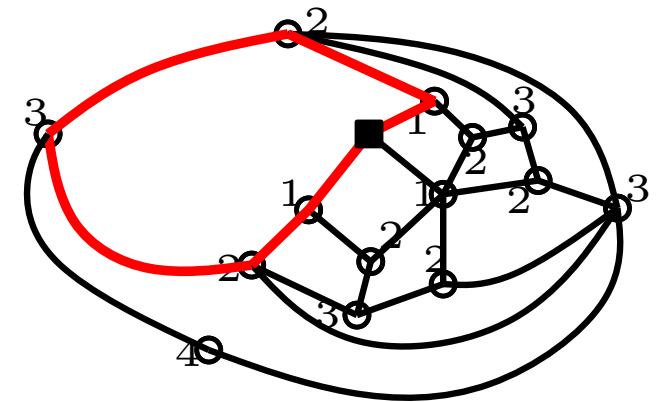
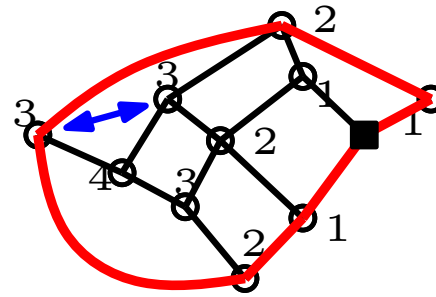
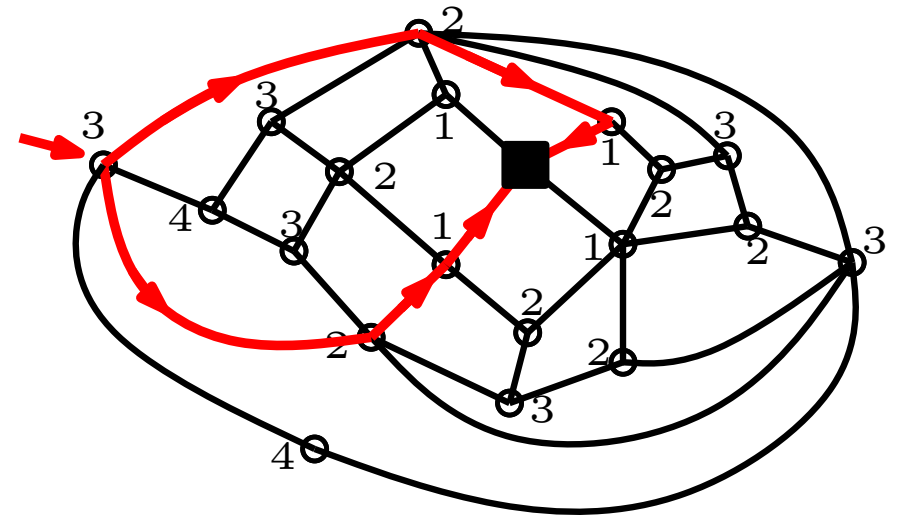
On obtient 2 sous-cartes indépendantes conditionnellement à la longueur du bord



# Décomposition directe des quadrangulations

Couper les 2 chemins géodésiques les plus à gauche de la racine à l'origine

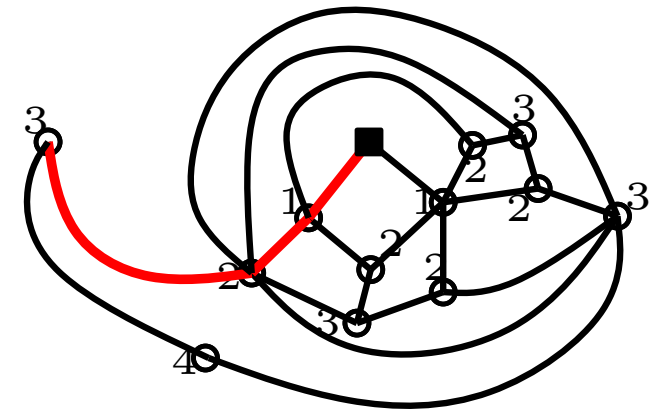
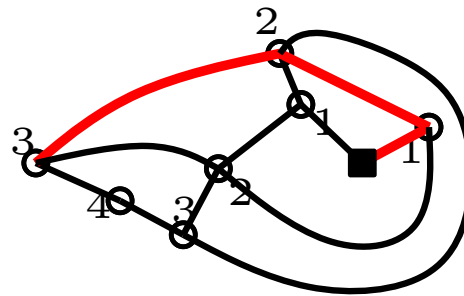
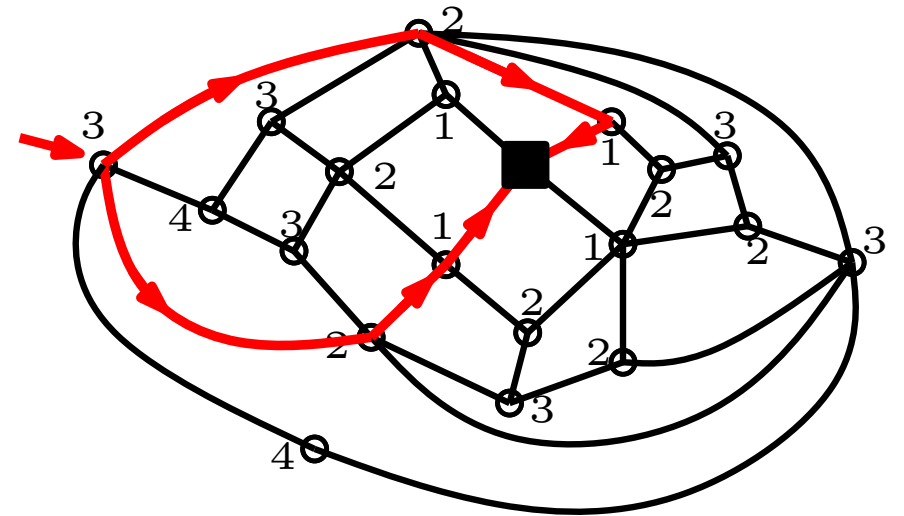
On obtient 2 sous-cartes indépendantes conditionnellement à la longueur du bord



# Décomposition directe des quadrangulations

Couper les 2 chemins géodésiques les plus à gauche de la racine à l'origine

On obtient 2 sous-cartes indépendantes conditionnellement à la longueur du bord qu'on referme en quadrangulations (fermeture éclair)

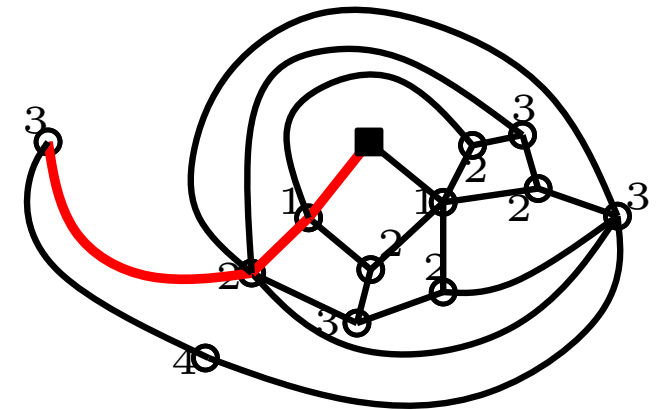
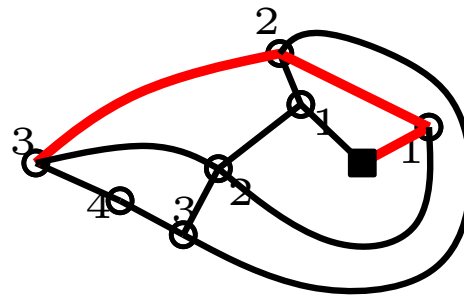
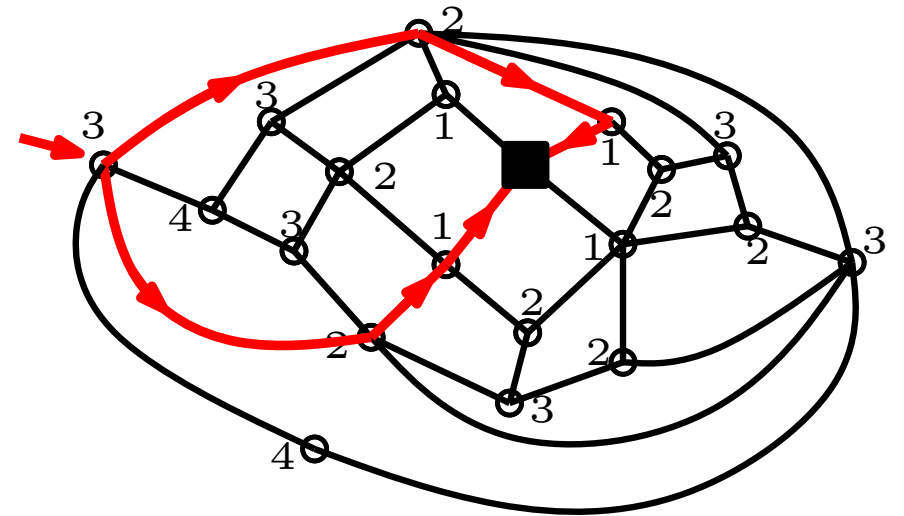




# Décomposition directe des quadrangulations

Couper les 2 chemins géodésiques les plus à gauche de la racine à l'origine

On obtient 2 sous-cartes indépendantes conditionnellement à la longueur du bord qu'on referme en quadrangulations (fermeture éclair)

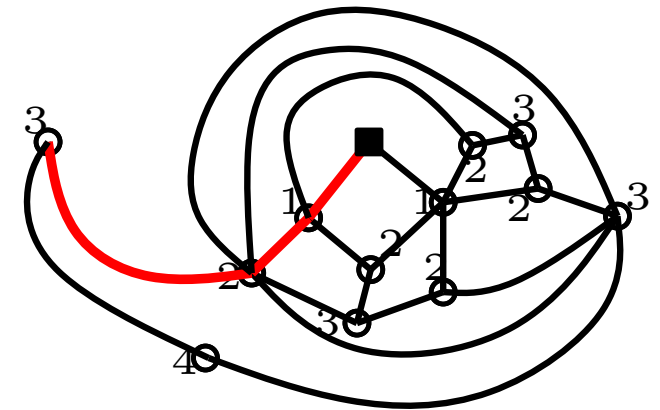
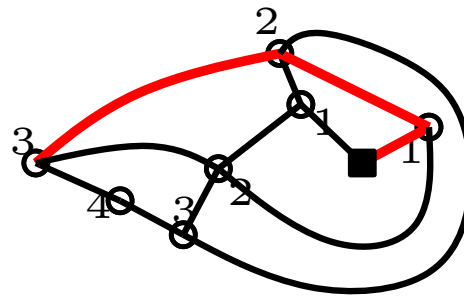
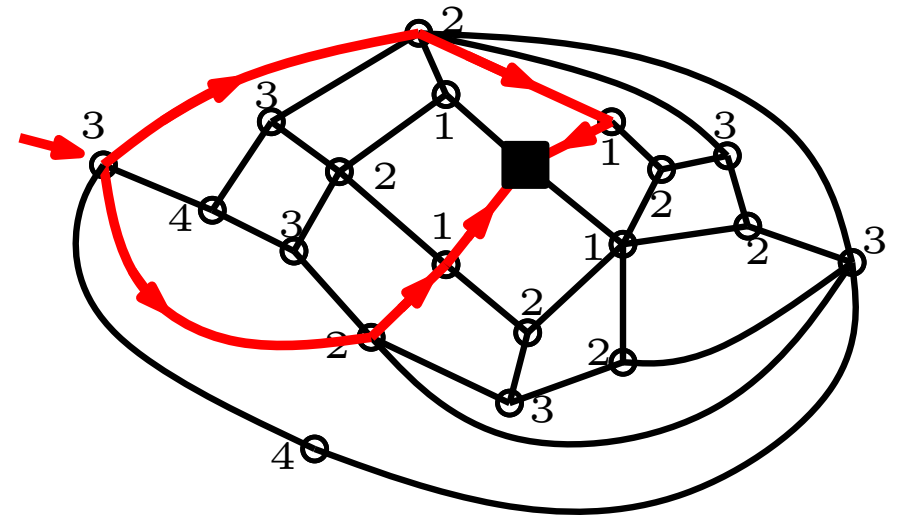


Itérativement on met ainsi en évidence la structure  $\mathbb{N}$ -algébrique des quadrangulations enracinées pointées.

# Décomposition directe des quadrangulations

Couper les 2 chemins géodésiques les plus à gauche de la racine à l'origine

On obtient 2 sous-cartes indépendantes conditionnellement à la longueur du bord qu'on referme en quadrangulations (fermeture éclair)



Itérativement on met ainsi en évidence la structure  $\mathbb{N}$ -algébrique des quadrangulations enracinées pointées.

Cf calcul des "fonctions à 2 points" par Bouttier-Guitter (2010) et Bouttier-Albenque (2011) .

Cartes et formules de Tutte

Séries rationnelles et algébriques en combinatoire

Cartes, arbres et énumération bijective

Grandes cartes aléatoires

Aperçu combinatoire de la carte Brownienne

# Quadrangulations aléatoires uniformes

$\bar{\mathcal{Q}}_n = \{\text{quadrangulations enracinées à } n \text{ faces}\}.$

Quadrangulation uniforme = variable aléatoire  $Q_n$  à valeur dans  $\bar{\mathcal{Q}}_n$  avec

$$\Pr(Q_n = q) = \frac{1}{|\bar{\mathcal{Q}}_n|} = \frac{1}{\frac{2}{n+2} \frac{3^n}{n+1} \binom{2n}{n}} \quad \text{pour tout } q \in \bar{\mathcal{Q}}_n$$

# Quadrangulations aléatoires uniformes

$\bar{Q}_n = \{\text{quadrangulations enracinées à } n \text{ faces}\}.$

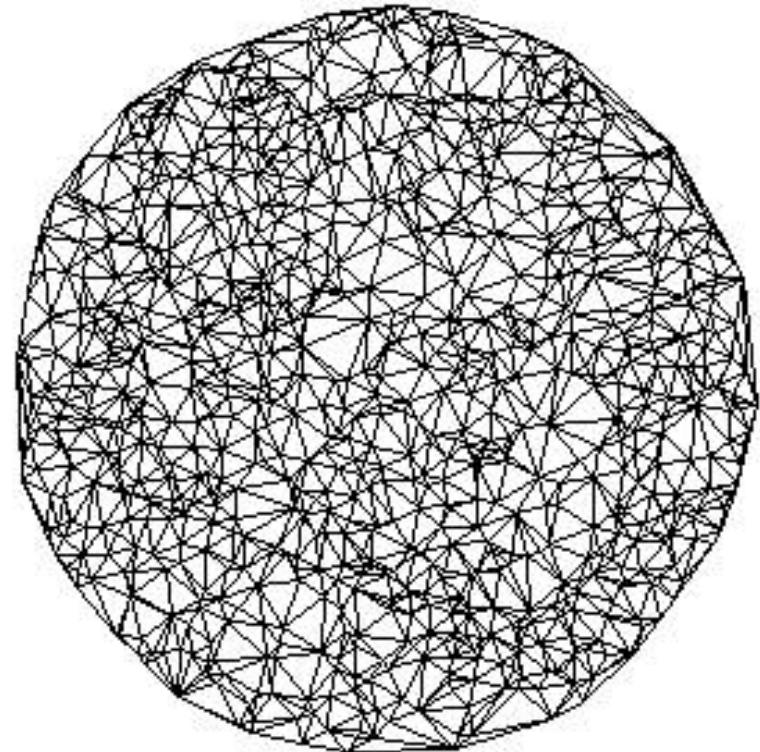
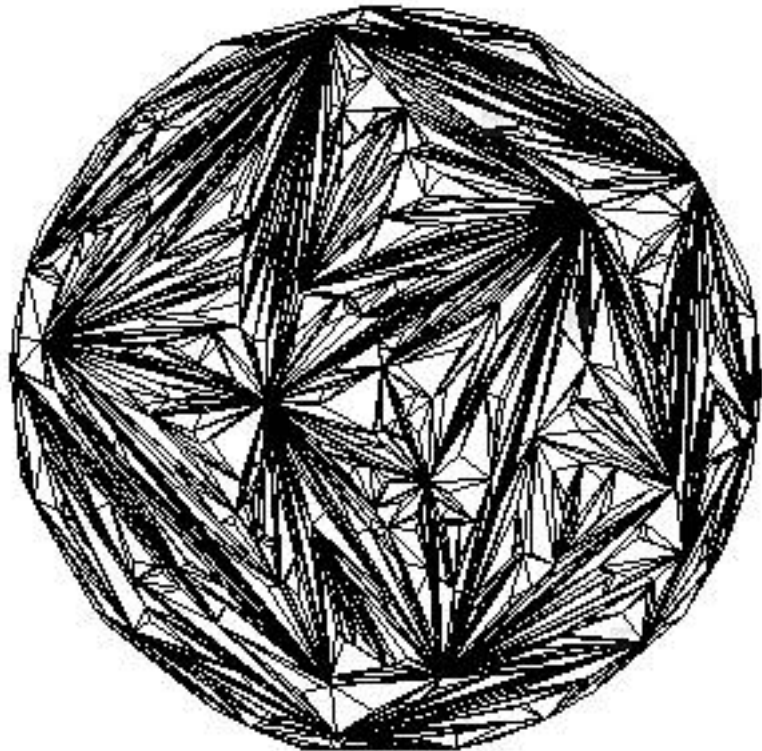
Quadrangulation uniforme = variable aléatoire  $Q_n$  à valeur dans  $\bar{Q}_n$  avec

$$\Pr(Q_n = q) = \frac{1}{|\bar{Q}_n|} = \frac{1}{\frac{2}{n+2} \frac{3^n}{n+1} \binom{2n}{n}} \quad \text{pour tout } q \in \bar{Q}_n$$

- le choix de la distribution uniforme combinatoire est le plus immédiat
- il est justifié en physique heuristiquement (calcul de Regge discret)
- il est validé *a posteriori* par l'existence des relations KPZ

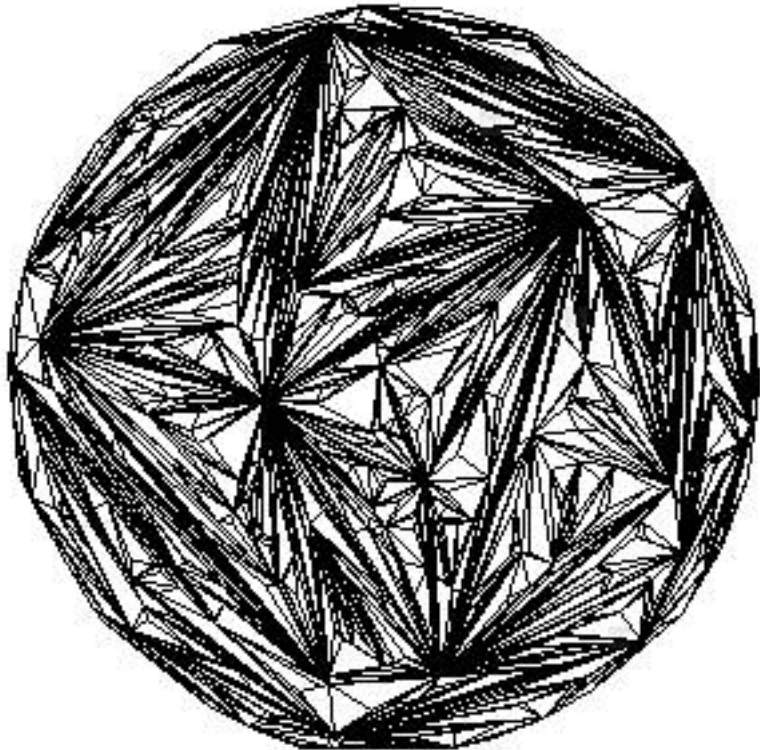
Comment étudier  $Q_n$  ?

# Propriétés des cartes aléatoires uniformes ?

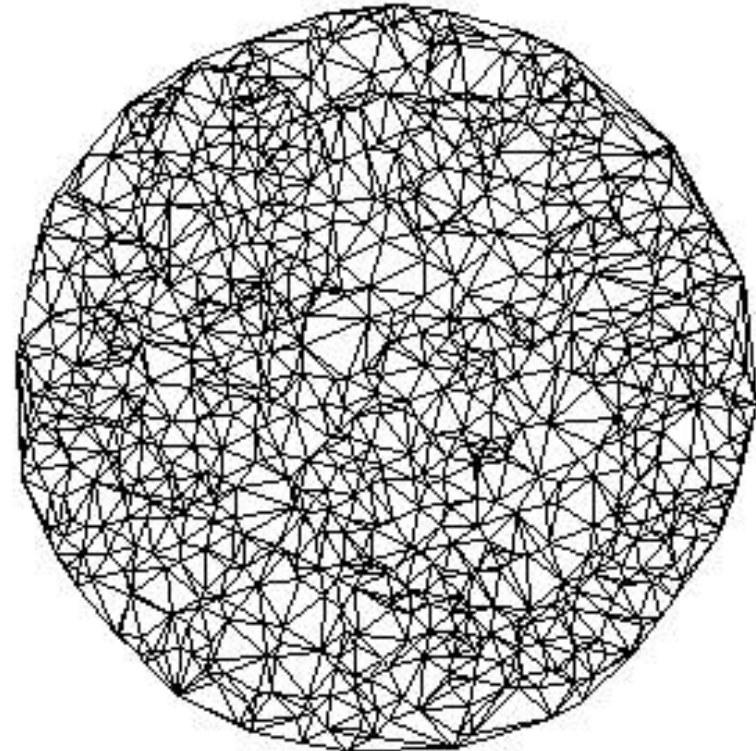




# Propriétés des cartes aléatoires uniformes ?



Triangulation uniforme aléatoire d'un disque



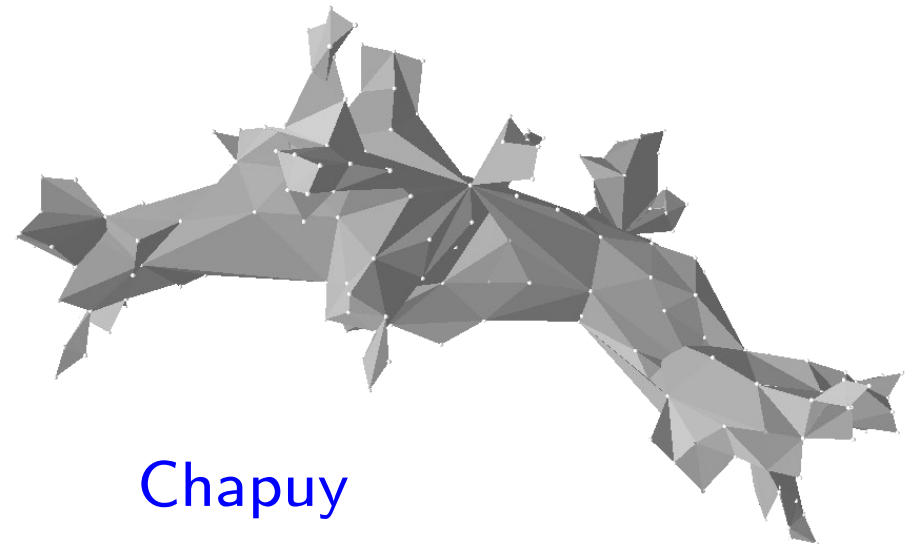
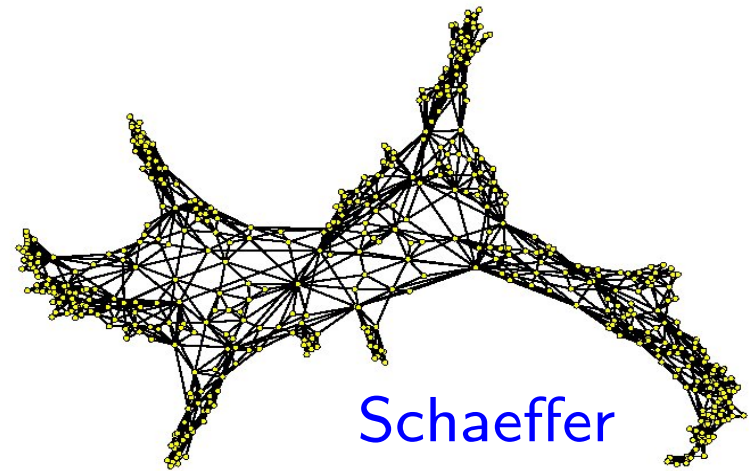
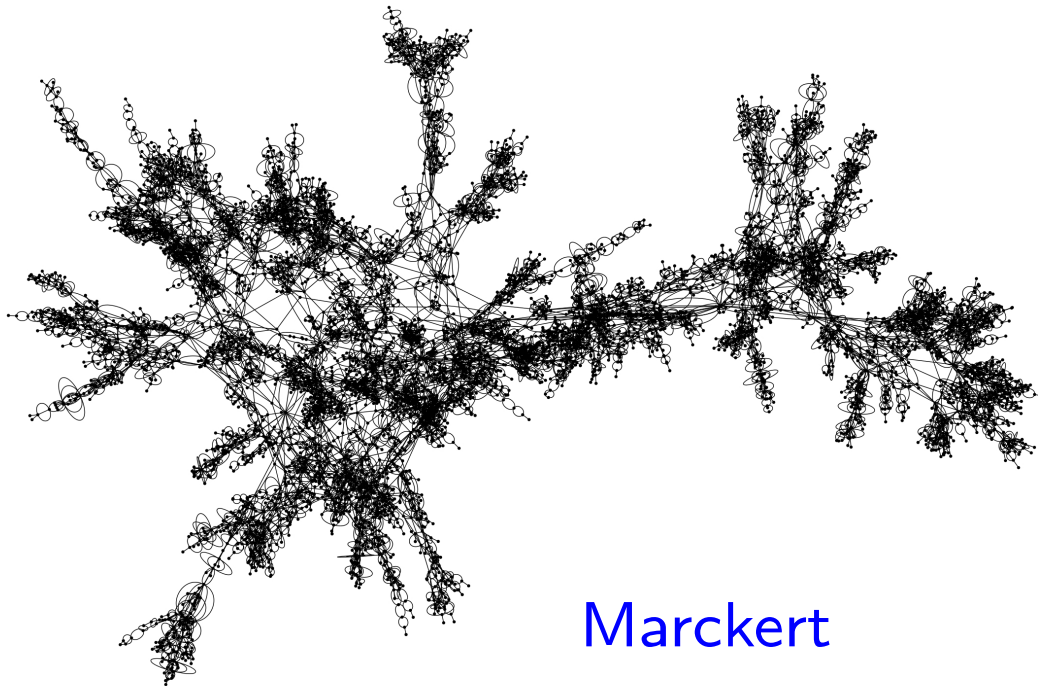
Delaunay de points aléatoires dans un disque

on est loin d'une discrétisation aléatoire d'une géométrie euclidienne  
en physique on lie cela à la modélisation discrète de la gravité quantique

# Quadrangulations uniformes comme surfaces aléatoires

L'allure d'une sphère aléatoire dépend un peu de qui dessine...

**Objectif:** Choisir une métrique intrinsèque et décrire les surfaces ainsi obtenues





# Étudier les quadrangulations aléatoires uniformes

Distribution uniforme sur les quadrangulations à  $n$  faces, pour  $n$  grand

1ère approche: Étudier le comportement asymptotique de paramètres:

- degré d'un sommet aléatoire
- distance entre 2 sommets aléatoires
- loi 0-1 pour les propriétés locales
- longueur d'un plus petit cycle diviseur

⇒ espérance, moments, lois limites discrètes ou continues, qd  $n \rightarrow \infty$

Bender, Canfield *et al* (90's →) en combinatoire

Ambjørn, Watabiki *et al* (90's →) en physique

# Étudier les quadrangulations aléatoires uniformes

Distribution uniforme sur les quadrangulations à  $n$  faces, pour  $n$  grand

**1ère approche:** Étudier le comportement asymptotique de paramètres:

- degré d'un sommet aléatoire
- distance entre 2 sommets aléatoires
- loi 0-1 pour les propriétés locales
- longueur d'un plus petit cycle diviseur

⇒ espérance, moments, lois limites discrètes ou continues, qd  $n \rightarrow \infty$

Bender, Canfield *et al* (90's →) en combinatoire

Ambjørn, Watabiki *et al* (90's →) en physique

**Exemple:**  $\Delta_n =$  distance entre 2 sommets aléatoires uniformes de  $Q_n$

**Théorème** (Chassaing-S. 2004)  $\mathbb{E}(\Delta_n) \sim c \cdot n^{1/4}$

$(n^{-1/4} \Delta_n) \xrightarrow{d} \max$  (serpent Brownien)

# Étudier les quadrangulations aléatoires uniformes

Distribution uniforme sur les quadrangulations à  $n$  faces, pour  $n$  grand

2ème approche: Définir des surfaces aléatoires limites

# Étudier les quadrangulations aléatoires uniformes

Distribution uniforme sur les quadrangulations à  $n$  faces, pour  $n$  grand

2ème approche: Définir des surfaces aléatoires limites

– convergence vers une limite d'échelle (Pb posé au séminaire Hypathie en 2002 à Lyon)

⇒ la carte Brownienne Marckert, Mokkadem, Le Gall, Miermont, ...

# Étudier les quadrangulations aléatoires uniformes

Distribution uniforme sur les quadrangulations à  $n$  faces, pour  $n$  grand

2ème approche: Définir des surfaces aléatoires limites

– convergence vers une limite d'échelle (Pb posé au séminaire Hypathie en 2002 à Lyon)

⇒ **la carte Brownienne** Marckert, Mokkadem, Le Gall, Miermont, ...

puis Weill, Curien, Benjamini,...

– convergence vers une limite infinie discrète

⇒ **la quadrangulation infinie uniforme (UIPQ)** Angel, Schramm, ...

puis Durhus, Chassaing, Krikun, Bettinelli,...

Cartes et formules de Tutte

Séries rationnelles et algébriques en combinatoire

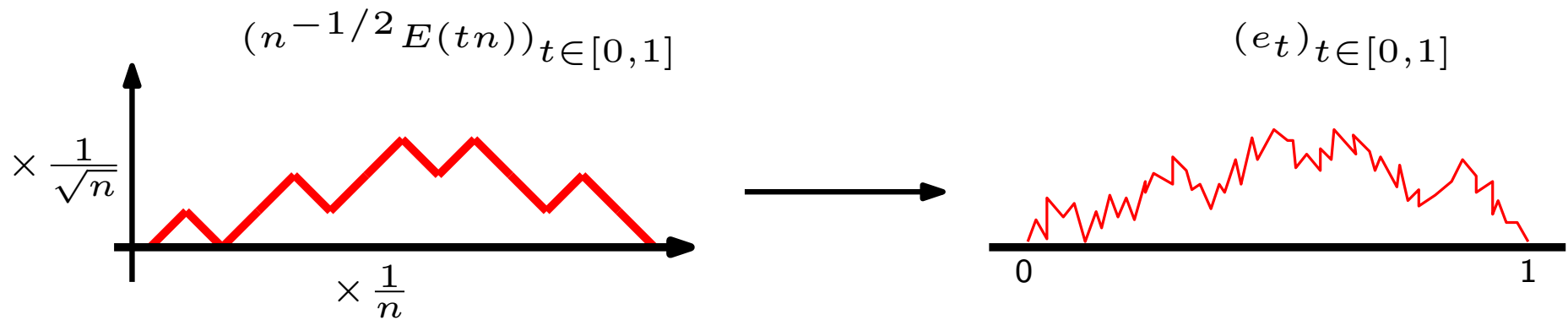
Cartes, arbres et énumération bijective

Grandes cartes aléatoires

Aperçu combinatoire de la carte Brownienne

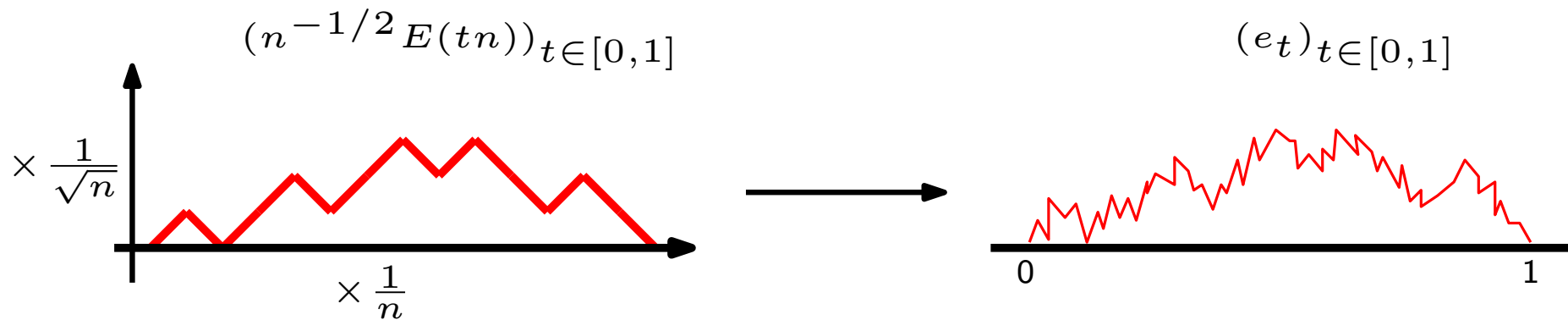
# Limite d'échelle ?

L'excursion discrète de longueur  $2n$  aléatoire uniforme,  
renormalisée par un facteur  $n^{-1}$  en longueur et  $n^{-1/2}$  en hauteur,  
converge vers l'**excursion Brownienne**



# Limite d'échelle ?

L'excursion discrète de longueur  $2n$  aléatoire uniforme,  
renormalisée par un facteur  $n^{-1}$  en longueur et  $n^{-1/2}$  en hauteur,  
converge vers l'**excursion Brownienne**



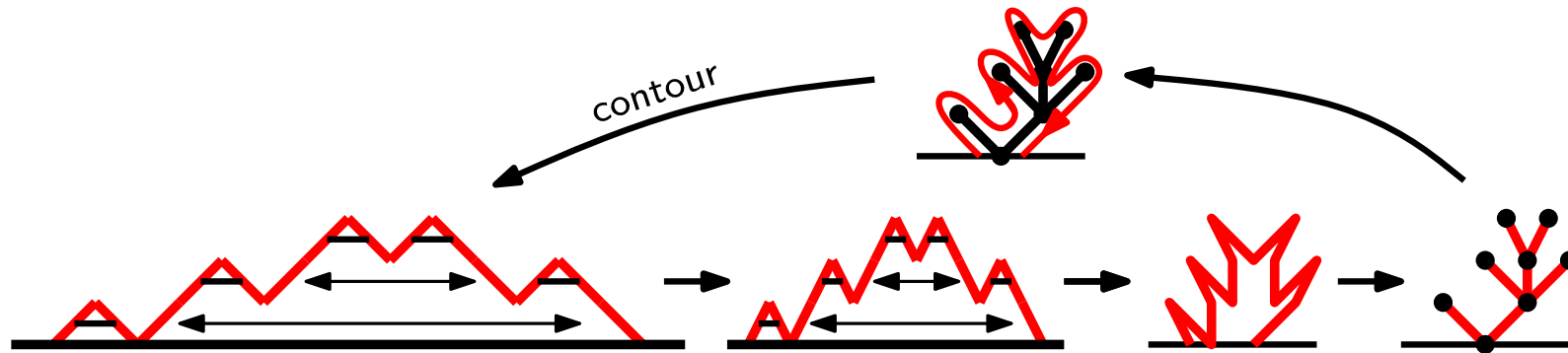
on se contentera ici de ce point de vue naïf sur l'univers Brownien...



# Le jardin de Catalan: transformations entre objets de $\# \frac{1}{n+1} \binom{2n}{n}$

excursion discrète de longueur  $2n =$

codage de contour d'un arbre plan à  $n$  arêtes



Le code d'un arbre est obtenu lors d'une marche autour de l'arbre:

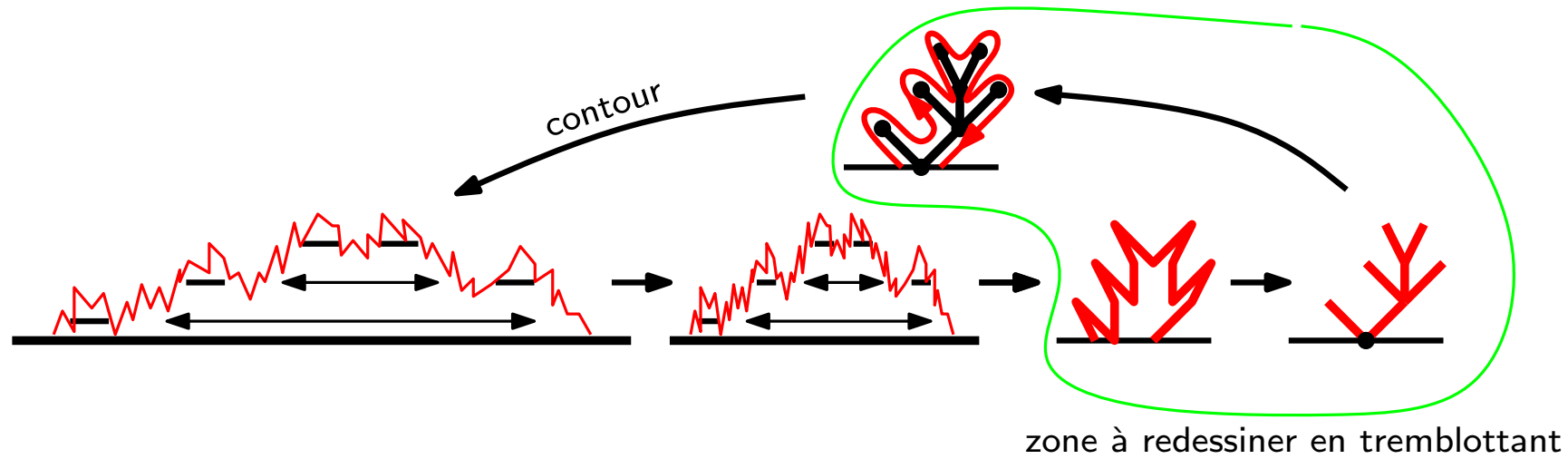
- pas **montant** la première fois qu'un sommet est visité
- pas **descendant** la dernière fois qu'un sommet est visité

L'arbre se retrouve par identification des points opposés sous le chemin.

# De l'excursion Brownienne au Continuum Random Tree

excursion Brownienne =

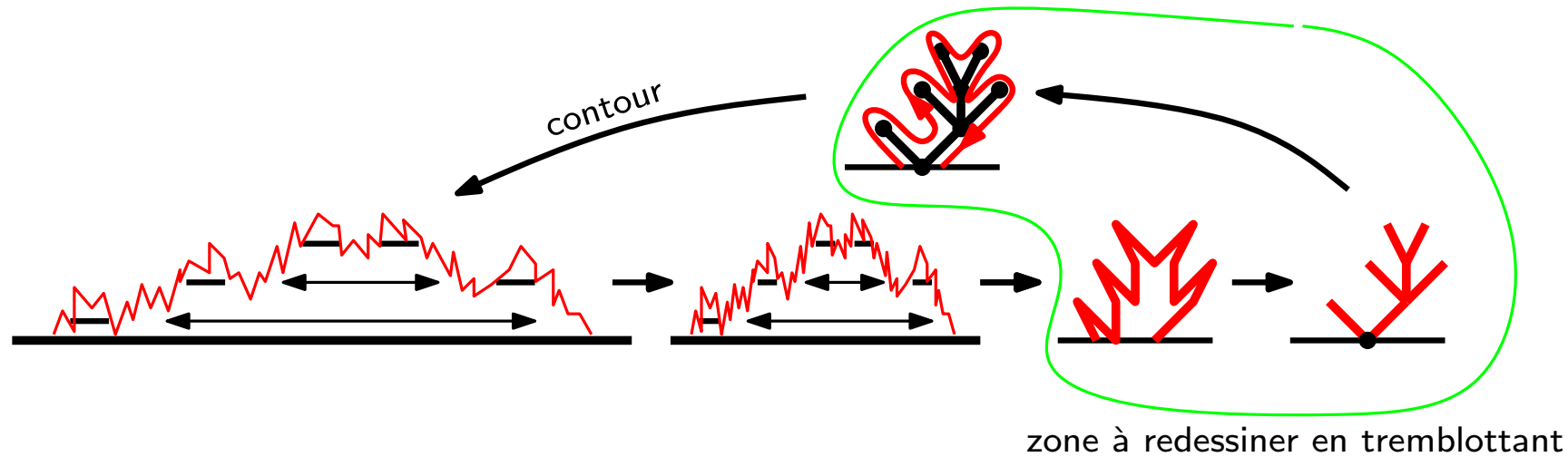
codage de contour d'un arbre continu aléatoire



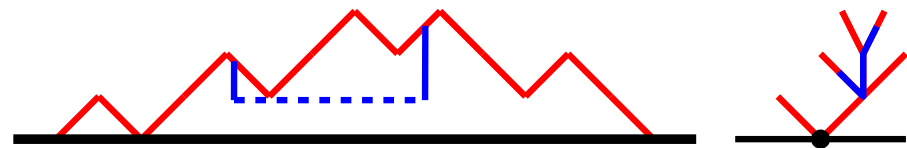
# De l'excursion Brownienne au Continuum Random Tree

excursion Brownienne =

codage de contour d'un arbre continu aléatoire



Pour vraiment définir le CRT  
il faut le munir d'une distance.  
On s'inspire du cas discret...

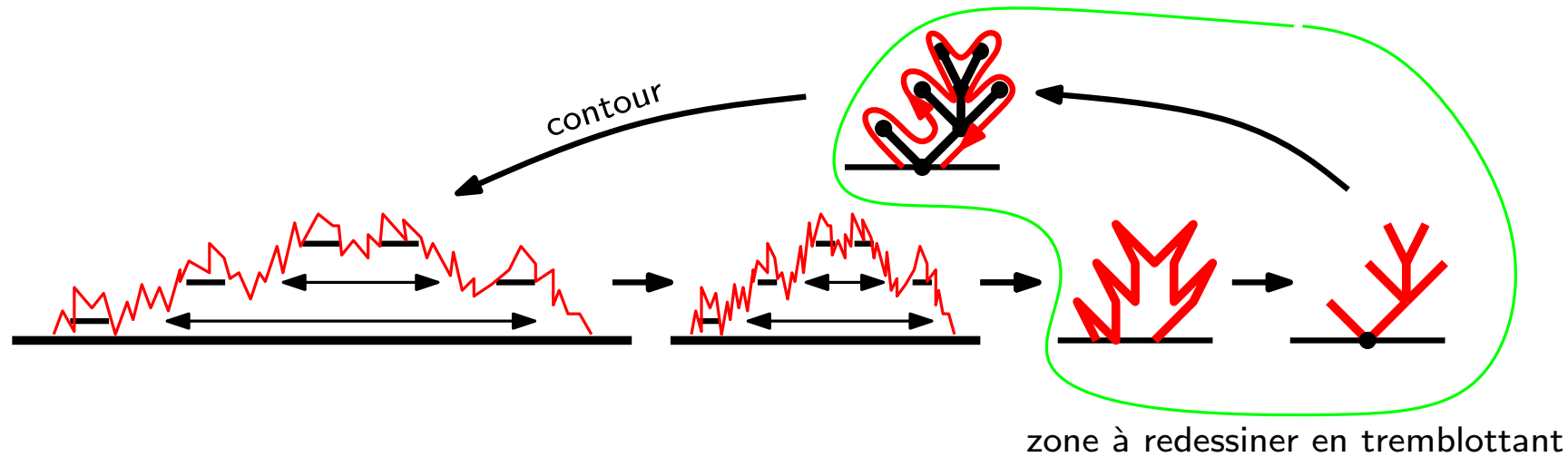


$$d(x, y) = e_x + e_y - 2 \inf(e_z \mid z \in [xy])$$

# De l'excursion Brownienne au Continuum Random Tree

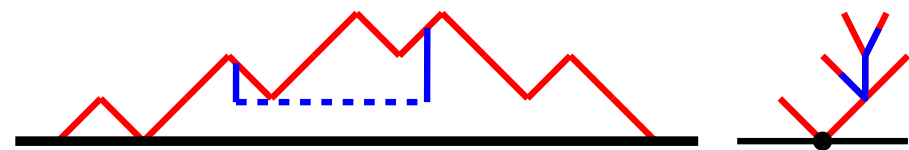
excursion Brownienne =

codage de contour d'un arbre continu aléatoire



Pour vraiment définir le CRT  
il faut le munir d'une distance.  
On s'inspire du cas discret...

$$\text{CRT}(e) = \left( [0, 1]^2 / \{d = 0\}, d \right)$$

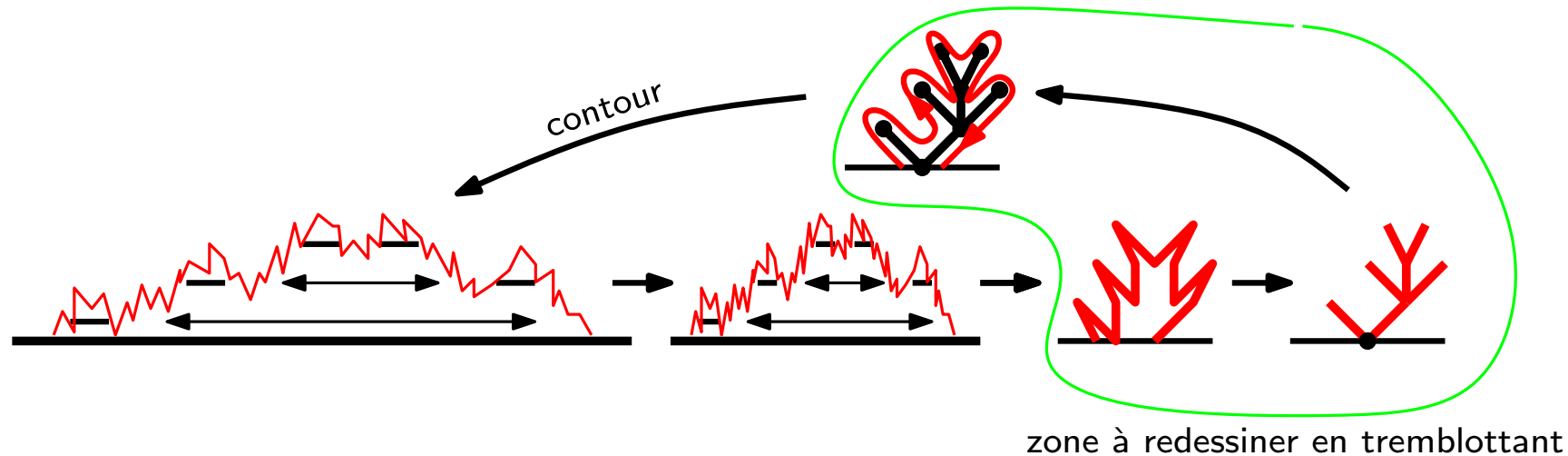


$$d(x, y) = e_x + e_y - 2 \inf(e_z \mid z \in [xy])$$

# De l'excursion Brownienne au Continuum Random Tree

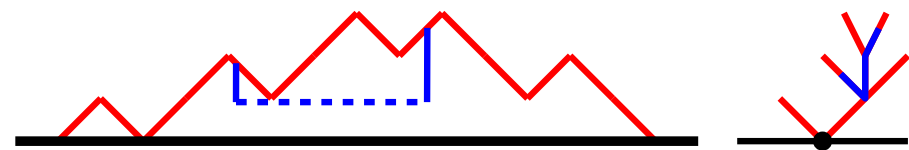
excursion Brownienne =

codage de contour d'un arbre continu aléatoire



Pour vraiment définir le CRT  
il faut le munir d'une distance.  
On s'inspire du cas discret...

$$\text{CRT}(e) = \left( [0, 1]^2 / \{d = 0\}, d \right)$$

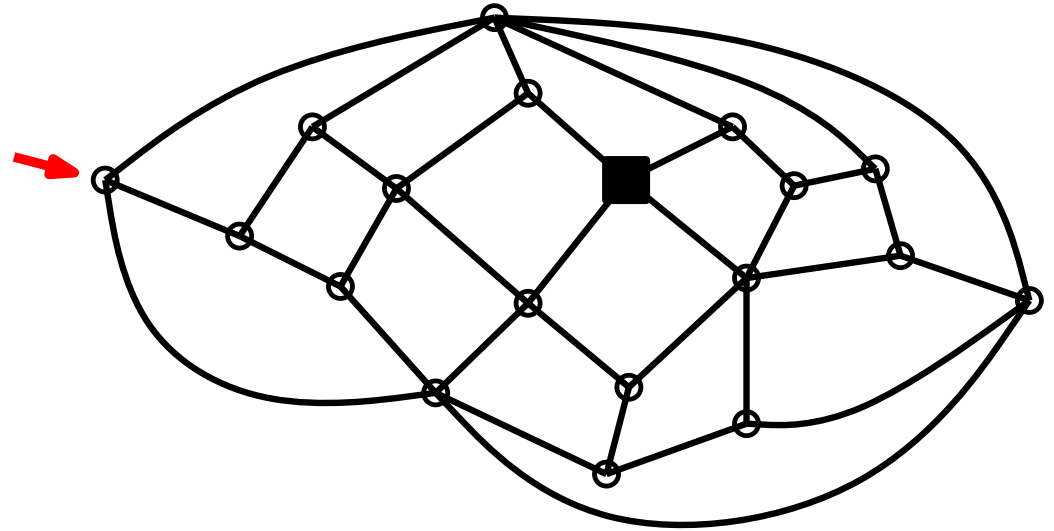


$$d(x, y) = e_x + e_y - 2 \inf(e_z \mid z \in [xy])$$

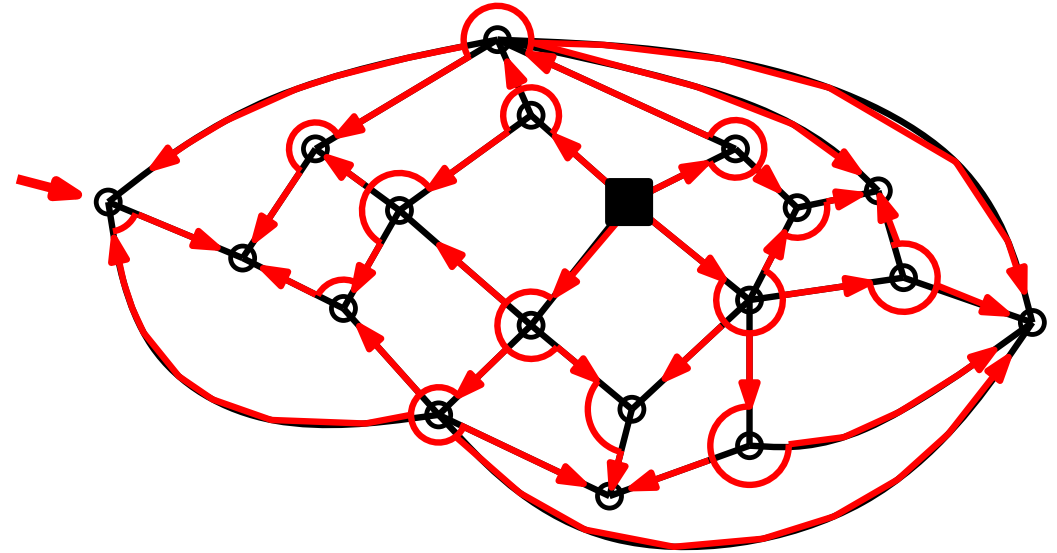
Prouver la convergence rigoureusement est bien sûr plus compliqué !

cf. Aldous, Le Gall, ...

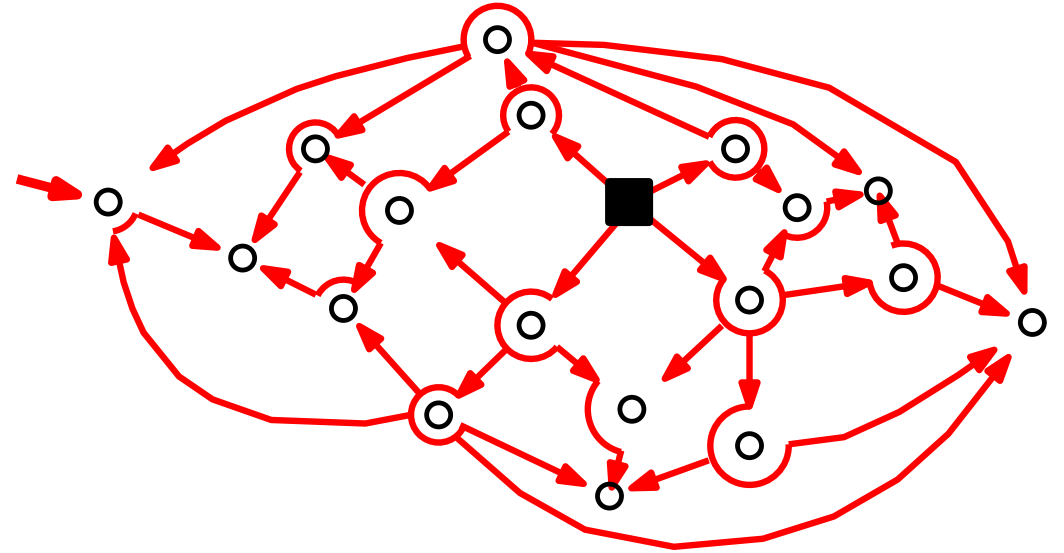
# Les quadrangulations comme recollement de 2 arbres



# Les quadrangulations comme recollement de 2 arbres



# Les quadrangulations comme recollement de 2 arbres



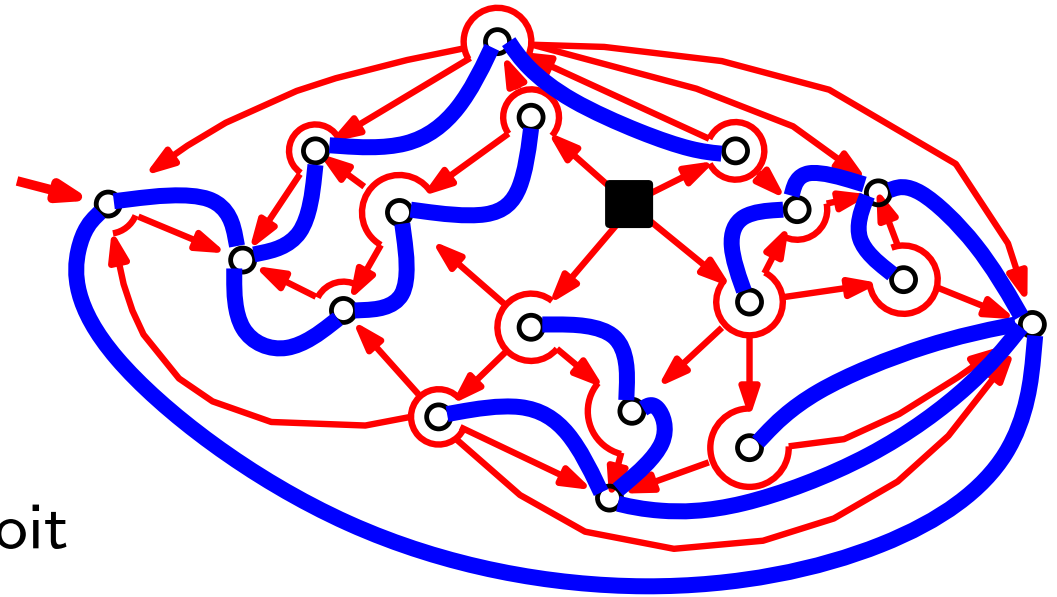
les chemins rouges forment un arbre



# Les quadrangulations comme recollement de 2 arbres

Du point de vue discret, l'arbre bleu est utilisé pour identifier entre eux des sommets de l'arbre rouge.

⇒ pour se déplacer dans la carte on utilise les arêtes rouges mais on a droit aux sommets bleus comme raccourcis.



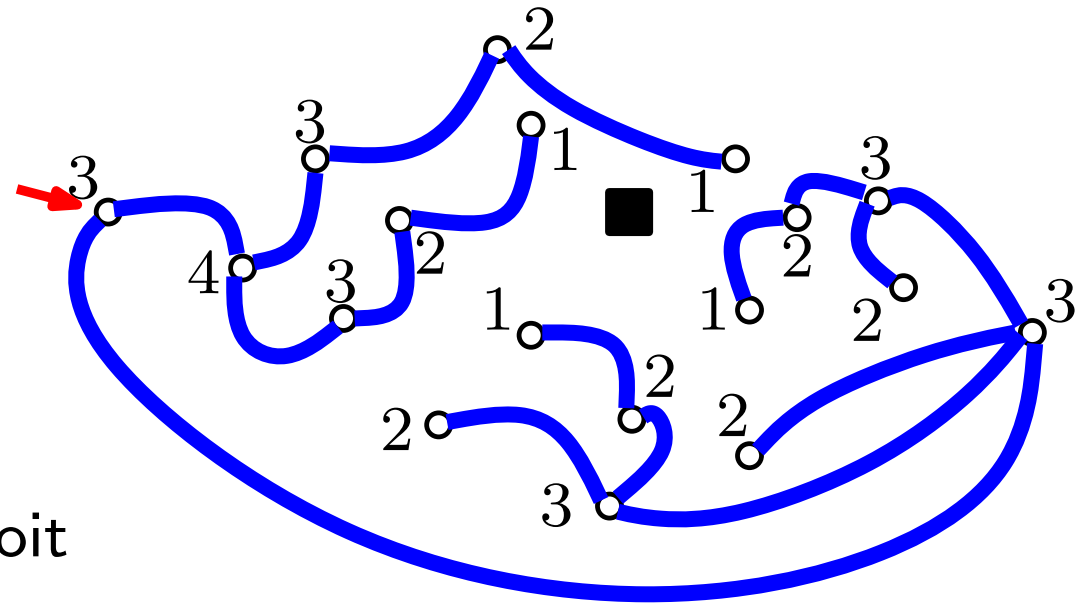
les chemins rouges forment un arbre

les arêtes bleues forment un arbre

# Les quadrangulations comme recollement de 2 arbres

Du point de vue discret, l'arbre bleu est utilisé pour identifier entre eux des sommets de l'arbre rouge.

⇒ pour se déplacer dans la carte on utilise les arêtes rouges mais on a droit aux sommets bleus comme raccourcis.



les chemins rouges forment un arbre

les arêtes bleues forment un arbre

L'arbre bleu peut se coder par son contour.

L'arbre rouge est codé par les étiquettes qui forment elles aussi une excursion quand on tourne autour de l'arbre

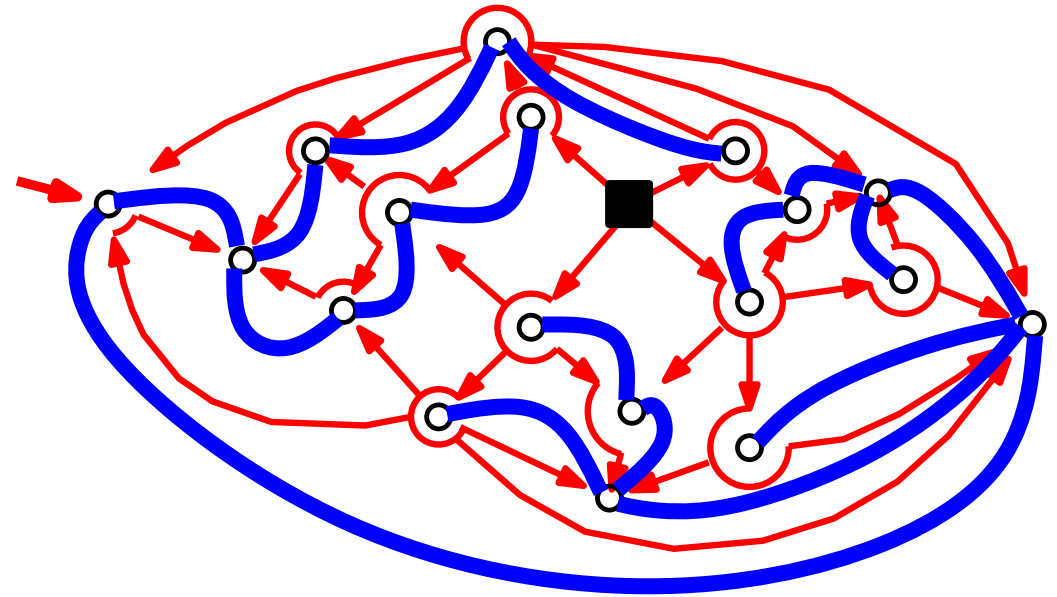
Les deux excursions sont corrélées (pour que les étiquettes soient les mêmes dans chaque coin des sommets bleus)

# La quadrangulation Brownienne

(Marckert-Mokkadem)

Les 2 excursions corrélées sont une version discrète du **serpent Brownien** de Le Gall, qui encode à son tour **l'arbre plongé continu** d'Aldous

Le recollement des 2 arbres continus encodés donne la carte Brownienne.

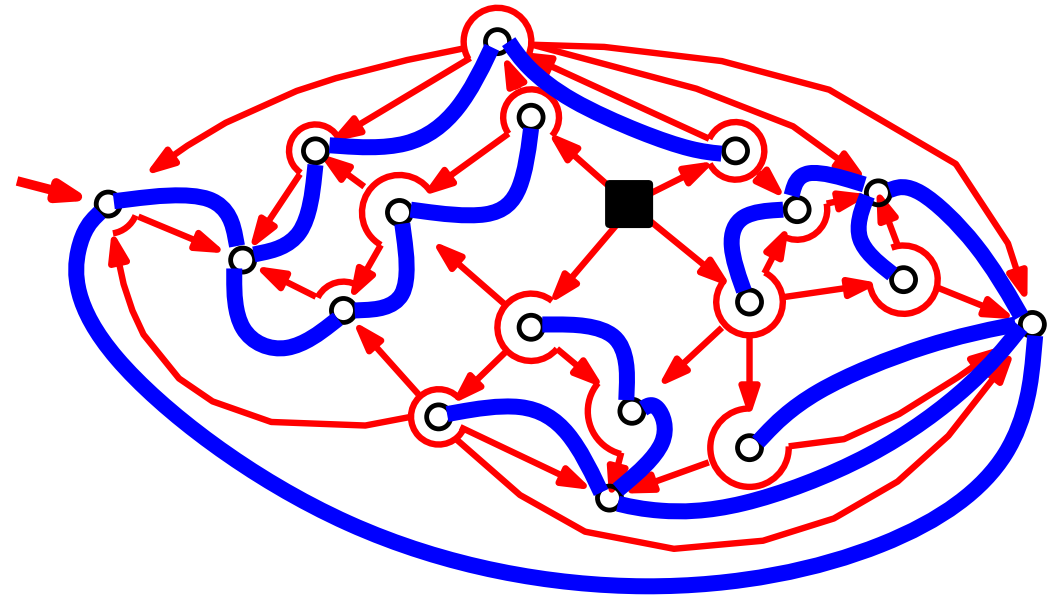


# La quadrangulation Brownienne

(Marckert-Mokkadem)

Les 2 excursions corrélées sont une version discrète du **serpent Brownien** de Le Gall, qui encode à son tour **l'arbre plongé continu** d'Aldous

Le recollement des 2 arbres continus encodés donne la carte Brownienne.



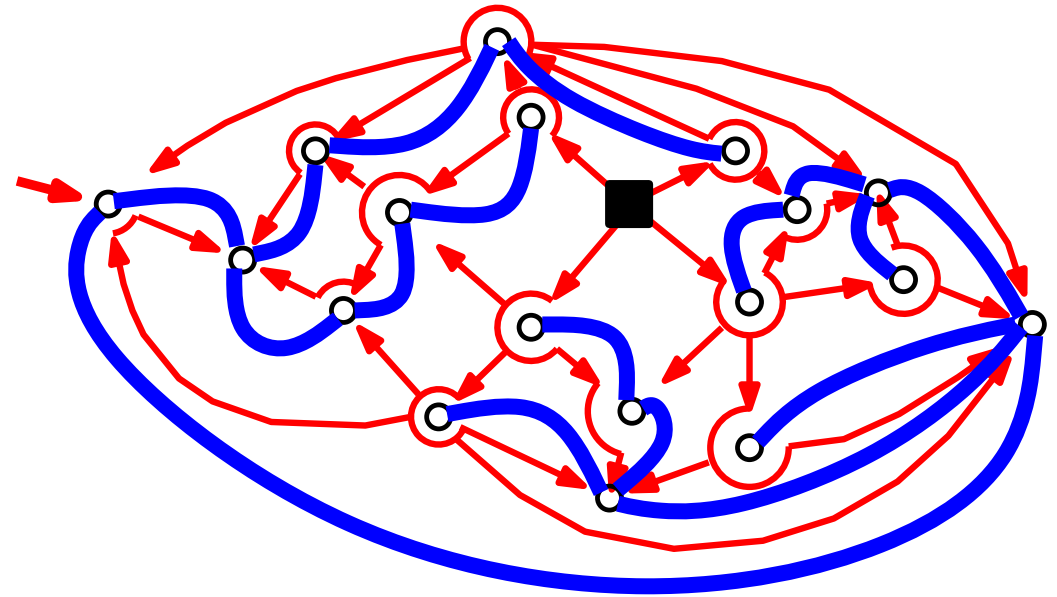
⇒ pour se déplacer dans cette carte on utilise les arêtes rouges (de la seconde excursion) mais on a droit aux sommets bleus comme raccourcis (*i.e* aux identifications de la première excursion).

# La quadrangulation Brownienne

(Marckert-Mokkadem)

Les 2 excursions corrélées sont une version discrète du **serpent Brownien** de Le Gall, qui encode à son tour **l'arbre plongé continu** d'Aldous

Le recollement des 2 arbres continus encodés donne la carte Brownienne.



⇒ pour se déplacer dans cette carte on utilise les arêtes rouges (de la seconde excursion) mais on a droit aux sommets bleus comme raccourcis (*i.e* aux identifications de la première excursion).

Prouver la convergence et l'unicité de la limite est un tour de force en plusieurs étapes, complété récemment indépendamment par Le Gall et par Miermont.

# Résumé

## Cartes et formules de Tutte

de belles formules, obtenue difficilement  
(méthode quadratique, intégrales de matrices,...)

# Résumé

## Cartes et formules de Tutte

de belles formules, obtenue difficilement  
(méthode quadratique, intégrales de matrices,...)

## Séries rationnelles et algébriques en combinatoire

l'algébricité révèle une structure cachée

# Résumé

## Cartes et formules de Tutte

de belles formules, obtenue difficilement  
(méthode quadratique, intégrales de matrices,...)

## Séries rationnelles et algébriques en combinatoire

l'algébricité révèle une structure cachée

## Cartes, arbres et énumération bijective

cartes comme recollement d'arbres, un idée en fait générale



# Résumé

## Cartes et formules de Tutte

de belles formules, obtenue difficilement  
(méthode quadratique, intégrales de matrices,...)

## Séries rationnelles et algébriques en combinatoire

l'algébricité révèle une structure cachée

## Cartes, arbres et énumération bijective

cartes comme recollement d'arbres, un idée en fait générale

## Grandes cartes aléatoires

un modèle combinatoire de surfaces aléatoires

# Résumé

## Cartes et formules de Tutte

de belles formules, obtenue difficilement  
(méthode quadratique, intégrales de matrices,...)

## Séries rationnelles et algébriques en combinatoire

l'algébricité révèle une structure cachée

## Cartes, arbres et énumération bijective

cartes comme recollement d'arbres, un idée en fait générale

## Grandes cartes aléatoires

un modèle combinatoire de surfaces aléatoires

## Aperçu combinatoire de la carte Brownienne

passage à la limite sur les constructions combinatoires

# Conclusions

- L'excursion Brownienne décrit la limite d'échelle de toute sorte d'excursions aléatoires discrètes plus ou moins complexes.
  - L'arbre continu aléatoire est limite d'échelle de toute sorte d'arbres aléatoires discrets plus ou moins complexes.
- ⇒ On pense qu'il en est de même de la carte Brownienne.

# Conclusions

- L'excursion Brownienne décrit la limite d'échelle de toute sorte d'excursions aléatoires discrètes plus ou moins complexes.
  - L'arbre continu aléatoire est limite d'échelle de toute sorte d'arbres aléatoires discrets plus ou moins complexes.
- ⇒ On pense qu'il en est de même de la carte Brownienne.

Les résultats de Le Gall et Miermont valent pour des cartes avec des contraintes de degré de faces plus générales ( $q$ -angulations, . . . )

# Conclusions

- L'excursion Brownienne décrit la limite d'échelle de toute sorte d'excursions aléatoires discrètes plus ou moins complexes.
  - L'arbre continu aléatoire est limite d'échelle de toute sorte d'arbres aléatoires discrets plus ou moins complexes.
- ⇒ On pense qu'il en est de même de la carte Brownienne.

Les résultats de Le Gall et Miermont valent pour des cartes avec des contraintes de degré de faces plus générales ( $q$ -angulations, . . . )

Un challenge est de montrer que des objets *a priori* plus éloignés tels que les **graphes planaires** (non plongés) ou les **revêtements ramifiés**, sont en fait dans la même *classe d'universalité*.

# Conclusions

- L'excursion Brownienne décrit la limite d'échelle de toute sorte d'excursions aléatoires discrètes plus ou moins complexes.
  - L'arbre continu aléatoire est limite d'échelle de toute sorte d'arbres aléatoires discrets plus ou moins complexes.
- ⇒ On pense qu'il en est de même de la carte Brownienne.

Les résultats de Le Gall et Miermont valent pour des cartes avec des contraintes de degré de faces plus générales ( $q$ -angulations, . . . )

Un challenge est de montrer que des objets *a priori* plus éloignés tels que les **graphes planaires** (non plongés) ou les **revêtements ramifiés**, sont en fait dans la même *classe d'universalité*.

---

On dispose d'un cadre bijectif très général pour la construction de cartes par recollements d'arbres (Bernardi-Chapuy-Fusy 2011, Albenque-Poulalhon 2012)

Il reste à utiliser ces constructions pour passer à la limite...

Merci de votre attention