Preuve bijective de la formule d'Hurwitz

Enrica Duchi, Dominique Poulalhon, Gilles Schaeffer

Université Paris 7

CNRS / Ecole Polytechnique

Journées combinatoires de Bordeaux, 2 février 2012

ERC Research Starting Grant 208471 "ExploreMaps"

Permutations, factorisations, cartes croissantes

Factorisations de permutations

Permutations en notation cyclique: $\sigma = (1,2,5)(3,6)(4)(7) = (1,2,5)(3,6)$

Type cyclique $=$ distribution des longueurs des cycles: $\lambda(\sigma) = 1^2\,2\,3$

Transpositions $=$ permutations de type $\lambda = 2\,1^{n-1}$: $\tau = (2,5)$.

Factorisations de permutations

Permutations en notation cyclique: $\sigma = (1,2,5)(3,6)(4)(7) = (1,2,5)(3,6)$

Type cyclique = distribution des longueurs des cycles: $\lambda(\sigma) = 1^2\,2\,3$

Transpositions = permutations de type $\lambda = 2\,1^{n-1}$: $\tau = (2,5)$.

Factorisation en tranpositions = décomposition en produit de transpositions

(1,2)(1,3)=(1,2,3) (1,3)(2,3)=(1,2,3) (1,3)(2,3)(2,4)(1,3)=(1,4,2)(3)

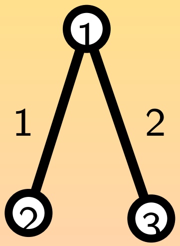
Factorisations de permutations

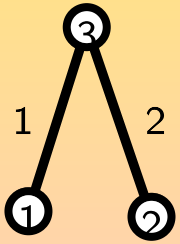
Permutations en notation cyclique: $\sigma = (1,2,5)(3,6)(4)(7) = (1,2,5)(3,6)$
Type cyclique = distribution des longueurs des cycles: $\lambda(\sigma) = 1^2\,2\,3$
Transpositions = permutations de type $\lambda = 2\,1^{n-1}$: $\tau = (2,5)$.

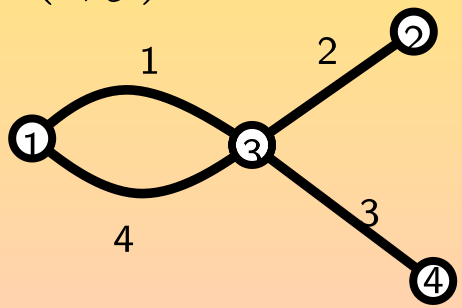
Factorisation en tranpositions = décomposition en produit de transpositions

(1,2)(1,3)=(1,2,3) (1,3)(2,3)=(1,2,3) (1,3)(2,3)(2,4)(1,3)=(1,4,2)(3)

Graphe associé à une factorisation $\tau_1 \ldots \tau_m = \sigma \in S_n$:
– sommets associés aux éléments permutés: $\{1, \ldots, n\}$
– arêtes associées aux transpositions:
une arête (i,j) numérotée k si $\tau_k = (i,j)$







Factorisations de permutations

Permutations en notation cyclique: $\sigma = (1,2,5)(3,6)(4)(7) = (1,2,5)(3,6)$
Type cyclique = distribution des longueurs des cycles: $\lambda(\sigma) = 1^2\,2\,3$
Transpositions = permutations de type $\lambda = 2\,1^{n-1}$: $\tau = (2,5)$.

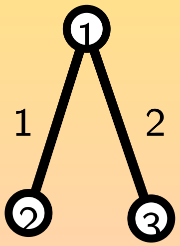
Factorisation en tranpositions = décomposition en produit de transpositions

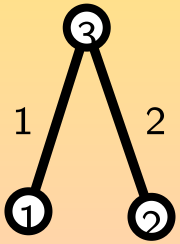
(1,2)(1,3)=(1,2,3)   (1,3)(2,3)=(1,2,3)   (1,3)(2,3)(2,4)(1,3)=(1,4,2)(3)

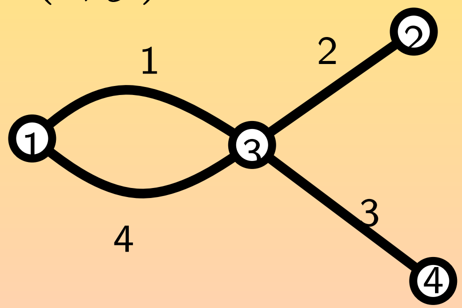
(oui, je multiplie de gauche à droite...)

Graphe associé à une factorisation $\tau_1 \ldots \tau_m = \sigma \in S_n$:
– sommets associés aux éléments permutés: $\{1,\ldots,n\}$
– arêtes associées aux transpositions:

une arête (i,j) numérotée k si $\tau_k = (i,j)$







Factorisation transitive = graphe connexe.

Factorisations de n-cycles (Dénes 1959)

Lemme. Si σ a ℓ cycles alors $\sigma' = \sigma \cdot (i,j)$ en a

- $\ell - 1$ si i et j sont dans des cycles différents de σ
- $\ell + 1$ si i et j sont dans le même cycle de σ

Factorisations de n-cycles (Dénes 1959)

Lemme. Si σ a ℓ cycles alors $\sigma' = \sigma \cdot (i,j)$ en a

- $\ell - 1$ si i et j sont dans des cycles différents de σ
- $\ell + 1$ si i et j sont dans le même cycle de σ

Corollaires:

- Il faut au minimum $n-1$ transpositions pour faire un cycle de longueur n

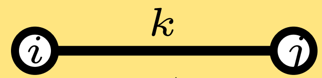
Factorisations de n-cycles (Dénes 1959)

Lemme. Si σ a ℓ cycles alors $\sigma' = \sigma \cdot (i, j)$ en a

- $\ell - 1$ si i et j sont dans des cycles différents de σ
- $\ell + 1$ si i et j sont dans le même cycle de σ

Corollaires:

- Il faut au minimum $n - 1$ transpositions pour faire un cycle de longueur n
- Le produit $\tau_1 \ldots \tau_m$ est un n-cycle si et seulement si le graphe associé est un arbre.



$\Updownarrow$

$\tau_k = (i, j)$

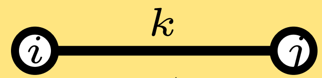
Factorisations de n-cycles (Dénes 1959)

Lemme. Si σ a ℓ cycles alors $\sigma' = \sigma \cdot (i,j)$ en a

- $\ell - 1$ si i et j sont dans des cycles différents de σ
- $\ell + 1$ si i et j sont dans le même cycle de σ

Corollaires:

- Il faut au minimum $n-1$ transpositions pour faire un cycle de longueur n
- Le produit $\tau_1 \dots \tau_m$ est un n-cycle si et seulement si le graphe associé est un arbre.

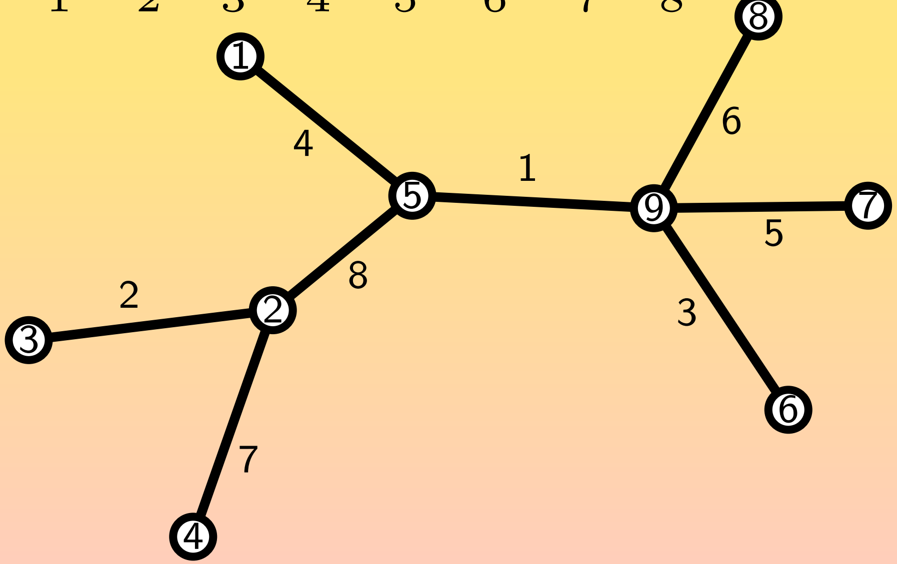


$\Updownarrow$

$\tau_k = (i,j)$

(5,9)(2,3)(6,9)(1,5)(7,9)(8,9)(2,4)(2,5)=(1,2,3,4,5,6,7,8,9)

$\tau_1 \quad \tau_2 \quad \tau_3 \quad \tau_4 \quad \tau_5 \quad \tau_6 \quad \tau_7 \quad \tau_8$



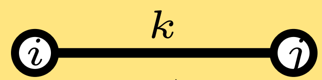
Factorisations de n-cycles (Dénes 1959)

Lemme. Si σ a ℓ cycles alors $\sigma' = \sigma \cdot (i, j)$ en a

- $\ell - 1$ si i et j sont dans des cycles différents de σ
- $\ell + 1$ si i et j sont dans le même cycle de σ

Corollaires:

- Il faut au minimum $n-1$ transpositions pour faire un cycle de longueur n
- Le produit $\tau_1 \ldots \tau_m$ est un n-cycle si et seulement si le graphe associé est un arbre.

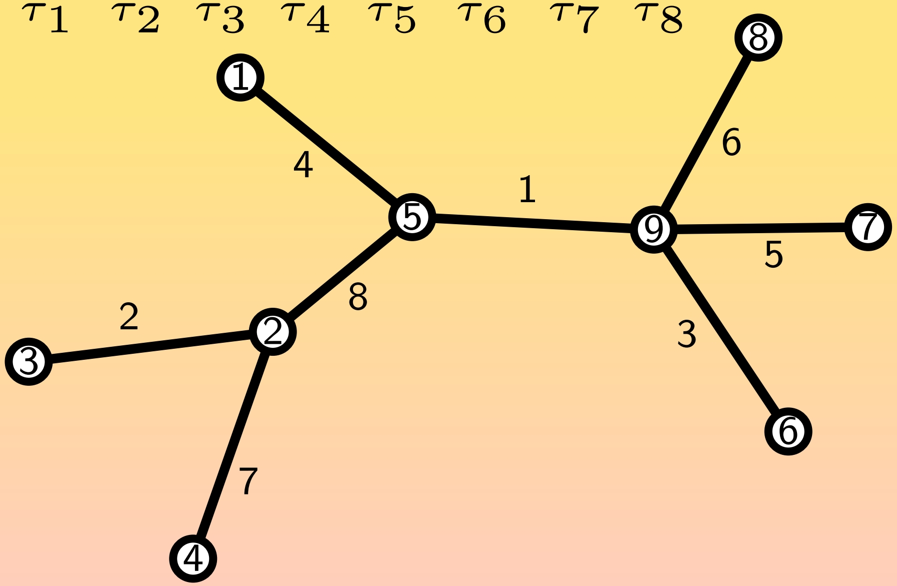


$\Updownarrow$

$\tau_k = (i, j)$

(5,9)(2,3)(6,9)(1,5)(7,9)(8,9)(2,4)(2,5)=(1,2,3,4,5,6,7,8,9)

$\tau_1 \quad \tau_2 \quad \tau_3 \quad \tau_4 \quad \tau_5 \quad \tau_6 \quad \tau_7 \quad \tau_8$



arbres de Cayley
à n noeuds
(non plongés) $\quad n^{n-2}$

numérotation
des arêtes $\quad (n-1)!$

Factorisations de n-cycles (Dénes 1959)

Lemme. Si σ a ℓ cycles alors $\sigma' = \sigma \cdot (i,j)$ en a

- $\ell - 1$ si i et j sont dans des cycles différents de σ
- $\ell + 1$ si i et j sont dans le même cycle de σ

Corollaires:

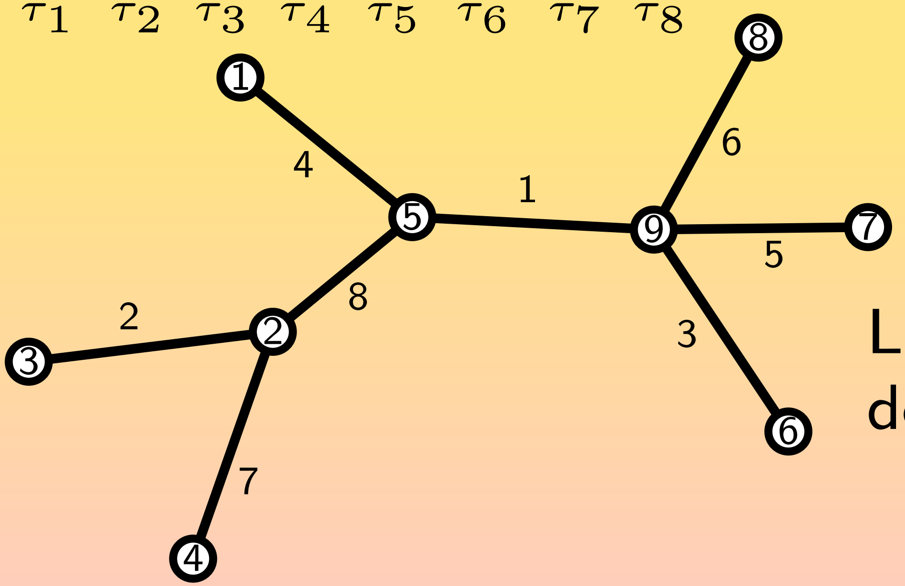
- Il faut au minimum $n-1$ transpositions pour faire un cycle de longueur n
- Le produit $\tau_1 \dots \tau_m$ est un n-cycle si et seulement si le graphe associé est un arbre.

$\Updownarrow$

$\tau_k = (i,j)$

(5,9)(2,3)(6,9)(1,5)(7,9)(8,9)(2,4)(2,5)=(1,2,3,4,5,6,7,8,9)

$\tau_1 \quad \tau_2 \quad \tau_3 \quad \tau_4 \quad \tau_5 \quad \tau_6 \quad \tau_7 \quad \tau_8$



arbres de Cayley à n noeuds (non plongés) $\quad n^{n-2}$

numérotation des arêtes $\quad (n-1)!$

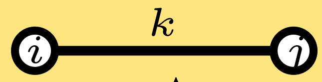
Le nombre de factorisations minimales de n-cycles est $n^{n-2} \cdot (n-1)!$

Factorisations minimales

Proposition: Soit $\lambda = 1^{\ell_1} \dots n^{\ell_n}$ avec $\sum_i \ell_i = \ell$. Les factorisations minimales d'1 permutation de type cyclique λ ont $m = n - \ell$ facteurs.

Corollaires:

- Il faut au minimum $n-1$ transpositions pour faire un cycle de longueur n
- Le produit $\tau_1 \dots \tau_m$ est un n-cycle si et seulement si le graphe associé est un arbre.

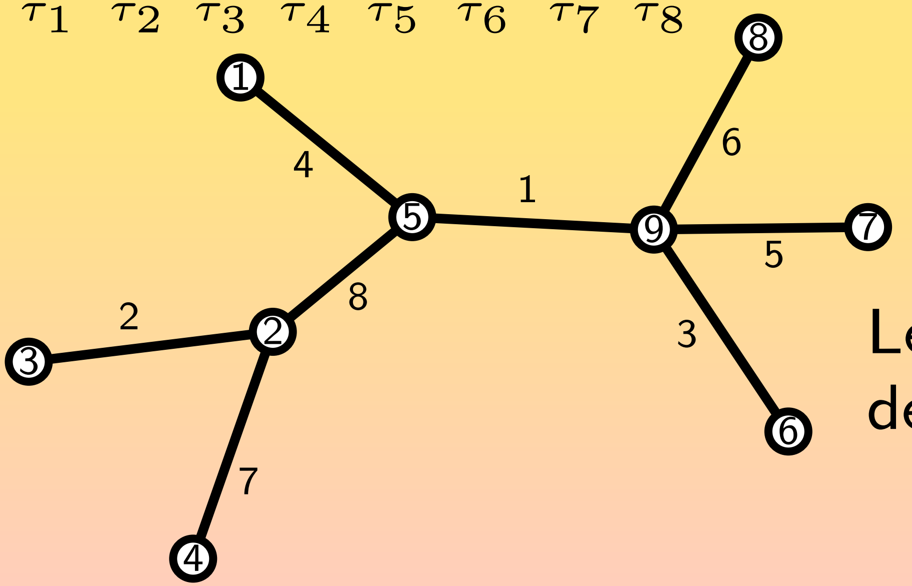


$\Updownarrow$

$\tau_k = (i, j)$

(5,9)(2,3)(6,9)(1,5)(7,9)(8,9)(2,4)(2,5)=(1,2,3,4,5,6,7,8,9)

$\tau_1 \quad \tau_2 \quad \tau_3 \quad \tau_4 \quad \tau_5 \quad \tau_6 \quad \tau_7 \quad \tau_8$



arbres de Cayley à n noeuds (non plongés)	n^{n-2}
numérotation des arêtes	$(n-1)!$

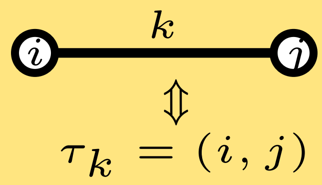
Le nombre de factorisations minimales de n-cycles est $n^{n-2} \cdot (n-1)!$

Factorisations minimales

Proposition: Soit $\lambda = 1^{\ell_1} \dots n^{\ell_n}$ avec $\sum_i \ell_i = \ell$. Les factorisations minimales d'1 permutation de type cyclique λ ont $m = n - \ell$ facteurs. Leur nombre est $\prod_i (i^{i-2})^{\ell_i}$.

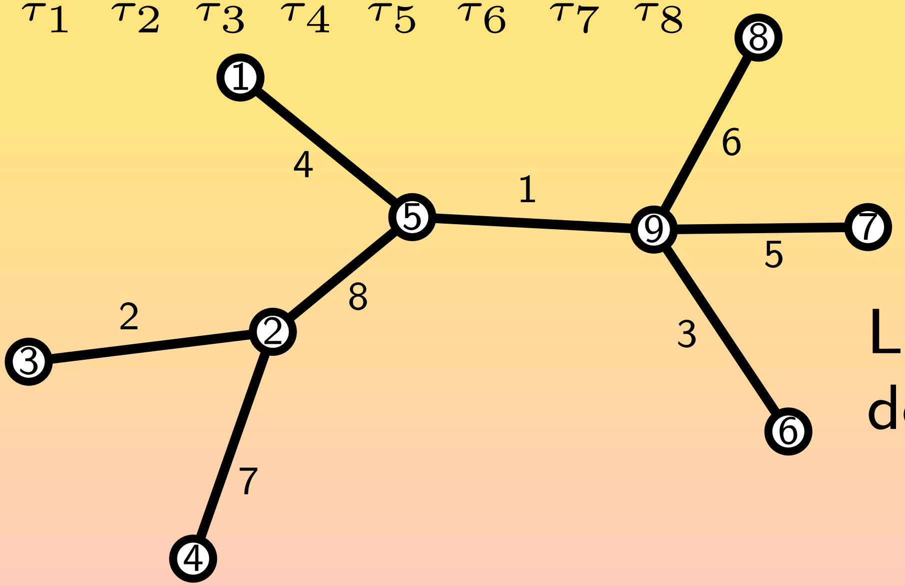
Corollaires:

- Il faut au minimum $n-1$ transpositions pour faire un cycle de longueur n
- Le produit $\tau_1 \dots \tau_m$ est un n-cycle si et seulement si le graphe associé est un arbre.



(5,9)(2,3)(6,9)(1,5)(7,9)(8,9)(2,4)(2,5)=(1,2,3,4,5,6,7,8,9)

τ_1 τ_2 τ_3 τ_4 τ_5 τ_6 τ_7 τ_8



arbres de Cayley à n noeuds (non plongés)	n^{n-2}
numérotation des arêtes	$(n-1)!$

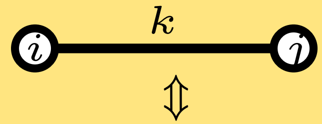
Le nombre de factorisations minimales de n-cycles est $n^{n-2} \cdot (n-1)!$

Factorisations minimales

Proposition: Soit $\lambda = 1^{\ell_1} \dots n^{\ell_n}$ avec $\sum_i \ell_i = \ell$. Les factorisations minimales d'1 permutation de type cyclique λ ont $m = n-\ell$ facteurs. Leur nombre est $\prod_i (i^{i-2})^{\ell_i}$.

Corollaires:

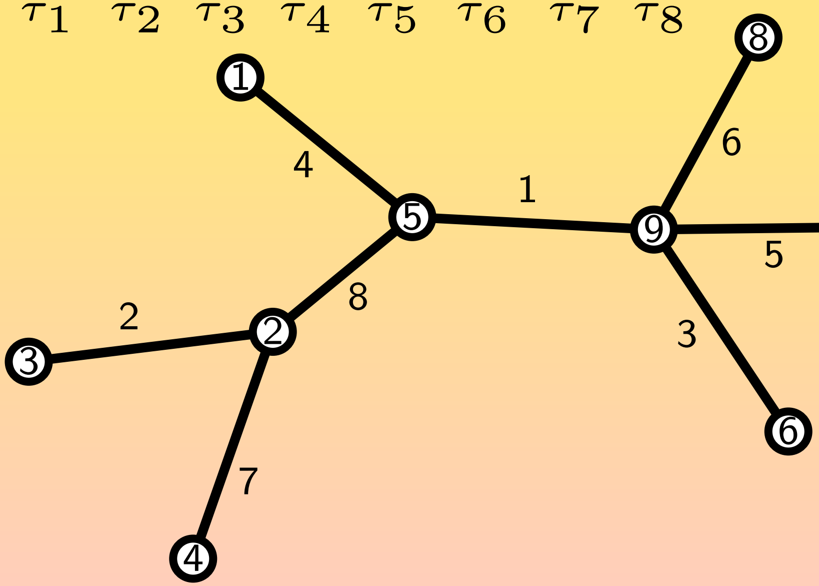
- Il faut au minimum $n-1$ transpositions pour faire un cycle de longueur n
- Le produit $\tau_1 \dots \tau_m$ est un n-cycle si et seulement si le graphe associé est un arbre.



$\tau_k = (i, j)$

(5,9)(2,3)(6,9)(1,5)(7,9)(8,9)(2,4)(2,5)=(1,2,3,4,5,6,7,8,9)

τ_1 τ_2 τ_3 τ_4 τ_5 τ_6 τ_7 τ_8



arbres de Cayley à n noeuds (non plongés)	n^{n-2}
numérotation des arêtes	$(n-1)!$

Le nombre de factorisations minimales de n-cycles est $n^{n-2} \cdot (n-1)!$

La formule d'Hurwitz pour le nombre de factorisations minimales transitives en transpositions

Théorème. Soit $\lambda = 1^{\ell_1}, \ldots, n^{\ell_n}$ une partition n, et $\ell = \sum_i \ell_i$.
Le nombre de m-uples de transpositions $(\tau_1, \ldots, \tau_m)$ tels que

- (type cyclique du produit) $\tau_1 \cdots \tau_m = \sigma$ de type cyclique λ
- (transitivité) le graphe associé est connexe
- (minimalité) le nombre de facteurs est $m = n + \ell - 2$

est

$$n^{\ell-3} \cdot m! \cdot n! \cdot \prod_{i \geq 1} \frac{1}{\ell_i!} \left(\frac{i^i}{i!} \right)^{\ell_i}$$

Preuves:

(Hurwitz 1891, Strehl 1996) (Goulden–Jackson 1997) (Lando–Zvonkine 1999) (Bousquet-Mélou–Schaeffer 2000)
(recurrences, Abel identities) (gfs and differential eqns) (geometry of LL mapping) (bijection + inclusion/exclusion)

$\lambda = n$, factorisations de n-cycles: $n^{n-2} \cdot (n-1)!$

$\lambda = 1^n$, factorisations de l'identité: $n^{n-3} \cdot (2n-2)!$

La formule d'Hurwitz pour le nombre de factorisations minimales transitives en transpositions

Théorème. Soit $\lambda = 1^{\ell_1}, \ldots, n^{\ell_n}$ une partition n, et $\ell = \sum_i \ell_i$.
Le nombre de m-uples de transpositions $(\tau_1, \ldots, \tau_m)$ tels que

- (type cyclique du produit) $\tau_1 \cdots \tau_m = \sigma$ de type cyclique λ
- (transitivité) le graphe associé est connexe
- (minimalité) le nombre de facteurs est $m = n + \ell - 2$

est

$$n^{\ell-3} \cdot m! \cdot n! \cdot \prod_{i \geq 1} \frac{1}{\ell_i!} \left(\frac{i^i}{i!} \right)^{\ell_i}$$

Preuves:

(Hurwitz 1891, Strehl 1996) (Goulden–Jackson 1997) (Lando–Zvonkine 1999) (Bousquet-Mélou–Schaeffer 2000)
(recurrences, Abel identities) (gfs and differential eqns) (geometry of LL mapping) (bijection + inclusion/exclusion)

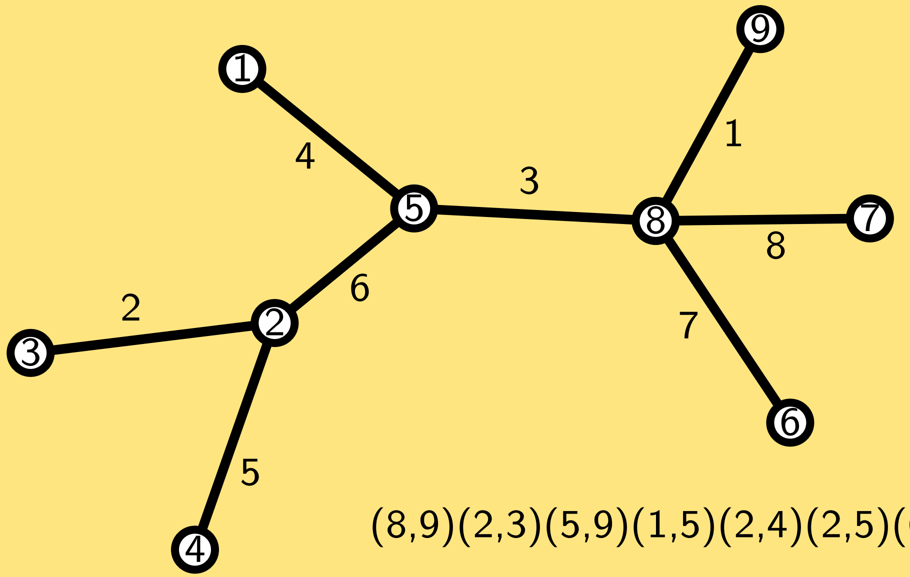
$\lambda = n$, factorisations de n-cycles: $n^{n-2} \cdot (n-1)!$

$\lambda = 1^n$, factorisations de l'identité: $n^{n-3} \cdot (2n-2)!$

Preuve et interprétation combinatoire ?

Calcul graphique du produit et plongement croissant

Comment calculer un produit directement sur le graphe associé ?

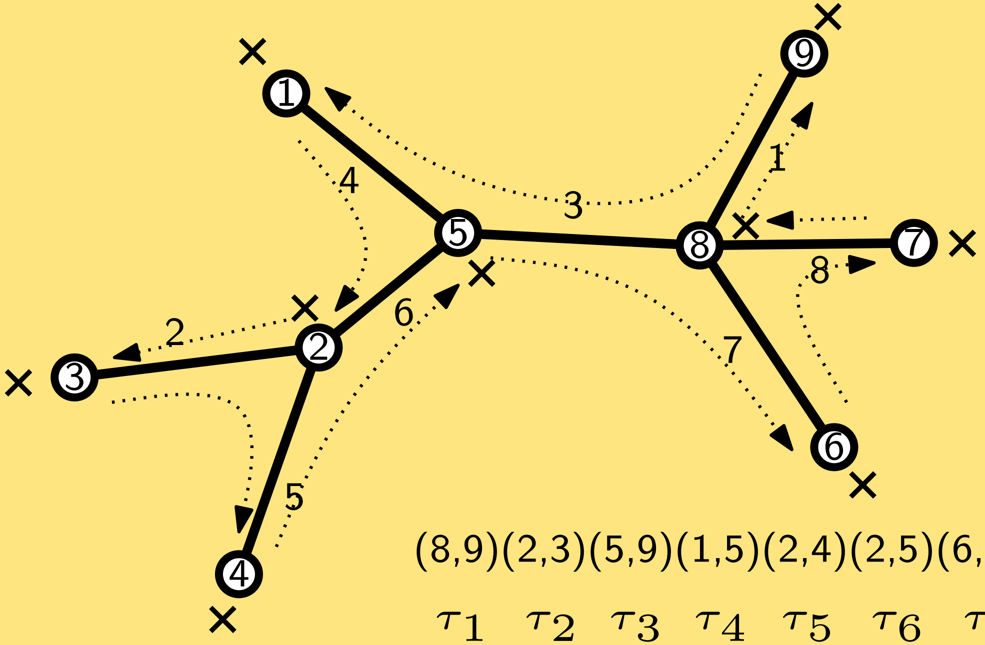


(8,9)(2,3)(5,9)(1,5)(2,4)(2,5)(6,9)(7,8)=(1,2,3,4,5,6,7,8,9)

$\tau_1 \quad \tau_2 \quad \tau_3 \quad \tau_4 \quad \tau_5 \quad \tau_6 \quad \tau_7 \quad \tau_8$

Calcul graphique du produit et plongement croissant

Comment calculer un produit directement sur le graphe associé ?



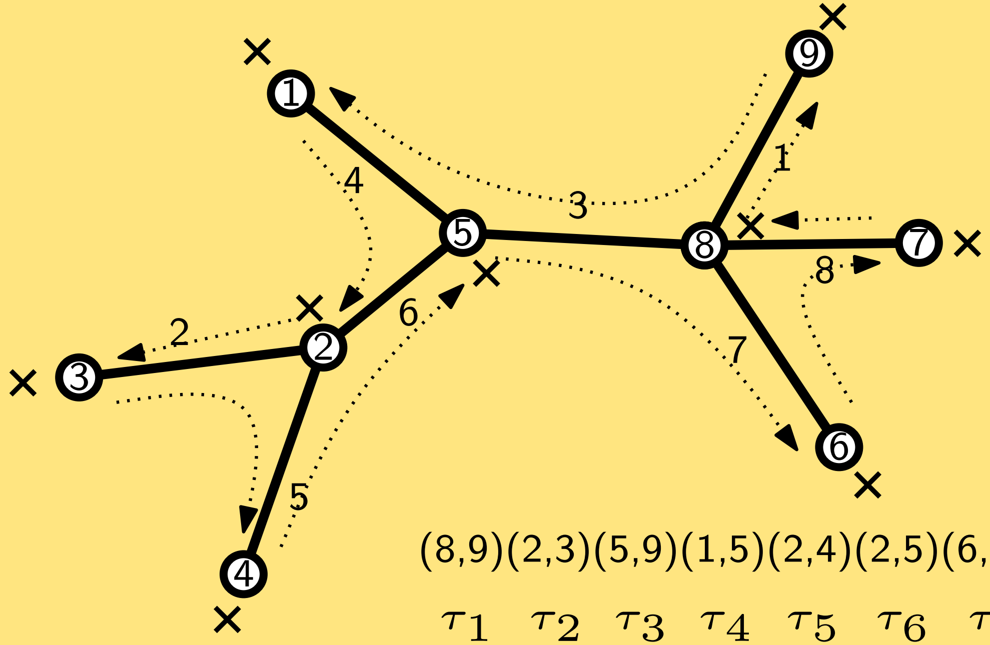
$$1 \longrightarrow 5 \longrightarrow 2$$
$$2 \longrightarrow 3$$
$$\vdots$$
$$9 \longrightarrow 8 \longrightarrow 5 \longrightarrow 1$$

$$\underset{\tau_1}{(8,9)}\underset{\tau_2}{(2,3)}\underset{\tau_3}{(5,9)}\underset{\tau_4}{(1,5)}\underset{\tau_5}{(2,4)}\underset{\tau_6}{(2,5)}\underset{\tau_7}{(6,9)}\underset{\tau_8}{(7,8)}=(1,2,3,4,5,6,7,8,9)$$

$$i \longrightarrow \sigma(i)$$

Calcul graphique du produit et plongement croissant

Comment calculer un produit directement sur le graphe associé ?



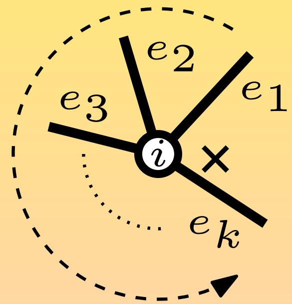
$1 \longrightarrow 5 \longrightarrow 2$
$2 \longrightarrow 3$
$\vdots$
$9 \longrightarrow 8 \longrightarrow 5 \longrightarrow 1$

(8,9)(2,3)(5,9)(1,5)(2,4)(2,5)(6,9)(7,8)=(1,2,3,4,5,6,7,8,9)

$\tau_1 \quad \tau_2 \quad \tau_3 \quad \tau_4 \quad \tau_5 \quad \tau_6 \quad \tau_7 \quad \tau_8$

$i \longrightarrow \sigma(i)$

Le calcul se fait en suivant le bord du graphe parce que j'ai dessiné l'arbre de manière croissante en sens direct.

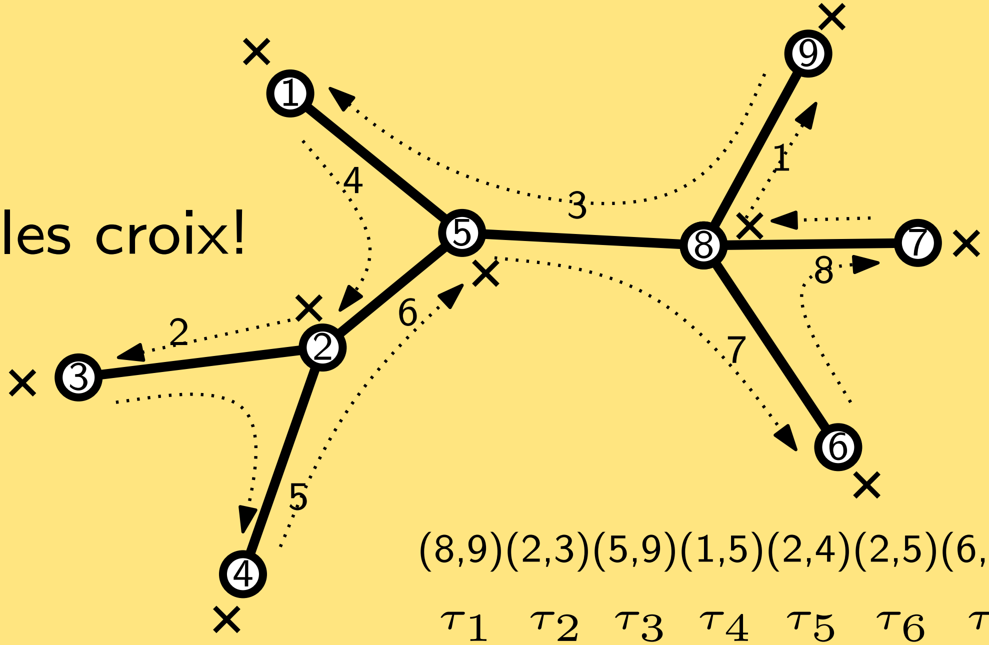


$e_1 < e_2 < \ldots < e_k$

Calcul graphique du produit et plongement croissant

Comment calculer un produit directement sur le graphe associé ?

On s'arrête sur les croix!



$1 \longrightarrow 5 \longrightarrow 2$

$2 \longrightarrow 3$

$\vdots$

$9 \longrightarrow 8 \longrightarrow 5 \longrightarrow 1$

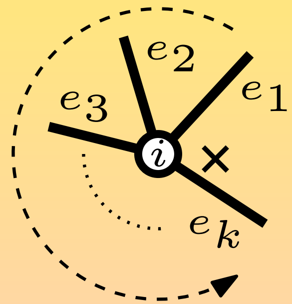
(8,9)(2,3)(5,9)(1,5)(2,4)(2,5)(6,9)(7,8)=(1,2,3,4,5,6,7,8,9)

$\tau_1 \quad \tau_2 \quad \tau_3 \quad \tau_4 \quad \tau_5 \quad \tau_6 \quad \tau_7 \quad \tau_8$

$i \cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots \rightarrow \sigma(i)$

Le calcul se fait en suivant le bord du graphe parce que j'ai dessiné l'arbre de manière croissante en sens direct.

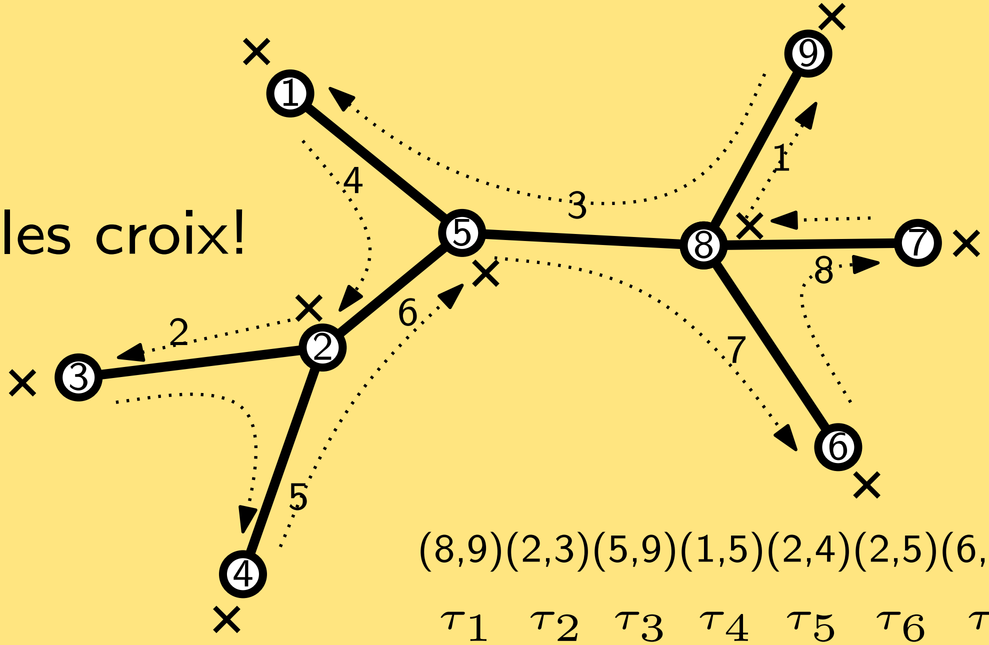
$e_1 < e_2 < \ldots < e_k$



Calcul graphique du produit et plongement croissant

Comment calculer un produit directement sur le graphe associé ?

On s'arrête sur les croix!



$1 \longrightarrow 5 \longrightarrow 2$

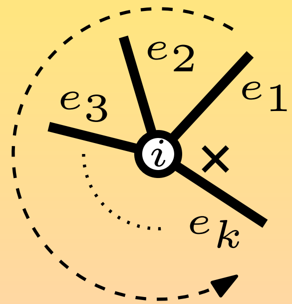
$2 \longrightarrow 3$

$\vdots$

$9 \longrightarrow 8 \longrightarrow 5 \longrightarrow 1$

$$\underset{\tau_1}{(8,9)}\underset{\tau_2}{(2,3)}\underset{\tau_3}{(5,9)}\underset{\tau_4}{(1,5)}\underset{\tau_5}{(2,4)}\underset{\tau_6}{(2,5)}\underset{\tau_7}{(6,9)}\underset{\tau_8}{(7,8)}=(1,2,3,4,5,6,7,8,9)$$

$i \cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots \rightarrow \sigma(i)$

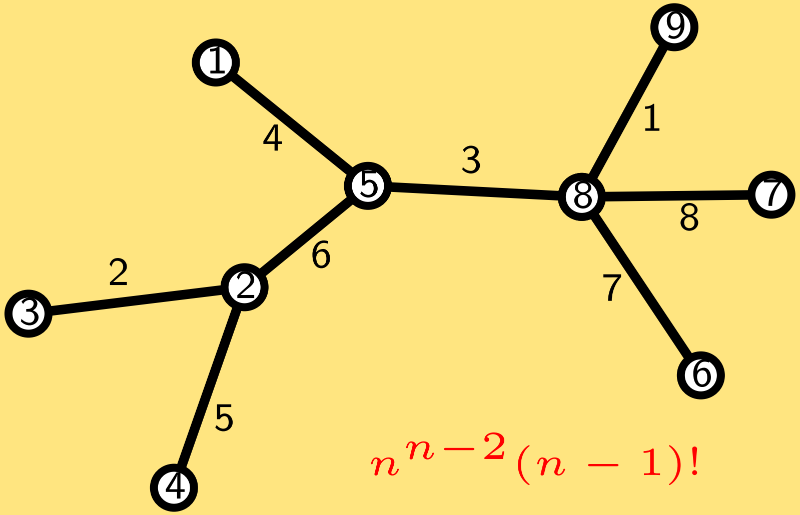


Le calcul se fait en suivant le bord du graphe parce que j'ai dessiné l'arbre de manière croissante en sens direct.

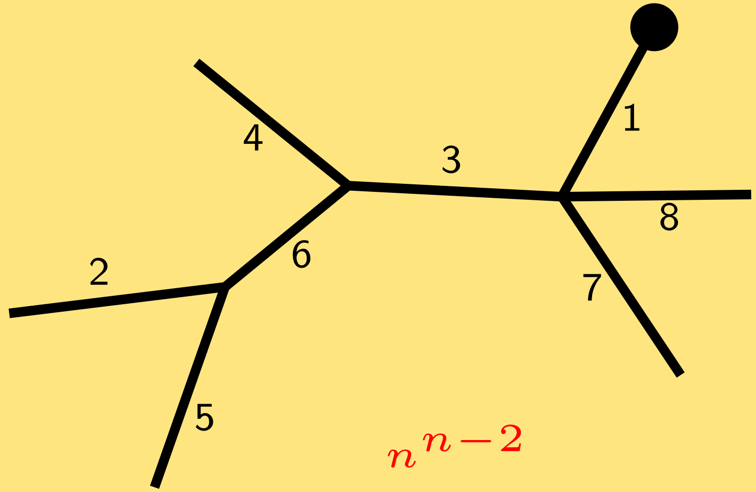
$e_1 < e_2 < \ldots < e_k$

Un arbre avec arêtes numérotées admet un unique plongement croissant.

La preuve de Moszkowski
pour les factorisations de n-cycles



$n^{n-2}(n-1)!$

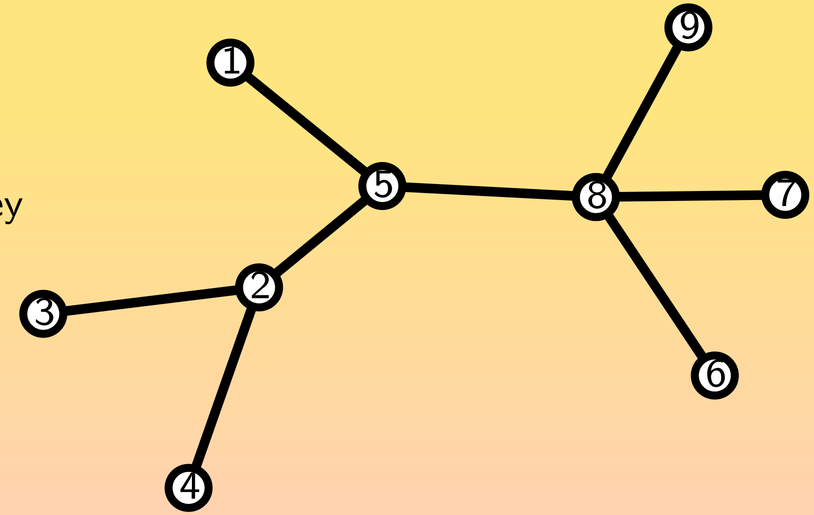


n^{n-2}

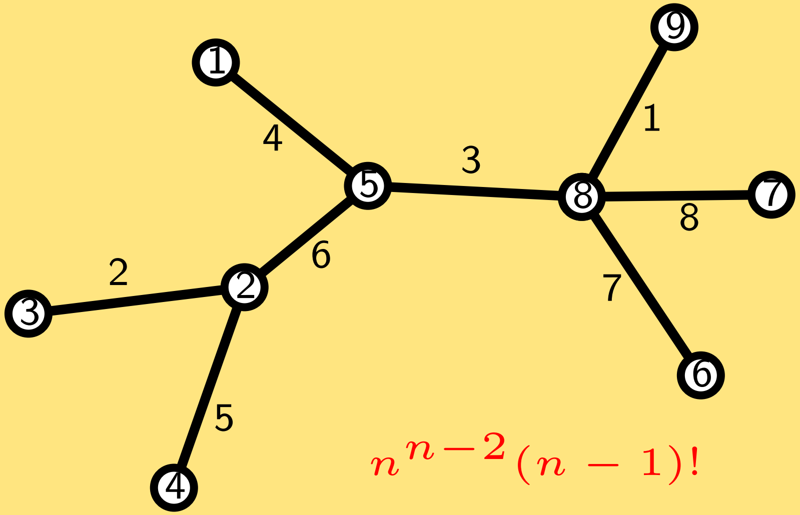
arbres numérotés
pointés
à n sommets

(admettent un unique
plongement comme
arbres plans croissants)

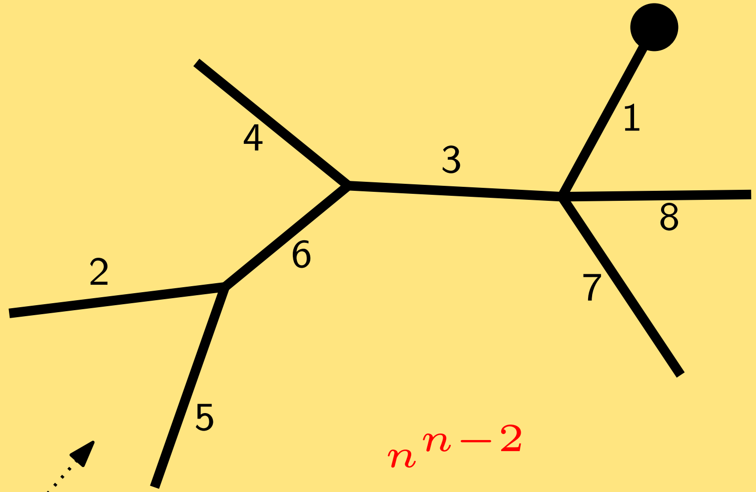
n^{n-2}
arbres de Cayley
à n sommets
(non plongé)



La preuve de Moszkowski pour les factorisations de n-cycles



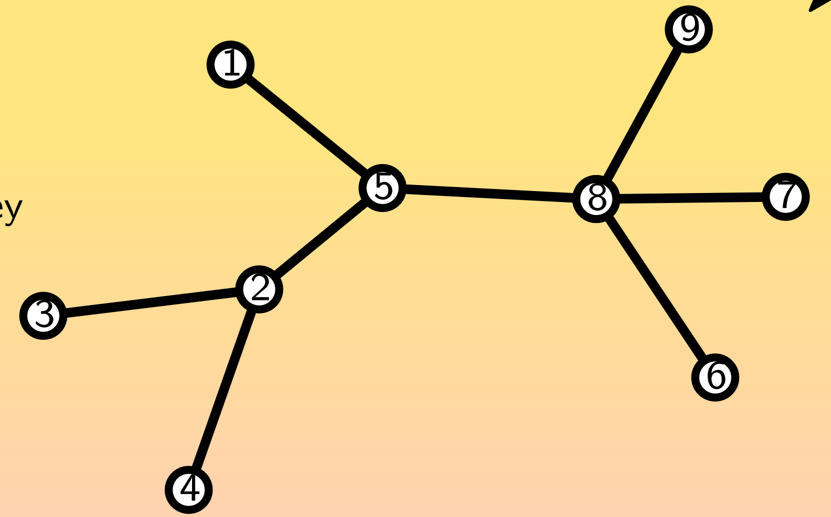
$n^{n-2}(n-1)!$



n^{n-2}

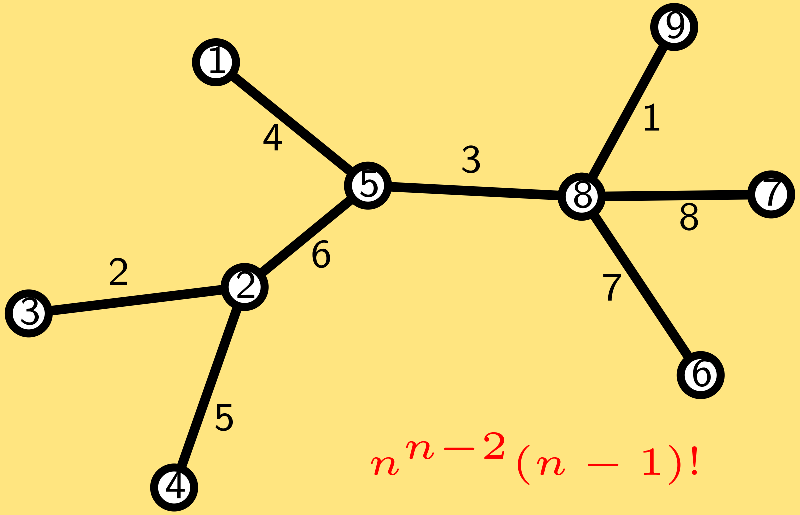
arbres numérotés
pointés
à n sommets

(admettent un unique
plongement comme
arbres plans croissants)

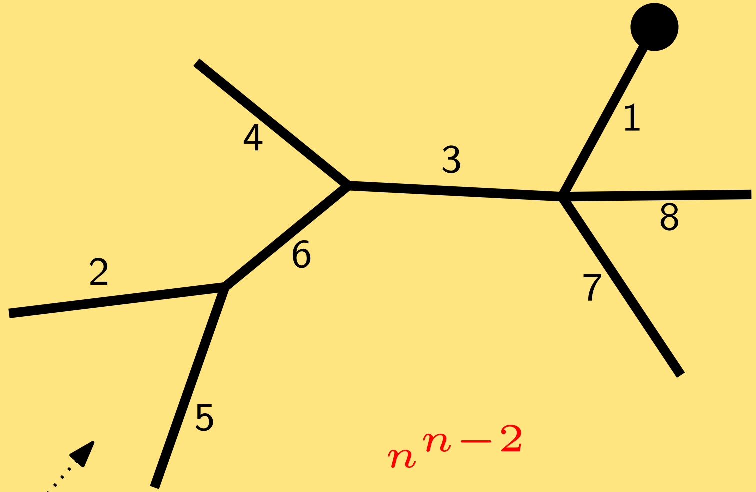


n^{n-2}
arbres de Cayley
à n sommets
(non plongé)

La preuve de Moszkowski pour les factorisations de n-cycles



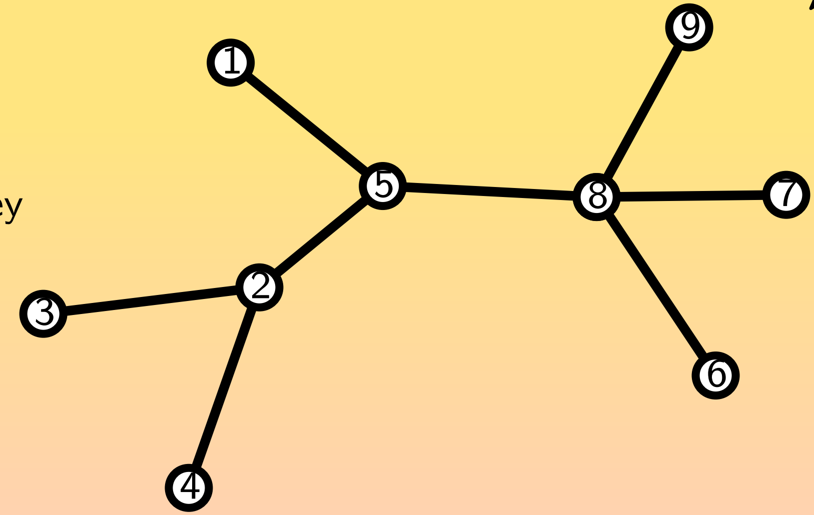
$n^{n-2}(n-1)!$



n^{n-2}

arbres numérotés
pointés
à n sommets

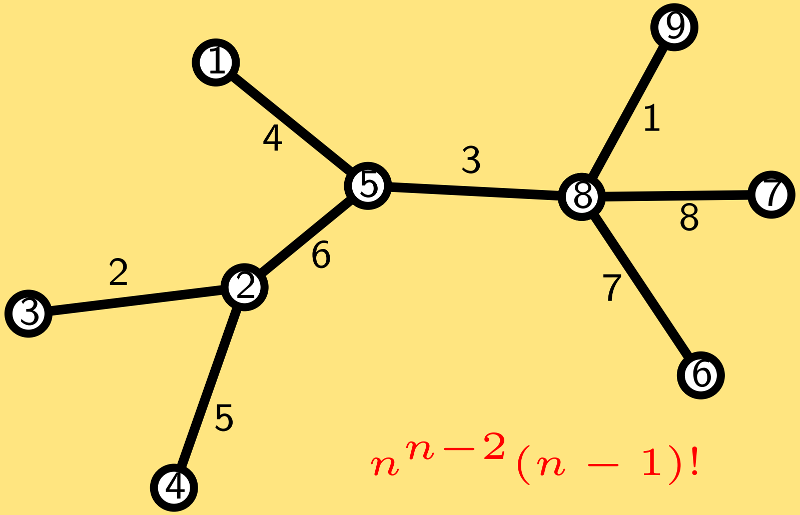
(admettent un unique
plongement comme
arbres plans croissants)



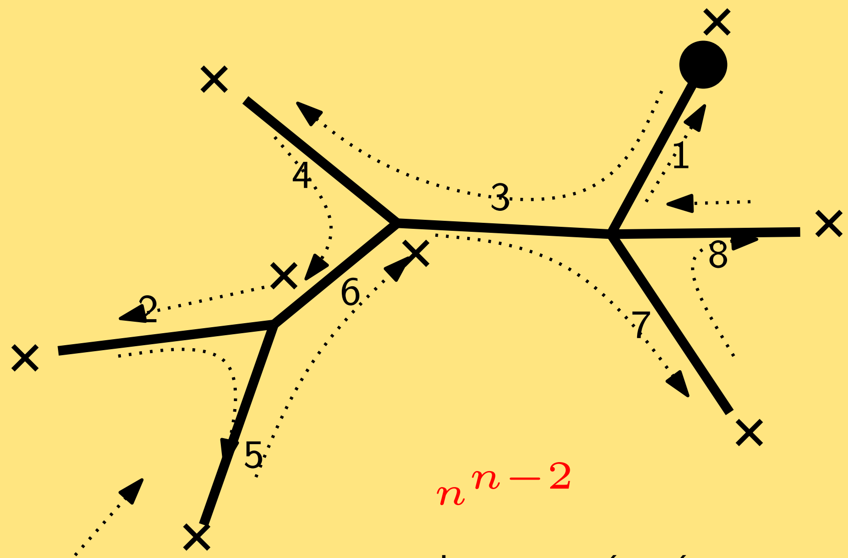
n^{n-2}
arbres de Cayley
à n sommets
(non plongé)

Théorème (Moszkowski, 1989).
Bijection avec factorisations minimales
en transpositions de $(1, 2, \ldots, n)$.

La preuve de Moszkowski pour les factorisations de n-cycles



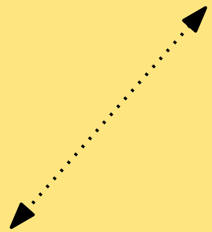
$n^{n-2}(n-1)!$



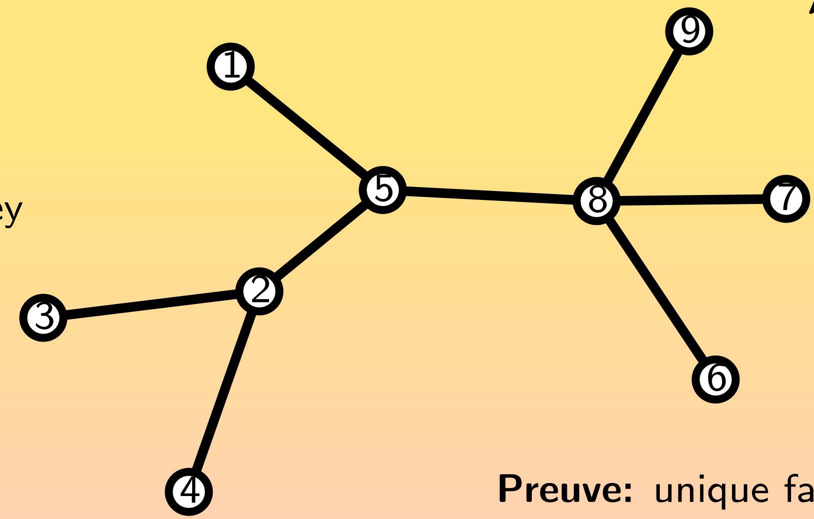
n^{n-2}

arbres numérotés
pointés
à n sommets

(admettent un unique
plongement comme
arbres plans croissants)



n^{n-2}
arbres de Cayley
à n sommets
(non plongé)



Théorème (Moszkowski, 1989).
Bijection avec factorisations minimales en transpositions de $(1, 2, \ldots, n)$.

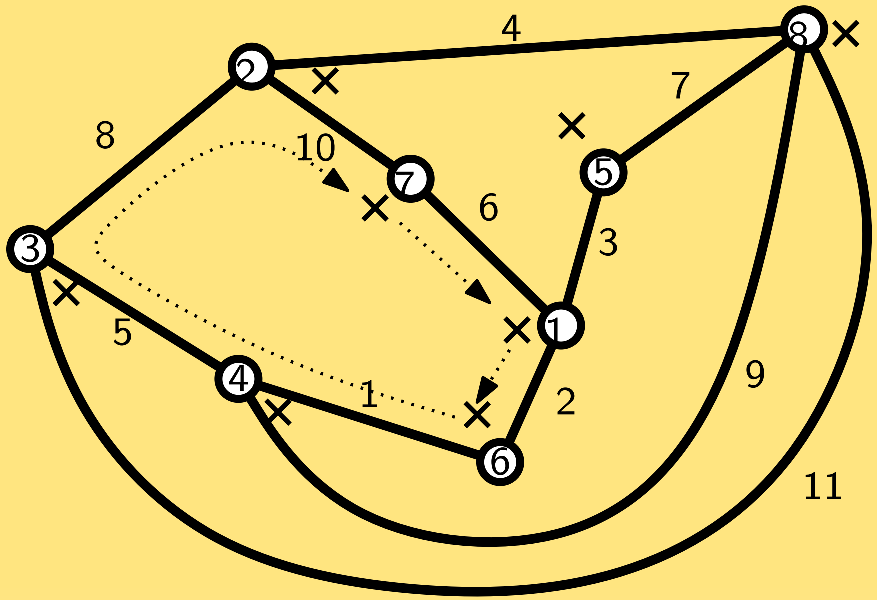
Preuve: unique façon de mettre les étiquettes pour que le calcul marche!

Cartes croissantes

La bijection de Moszkowski s'étend à tous types de factorisations transitives en transpositions (de type λ, non nécessairement minimale)

(4,6)(1,6)(1,5)(2,8)(3,4)(1,7)(5,8)(2,3)(4,8)(2,7)(3,8)= (1,6,7)(2,5)(3)(4)(8)

$1 \longrightarrow 6$
$6 \longrightarrow 4 \longrightarrow 3 \longrightarrow 2 \longrightarrow 7$
$7 \longrightarrow 1$

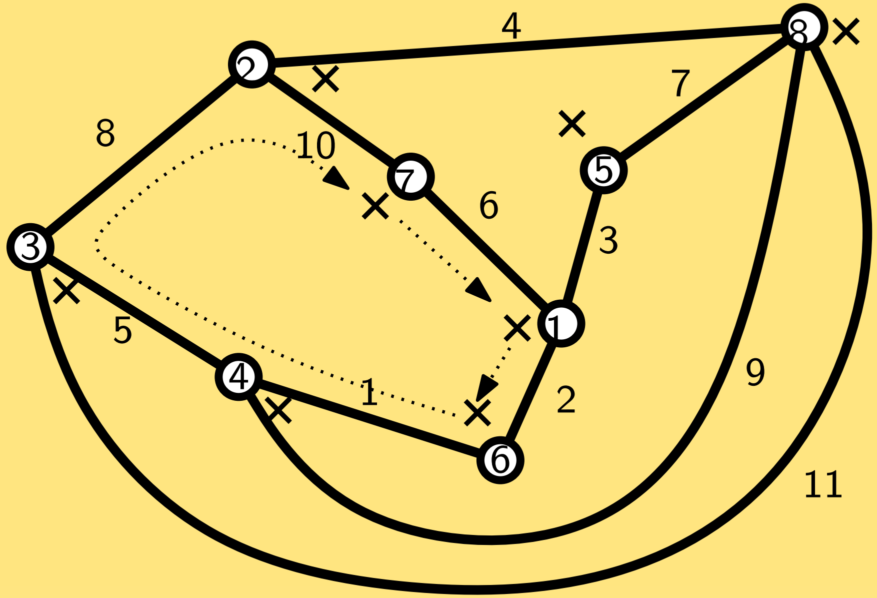


Cartes croissantes

La bijection de Moszkowski s'étend à tous types de factorisations transitives en transpositions (de type λ, non nécessairement minimale)

(4,6)(1,6)(1,5)(2,8)(3,4)(1,7)(5,8)(2,3)(4,8)(2,7)(3,8)= (1,6,7)(2,5)(3)(4)(8)

$$1 \to 6$$
$$6 \to 4 \to 3 \to 2 \to 7$$
$$7 \to 1$$



Carte croissante: graphe plongé avec

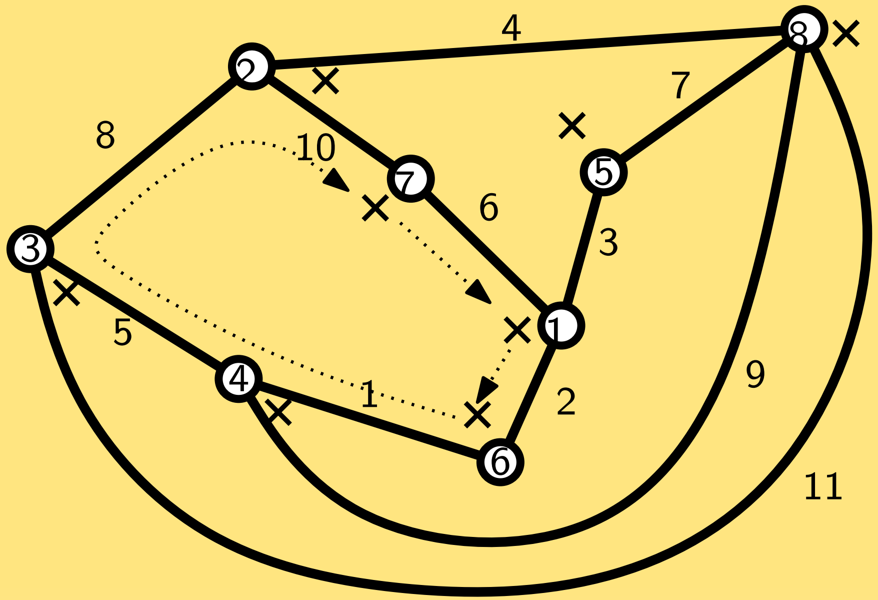
- n sommets étiquetés $\{1, \ldots, n\}$
- m arêtes numérotées $\{1, \ldots, m\}$
  (associées aux transpositions)
- ℓ faces (face avec k croix $=$ cycle de longueur k dans le produit)
- Croissance des arêtes en sens direct

Cartes croissantes

La bijection de Moszkowski s'étend à tous types de factorisations transitives en transpositions (de type λ, non nécessairement minimale)

(4,6)(1,6)(1,5)(2,8)(3,4)(1,7)(5,8)(2,3)(4,8)(2,7)(3,8)= (1,6,7)(2,5)(3)(4)(8)

$1 \to 6$
$6 \to 4 \to 3 \to 2 \to 7$
$7 \to 1$



Carte croissante: graphe plongé avec

- n sommets étiquetés $\{1, \ldots, n\}$
- m arêtes numérotées $\{1, \ldots, m\}$ (associées aux transpositions)
- ℓ faces (face avec k croix $=$ cycle de longueur k dans le produit)
- Croissance des arêtes en sens direct

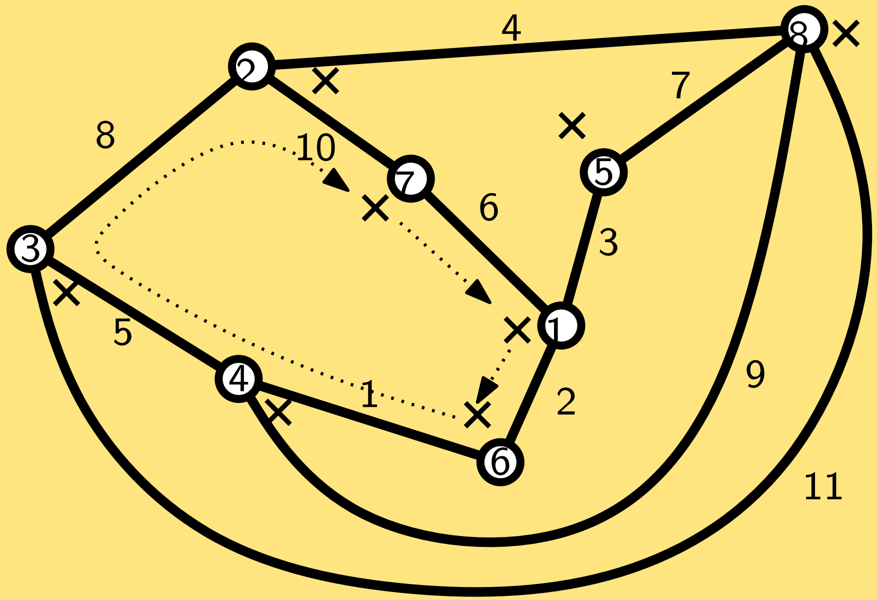
Minimalité: $m = n + \ell - 2 \Leftrightarrow$ planarité (Euler: $s + f = a - 2$)

Cartes croissantes

La bijection de Moszkowski s'étend à tous types de factorisations transitives en transpositions (de type λ, non nécessairement minimale)

(4,6)(1,6)(1,5)(2,8)(3,4)(1,7)(5,8)(2,3)(4,8)(2,7)(3,8)= (1,6,7)(2,5)(3)(4)(8)

$$1 \rightarrow 6$$
$$6 \rightarrow 4 \rightarrow 3 \rightarrow 2 \rightarrow 7$$
$$7 \rightarrow 1$$



Carte croissante: graphe plongé avec

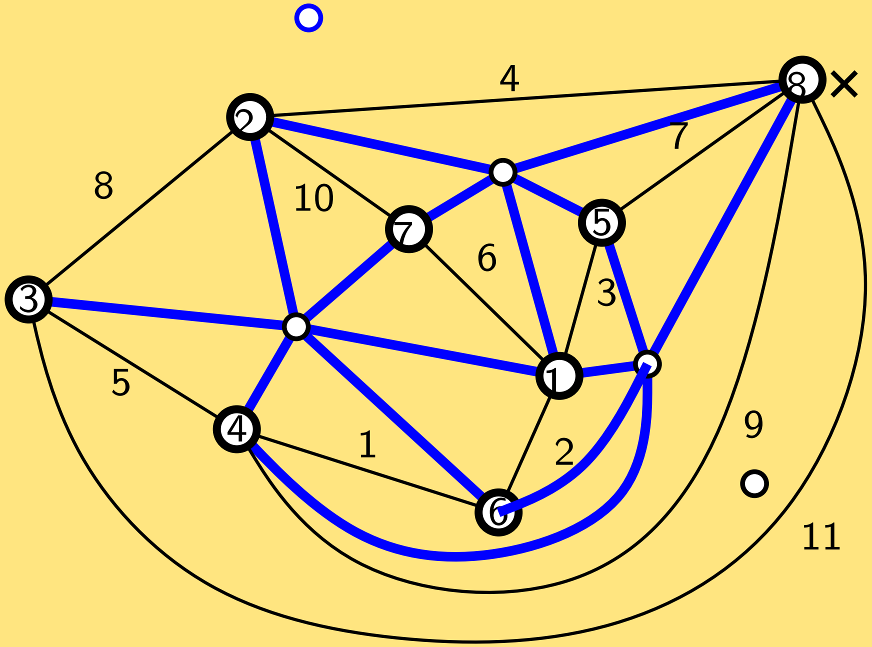
- n sommets étiquetés $\{1, \ldots, n\}$
- m arêtes numérotées $\{1, \ldots, m\}$ (associées aux transpositions)
- ℓ faces (face avec k croix $=$ cycle de longueur k dans le produit)
- Croissance des arêtes en sens direct

Minimalité: $m = n + \ell - 2 \Leftrightarrow$ planarité (Euler: $s + f = a - 2$)

Théorème (plus ou moins classique). c'est une bijection entre cartes croissantes planaires et factorisation minimales transitives.

Quadrangulations croissantes

Trianguler chaque face a partir d'un nouveau sommet.

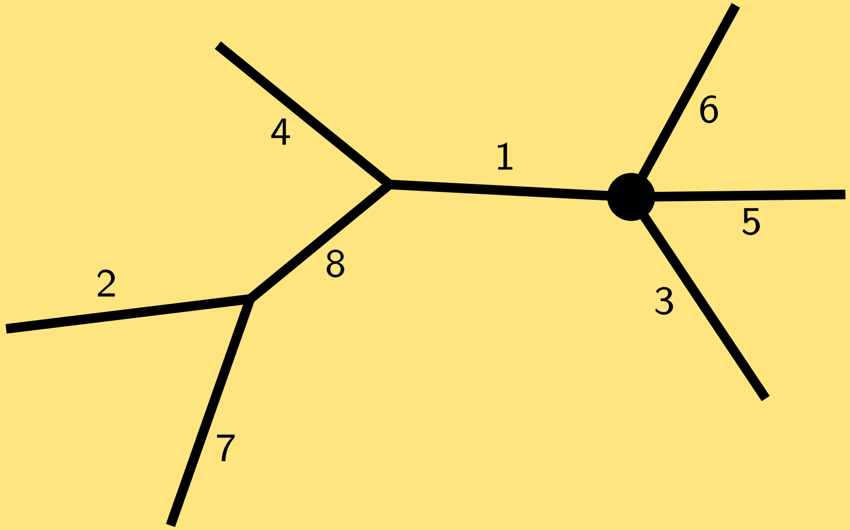


$\Rightarrow$ quadrangulations avec faces étiquetées

croissance en sens direct autour des sommets étiquetés sauf au niveau des $\times$.
croissance en sens indirect autour des sommets blancs, sauf au niveau des $\times$.

Des arbres pour prouver la formule d'Hurwitz

Factorisations de l'identité: interpréter $n^{n-3}(2n-2)!$



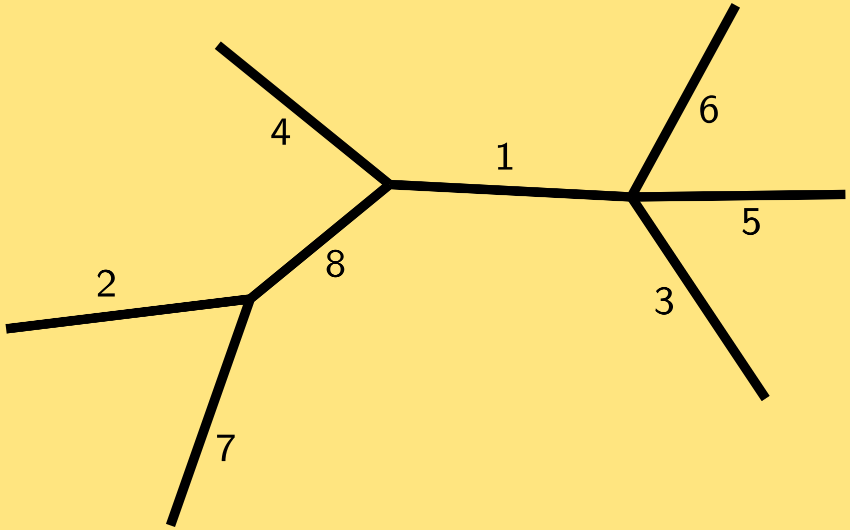
arbres
numérotés
pointés

$$n^{n-2}$$

$H_n = n^{n-2}(n-1)!$ $\quad H_1 n = n^{n-3}(2n-2)!$ $\quad H_\lambda = n^{\ell-3} m! n! \prod_{i\geq 1} \frac{1}{\ell_i!}\left(\frac{i^i}{i!}\right)^{\ell_i}$

Factorisations de l'identité: interpréter $n^{n-3}(2n-2)!$

arbres numérotés n^{n-3}

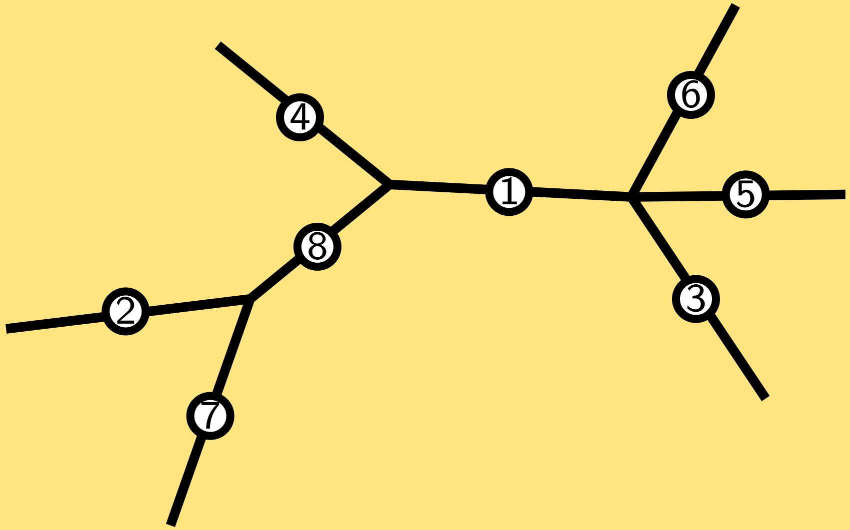


arbres numérotés pointés n^{n-2}

$H_n = n^{n-2}(n-1)!$ $H_1 n = n^{n-3}(2n-2)!$ $H_\lambda = n^{\ell-3} m! n! \prod_{i\geq 1} \frac{1}{\ell_i!}\left(\frac{i^i}{i!}\right)^{\ell_i}$

Factorisations de l'identité: interpréter $n^{n-3}(2n-2)!$

arbres numérotés n^{n-3}



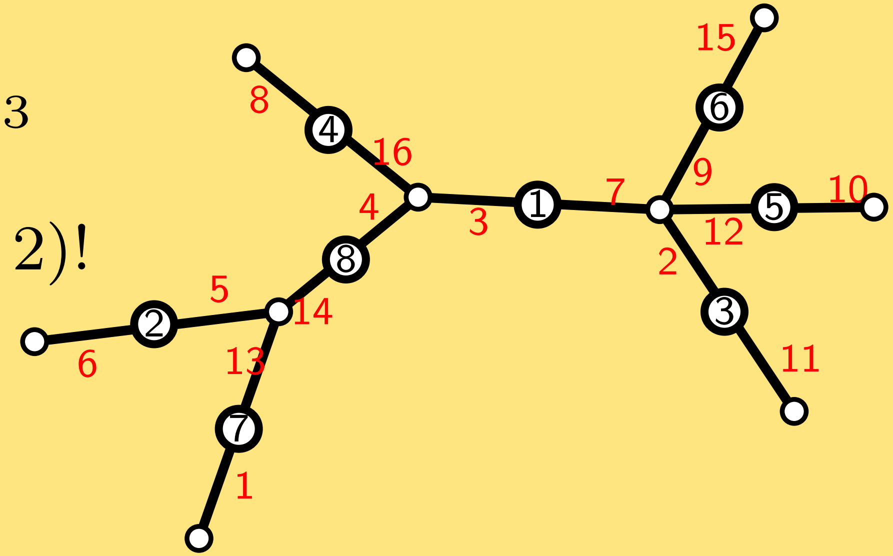
arbres numérotés pointés n^{n-2}

$H_n = n^{n-2}(n-1)!$ $\quad H_{1^n} = n^{n-3}(2n-2)!$ $\quad H_\lambda = n^{\ell-3}m!n!\prod_{i\geq 1}\frac{1}{\ell_i!}\left(\frac{i^i}{i!}\right)^{\ell_i}$

Factorisations de l'identité: interpréter $n^{n-3}(2n-2)!$

arbres numérotés n^{n-3}

indexer les arêtes $(2n-2)!$



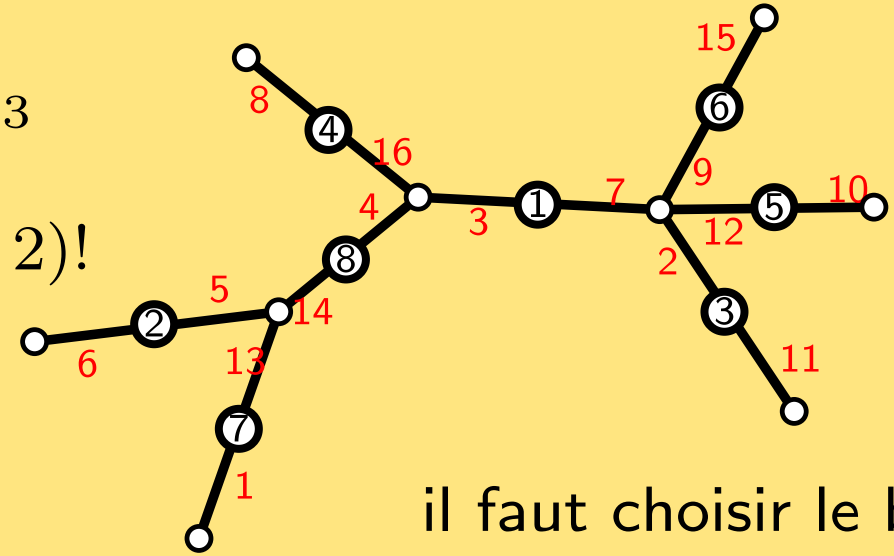
arbres numérotés pointés n^{n-2}

$H_n = n^{n-2}(n-1)!$ $\quad H_{1n} = n^{n-3}(2n-2)!$ $\quad H_\lambda = n^{\ell-3} m! n! \prod_{i \geq 1} \frac{1}{\ell_i!} \left(\frac{i^i}{i!}\right)^{\ell_i}$

Factorisations de l'identité: interpréter $n^{n-3}(2n-2)!$

arbres numérotés n^{n-3}

indexer les arêtes $(2n-2)!$



arbres numérotés pointés n^{n-2}

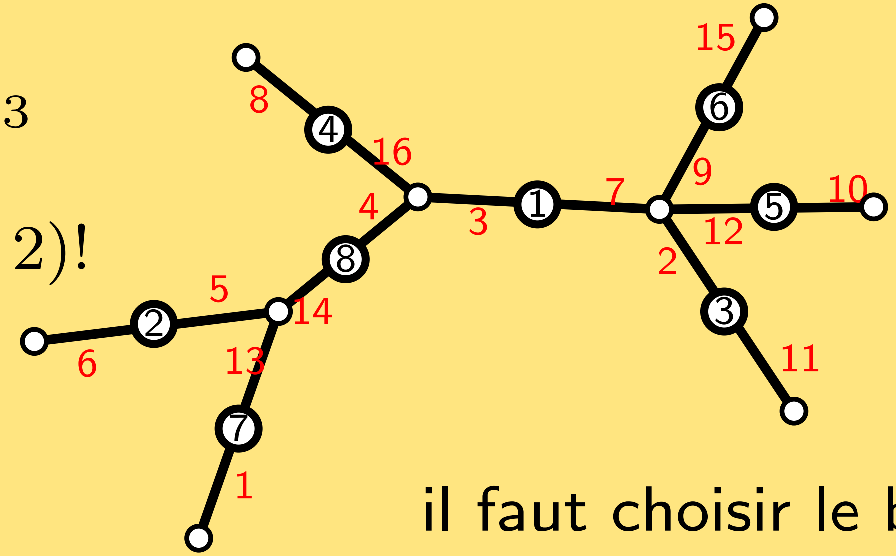
il faut choisir le bon plongement...

$H_n = n^{n-2}(n-1)! \quad H_1 n = n^{n-3}(2n-2)! \quad H_\lambda = n^{\ell-3} m! n! \prod_{i \geq 1} \frac{1}{\ell_i!} \left(\frac{i^i}{i!}\right)^{\ell_i}$

Factorisations de l'identité: interpréter $n^{n-3}(2n-2)!$

arbres numérotés n^{n-3}

indexer les arêtes $(2n-2)!$



arbres numérotés pointés n^{n-2}

il faut choisir le bon plongement...

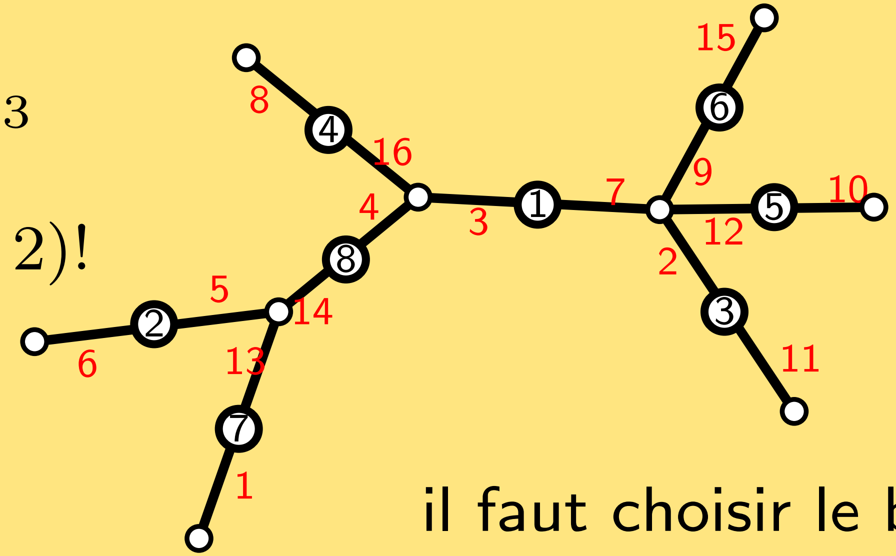
Arbres de Hurwitz simples:

$H_n = n^{n-2}(n-1)!$ $\quad H_1 n = n^{n-3}(2n-2)!$ $\quad H_\lambda = n^{\ell-3} m! n! \prod_{i\geq 1} \frac{1}{\ell_i!}\left(\frac{i^i}{i!}\right)^{\ell_i}$

Factorisations de l'identité: interpréter $n^{n-3}(2n-2)!$

arbres numérotés $\quad n^{n-3}$

indexer les arêtes $\quad (2n-2)!$



arbres numérotés pointés $\quad n^{n-2}$

il faut choisir le bon plongement...

Arbres de Hurwitz simples:

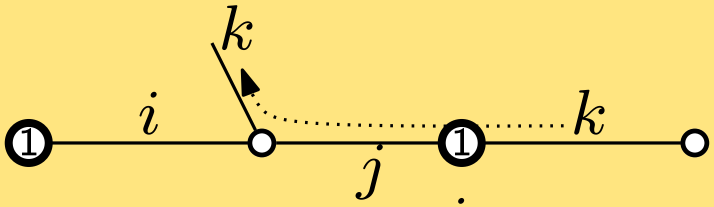
n sommets non étiquetés, $n-1$ sommets étiquetés de degré 2,
$2n-2$ arêtes avec croissance en sens direct autour des sommets étiquetés.

Le nombre d'arbres de Hurwitz simple à $2n-2$ arêtes est $\quad n^{n-3}(2n-2)!$

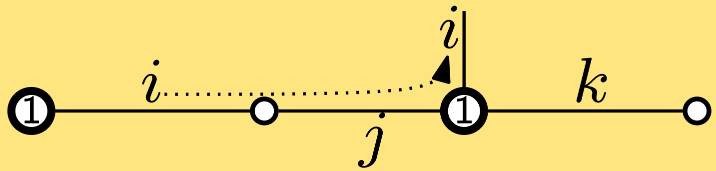
$H_n = n^{n-2}(n-1)! \quad H_{1n} = n^{n-3}(2n-2)! \quad H_\lambda = n^{\ell-3} m!n! \prod_{i\geq 1} \frac{1}{\ell_i!}\left(\frac{i^i}{i!}\right)^{\ell_i}$

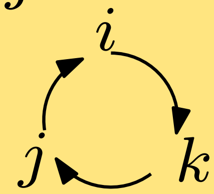
Des arbres de Hurwitz simples aux factorisations

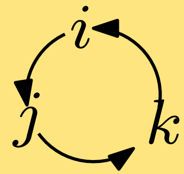
Une règle locale pour créer des demi-arêtes avec les conditions de croissance



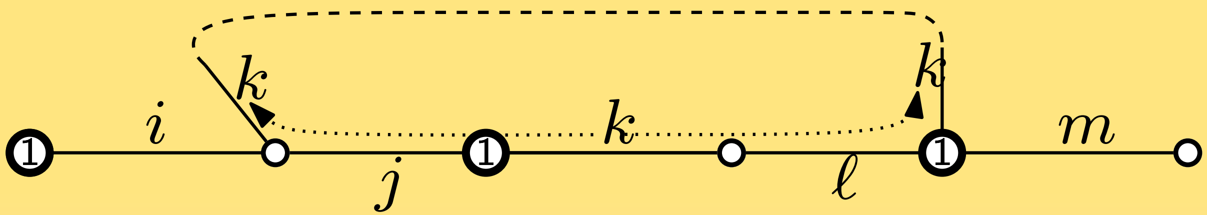
ou



Cas 1: 

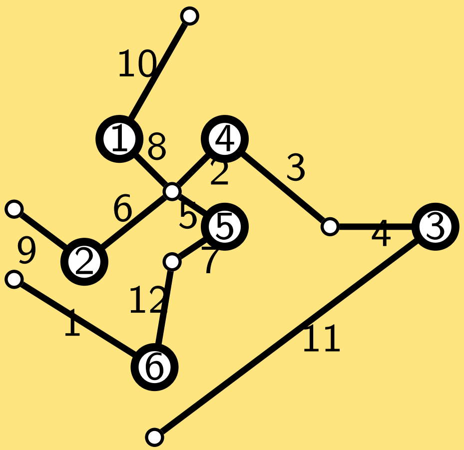
Cas 2: 

Deux demi-arêtes de même étiquette $\Rightarrow$ une arête et une face de degré 4

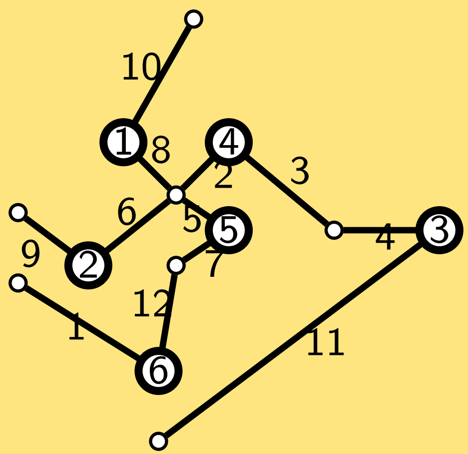


Itérer les règles locales tant que possible...

Des arbres de Hurwitz simples aux factorisations

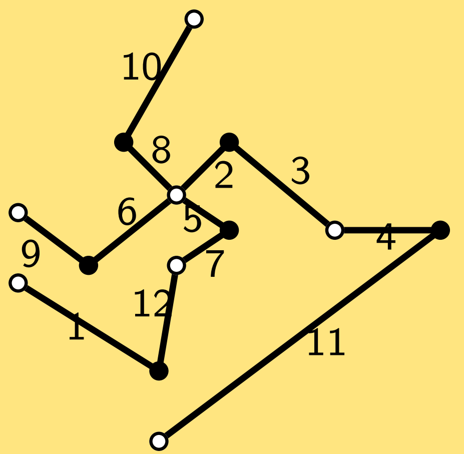


Des arbres de Hurwitz simples aux factorisations



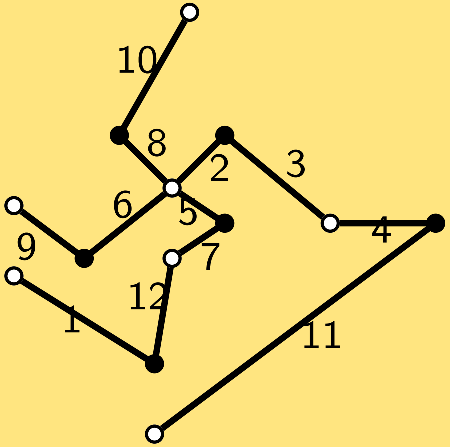
Les étiquettes des sommets
ne servent pas pour la bijection

Des arbres de Hurwitz simples aux factorisations

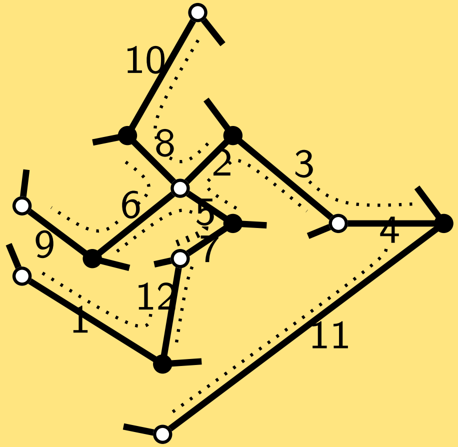


Les étiquettes des sommets
ne servent pas pour la bijection

Des arbres de Hurwitz simples aux factorisations

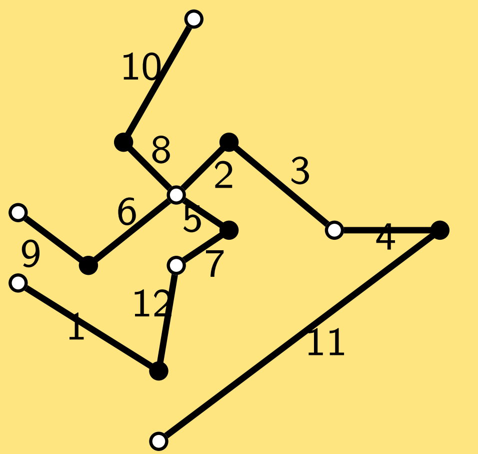


Les étiquettes des sommets
ne servent pas pour la bijection

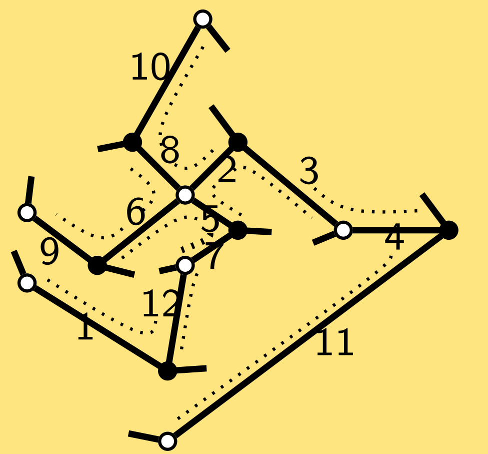


Croissance des bourgeons.

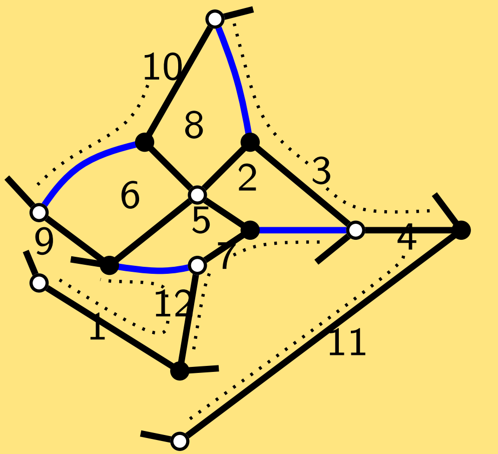
Des arbres de Hurwitz simples aux factorisations



Les étiquettes des sommets
ne servent pas pour la bijection

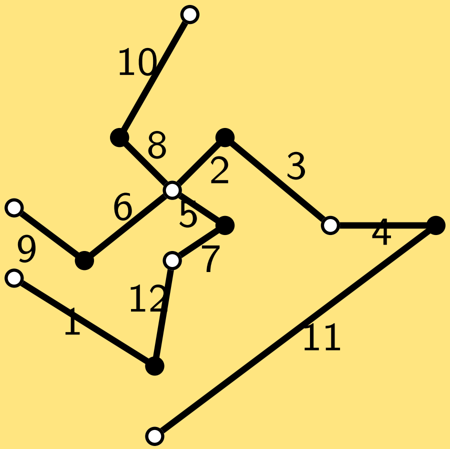


Croissance des bourgeons.

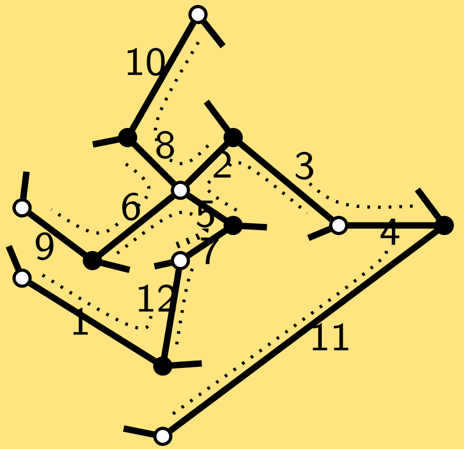


Appariement et nouvelle croissance

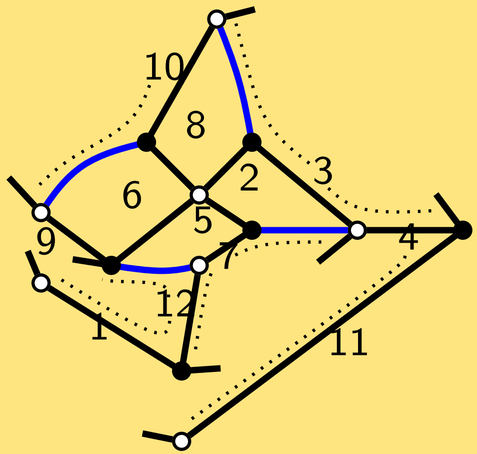
Des arbres de Hurwitz simples aux factorisations



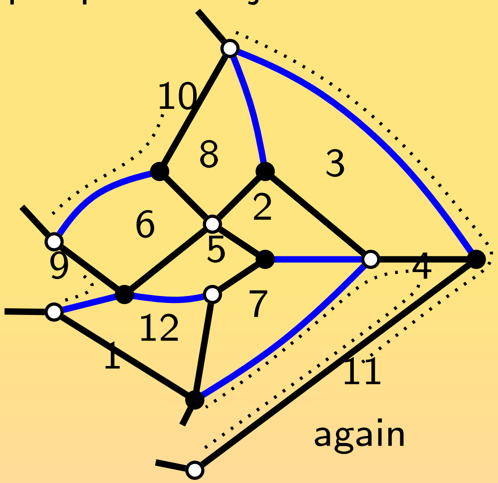
Les étiquettes des sommets
ne servent pas pour la bijection



Croissance des bourgeons.

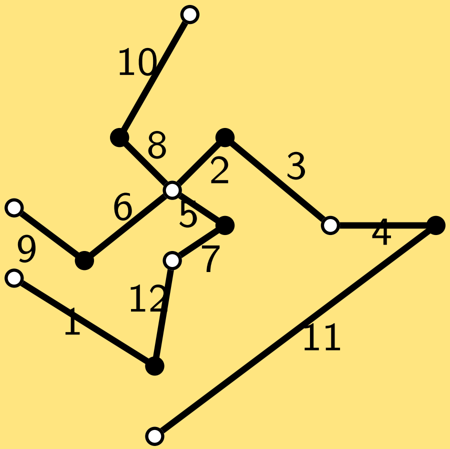


Appariement et nouvelle croissance

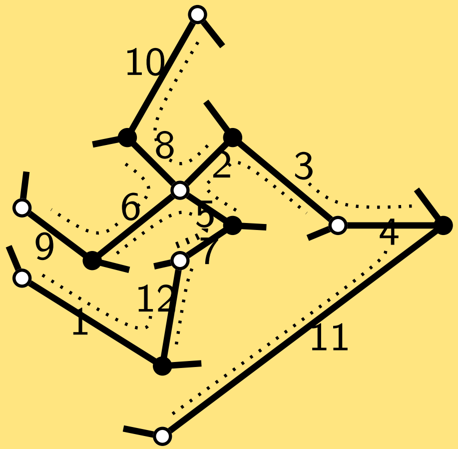


again

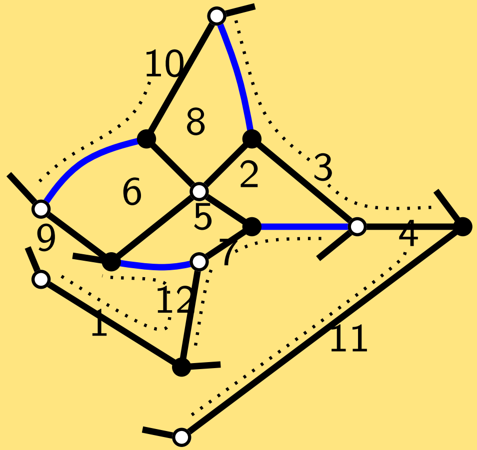
Des arbres de Hurwitz simples aux factorisations



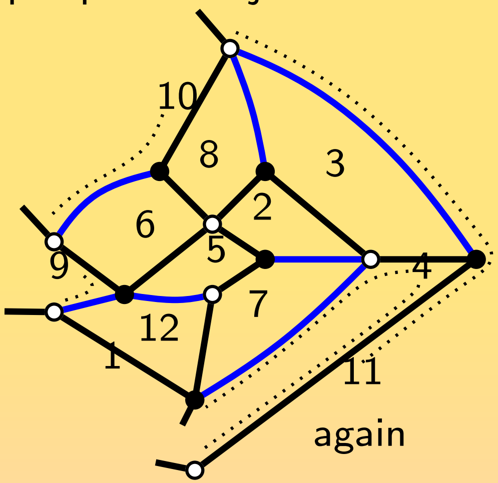
Les étiquettes des sommets
ne servent pas pour la bijection



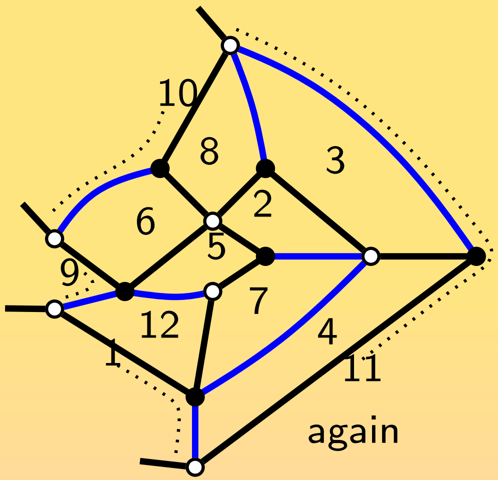
Croissance des bourgeons.



Appariement et nouvelle croissance

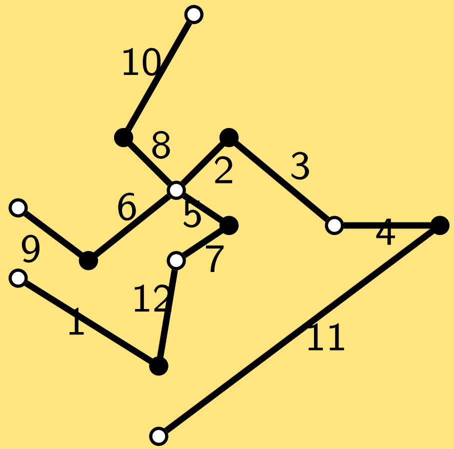


again

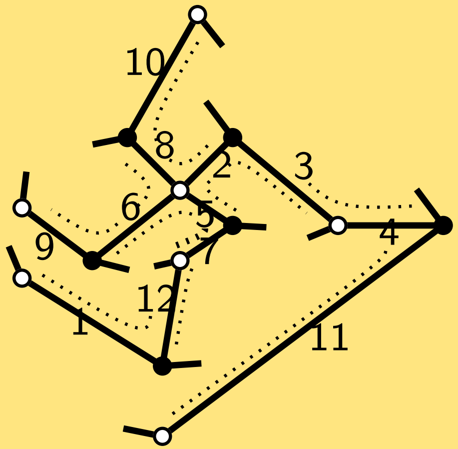


again

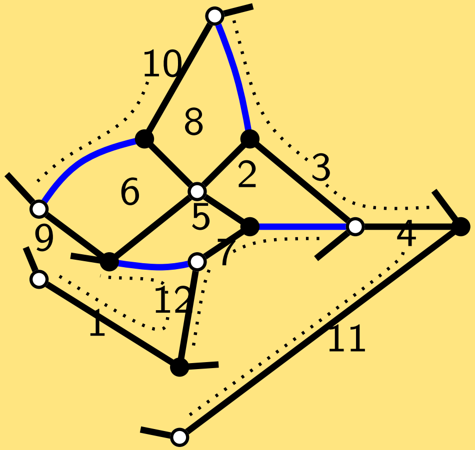
Des arbres de Hurwitz simples aux factorisations



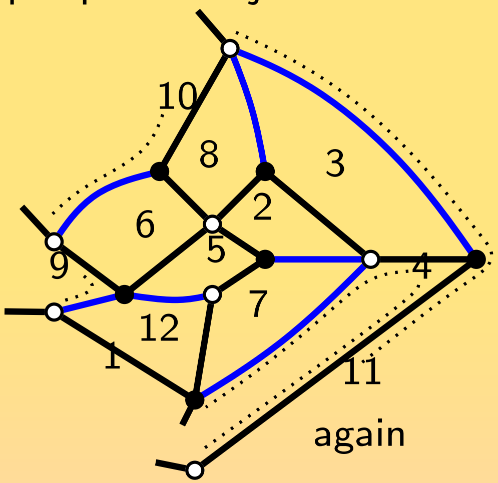
Les étiquettes des sommets
ne servent pas pour la bijection

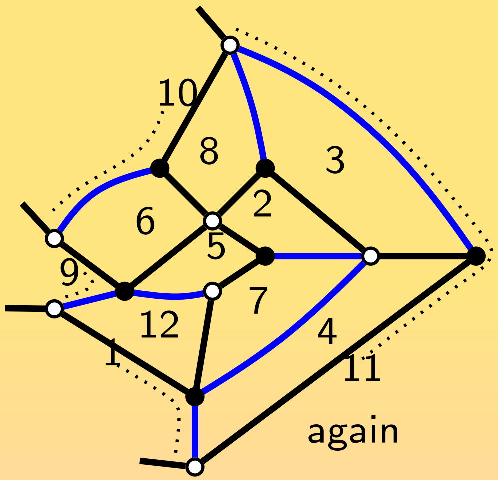


Croissance des bourgeons.



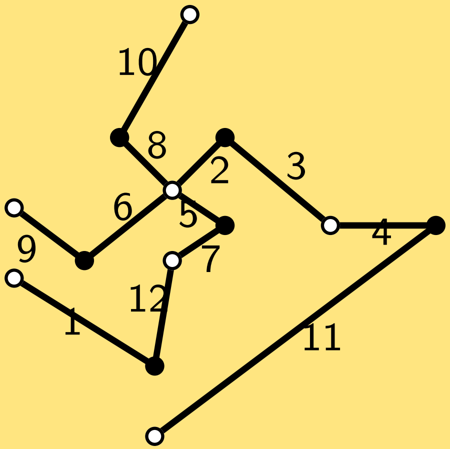
Appariement et nouvelle croissance



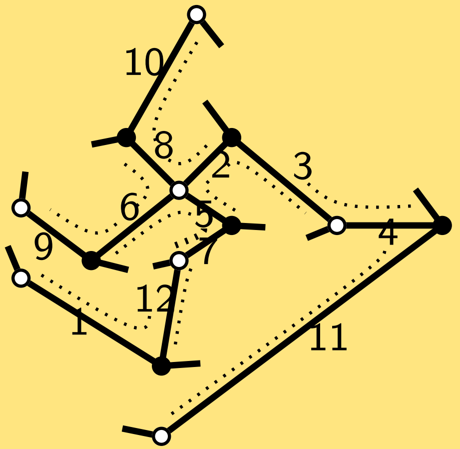


Lemme. Lorsqu'on doit s'arrêter il reste des demi-arêtes blanches.

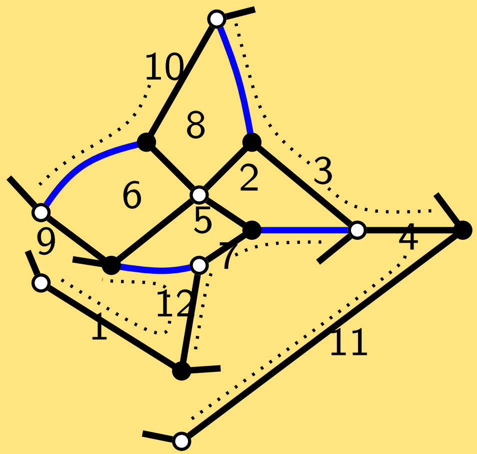
Des arbres de Hurwitz simples aux factorisations



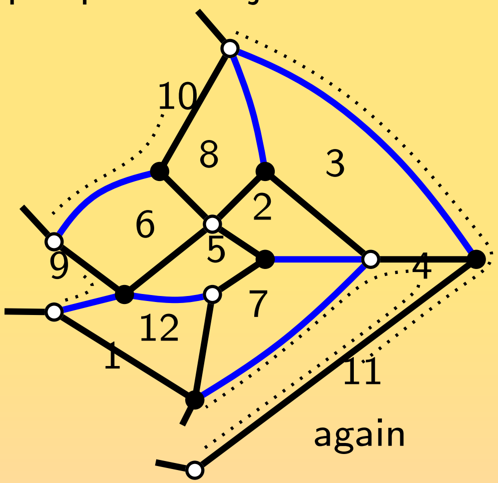
Les étiquettes des sommets
ne servent pas pour la bijection

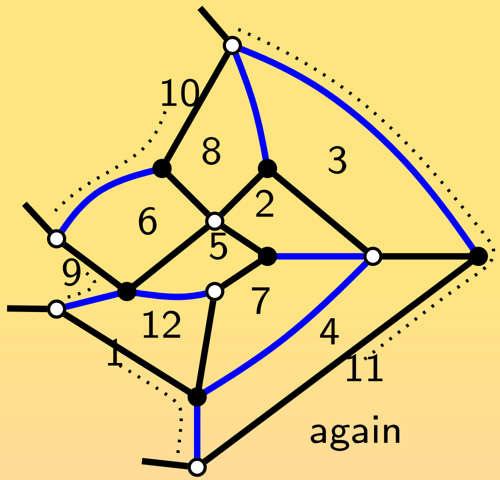


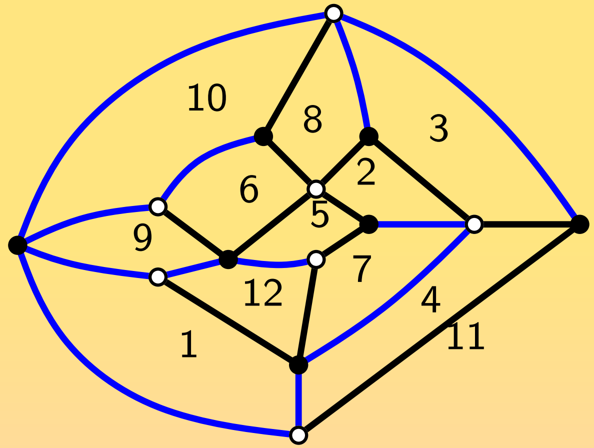
Croissance des bourgeons.



Appariement et nouvelle croissance



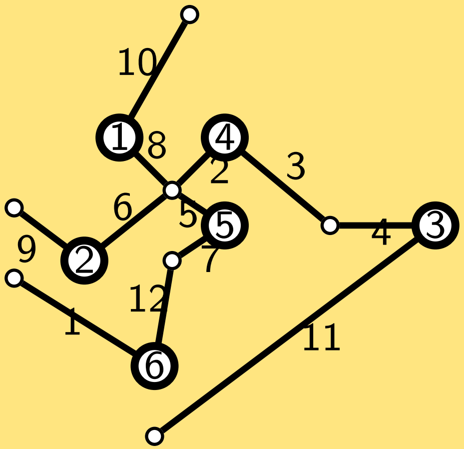




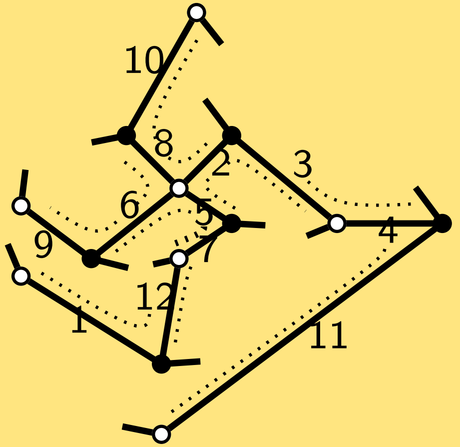
Lemme. Lorsqu'on doit s'arrêter il reste des demi-arêtes blanches.

On les connecte à un nouveau sommet noir et on remet les étiquettes.

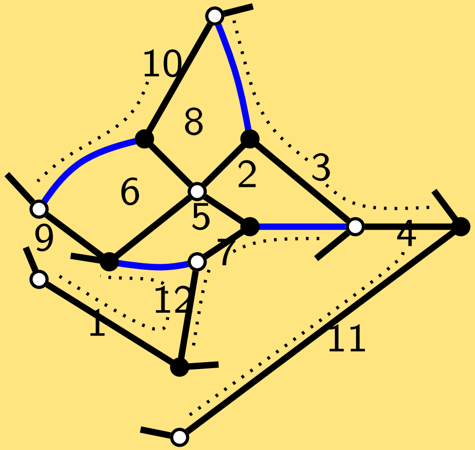
Des arbres de Hurwitz simples aux factorisations



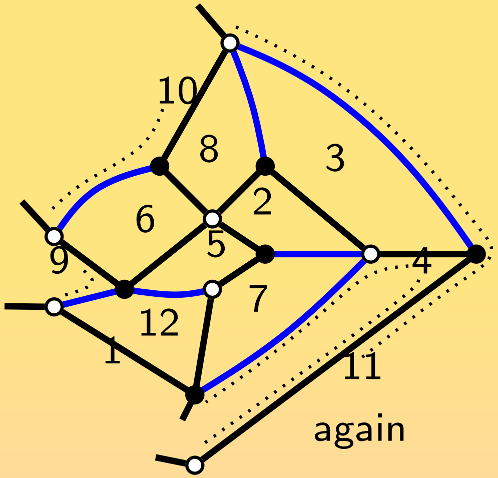
Les étiquettes des sommets
ne servent pas pour la bijection

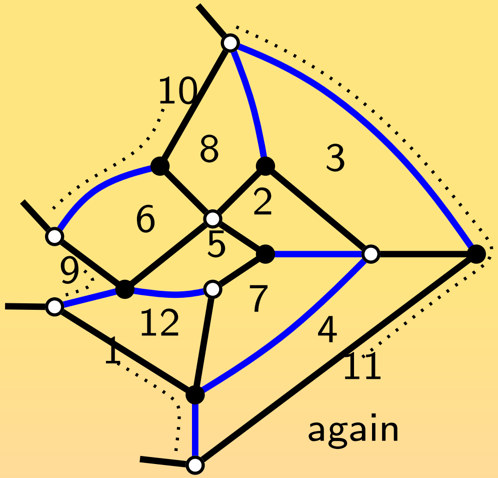


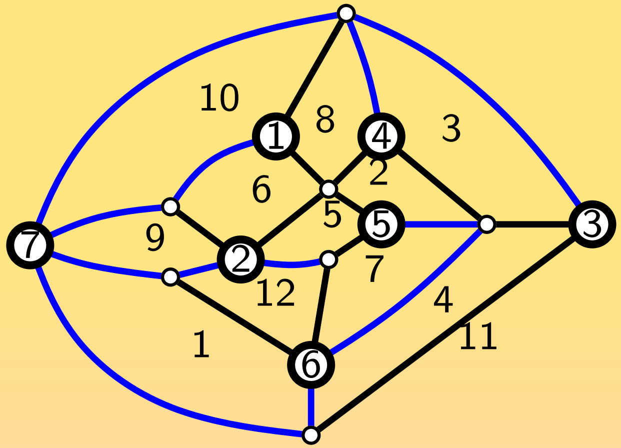
Croissance des bourgeons.



Appariement et nouvelle croissance



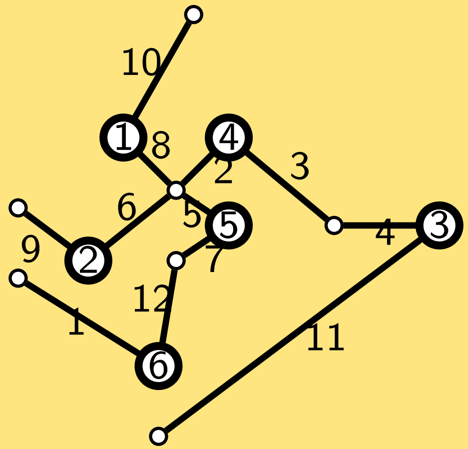




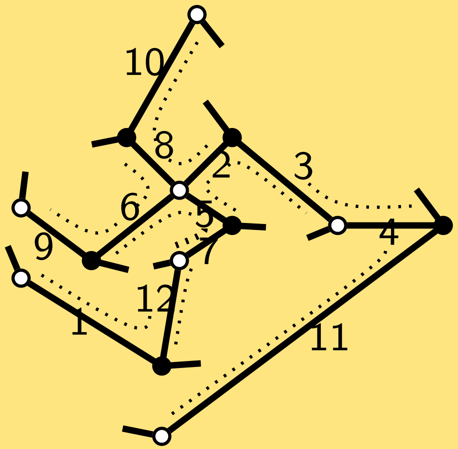
Lemme. Lorsqu'on doit s'arrêter il reste des demi-arêtes blanches.

On les connecte à un nouveau sommet noir et on remet les étiquettes.

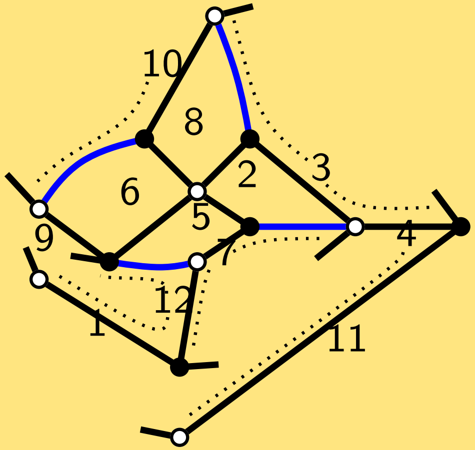
Des arbres de Hurwitz simples aux factorisations



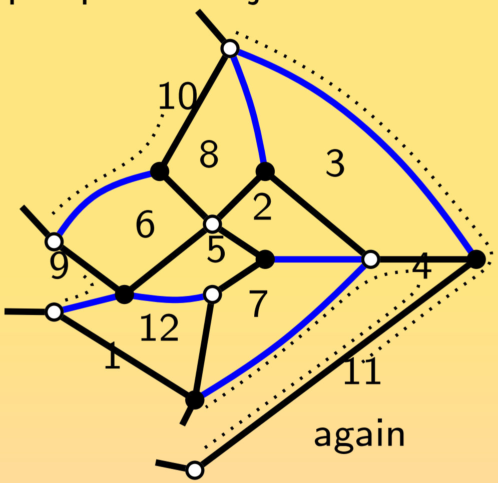
Les étiquettes des sommets
ne servent pas pour la bijection

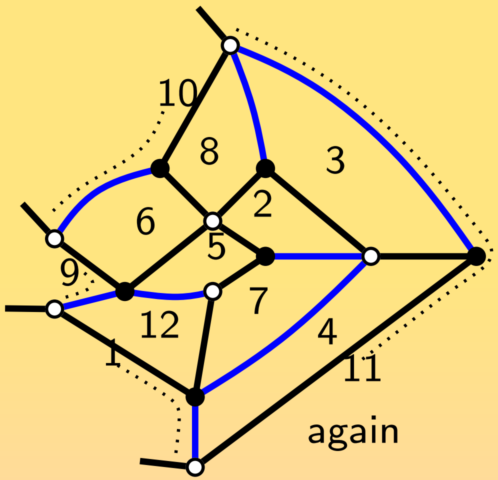


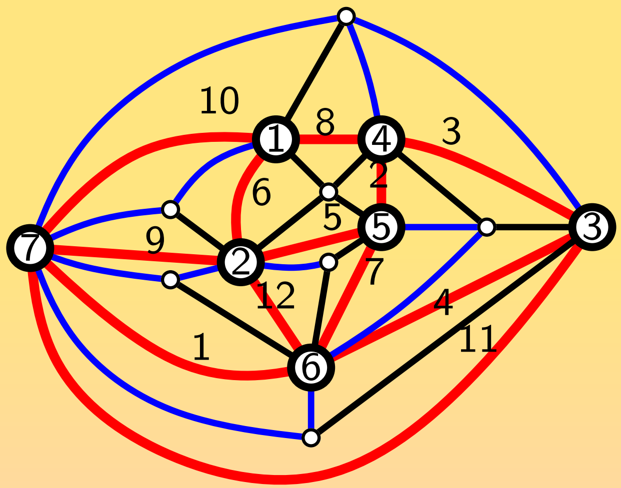
Croissance des bourgeons.



Appariement et nouvelle croissance







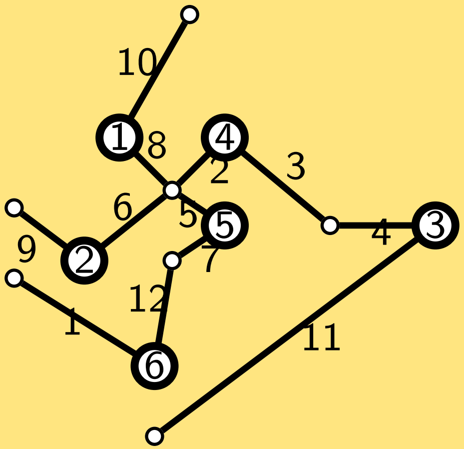
Lemme. Lorsqu'on doit s'arrêter il reste des demi-arêtes blanches.

On les connecte à un nouveau sommet noir et on remet les étiquettes.

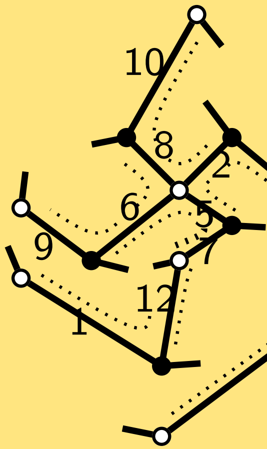
La face numéro i définit la transposition τ_i. **Lemme:** Le produit donne l'identité.

$$(6,7)(4,5)(3,4)(3,6)(2,5)(1,2)(5,6)(1,4)(2,7)(1,7)(3,7)(2,6)=(1)(2)(3)(4)(5)(6)(7)$$

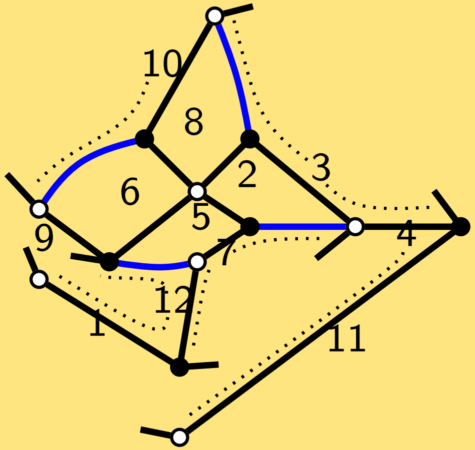
Des arbres de Hurwitz simples aux factorisations



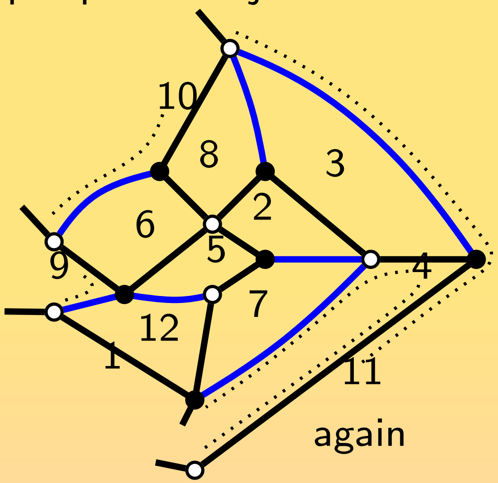
Les étiquettes des sommets
ne servent pas pour la bijection

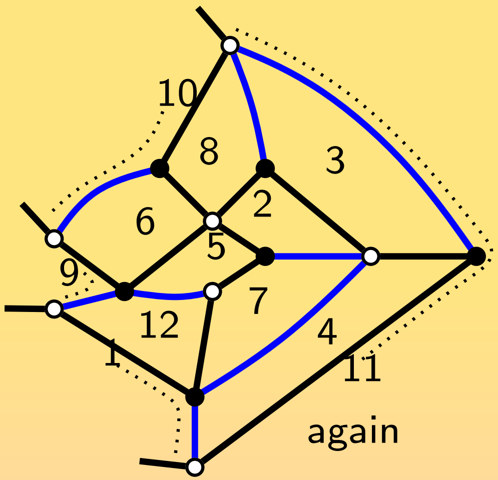


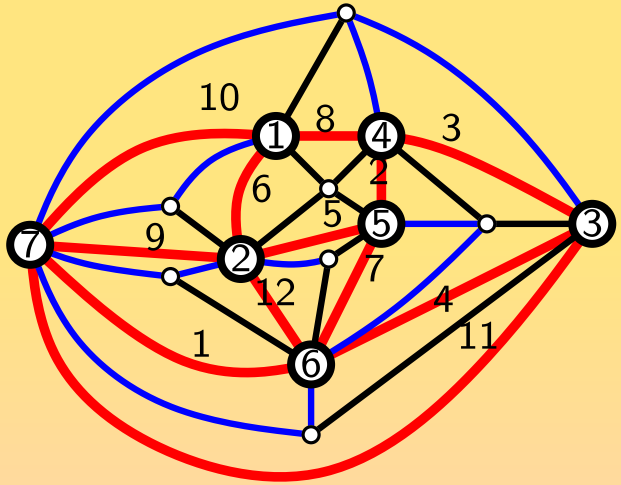
Croissance des bourgeons.



Appariement et nouvelle croissance





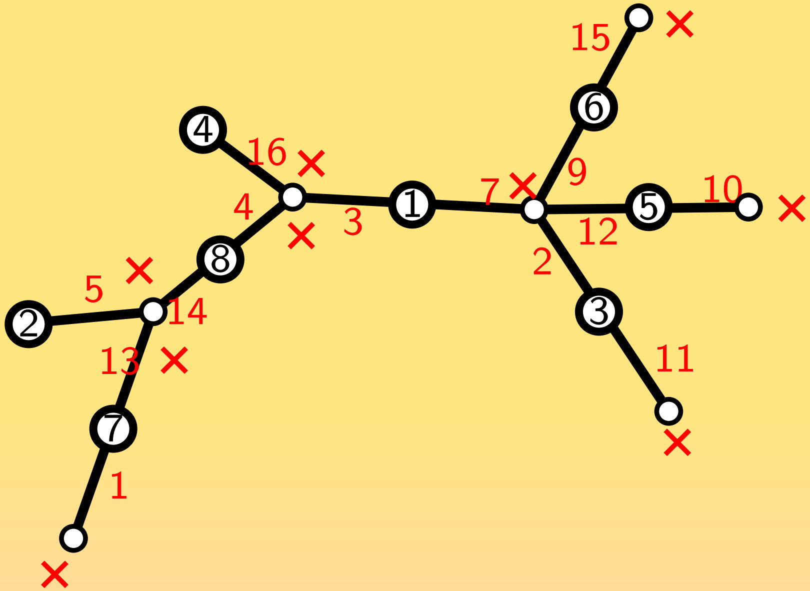


Théorème. La clôture est une bijection entre arbres de Hurwitz de taille n et factorisations minimales transitives en transpositions de l'identité de S_n.

Arbres de Hurwitz de type λ et formule d'Hurwitz

Pour traiter le cas général de la formule il faut définir des arbres de Hurwitz de type λ: ce sont des arbres plans avec

- $n-1$ sommets noirs de degré 2 ou 1, étiqueté avec $\{1,\ldots,n-1\}$
- ℓ sommets blancs dont ℓ_i portent i séparateurs et $i-1$ feuilles noires
- $m=n+\ell-2$ arêtes avec étiquettes distintes dans $\{1,\ldots,m\}$
- les arêtes sont croissantes en sens direct entre 2 séparateurs



$H_n = n^{n-2}(n-1)!$ $\quad H_{1^n} = n^{n-3}(2n-2)!$ $\quad H_\lambda = n^{\ell-3} m! n! \prod_{i\geq 1} \frac{1}{\ell_i!}\left(\frac{i^i}{i!}\right)^{\ell_i}$

Arbres de Hurwitz de type λ et formule d'Hurwitz

Pour traiter le cas général de la formule il faut définir des arbres de Hurwitz de type λ: ce sont des arbres plans avec

- $n-1$ sommets noirs de degré 2 ou 1, étiqueté avec $\{1,\ldots,n-1\}$
- ℓ sommets blancs dont ℓ_i portent i séparateurs et $i-1$ feuilles noires
- $m=n+\ell-2$ arêtes avec étiquettes distintes dans $\{1,\ldots,m\}$
- les arêtes sont croissantes en sens direct entre 2 séparateurs

Lemme. Le nb d'arbres d'Hurwitz de type λ est $n^{\ell-3}m!n!\prod_{i\geq 1}\frac{1}{\ell_i!}\left(\frac{i^i}{i!}\right)^{\ell_i}$

Théorème La clôture s'étend en une bijection des arbres de Hurwitz de type λ avec les factorisations minimales transitives en transpositions de permutations de type cyclique λ.

Corollare: La formule d'Hurwitz.

$H_n = n^{n-2}(n-1)!$ $\quad H_{1n} = n^{n-3}(2n-2)!$ $\quad H_\lambda = n^{\ell-3}m!n!\prod_{i\geq 1}\frac{1}{\ell_i!}\left(\frac{i^i}{i!}\right)^{\ell_i}$

La formule d'Hurwitz

Dénes, Moszkowski, cartes croissantes

Arbres de Hurwitz, clôture et preuve par intimidation

Lien avec les revêtements ramifiés; les constellations

Bijections pour les constellations:

arbres bourgeonnants, mobiles bien étiquetés

parcours en largeur et α-orientations minimales

Application au problème d'Hurwitz et idée des preuves

Venez au prochain séminaire lotharingien

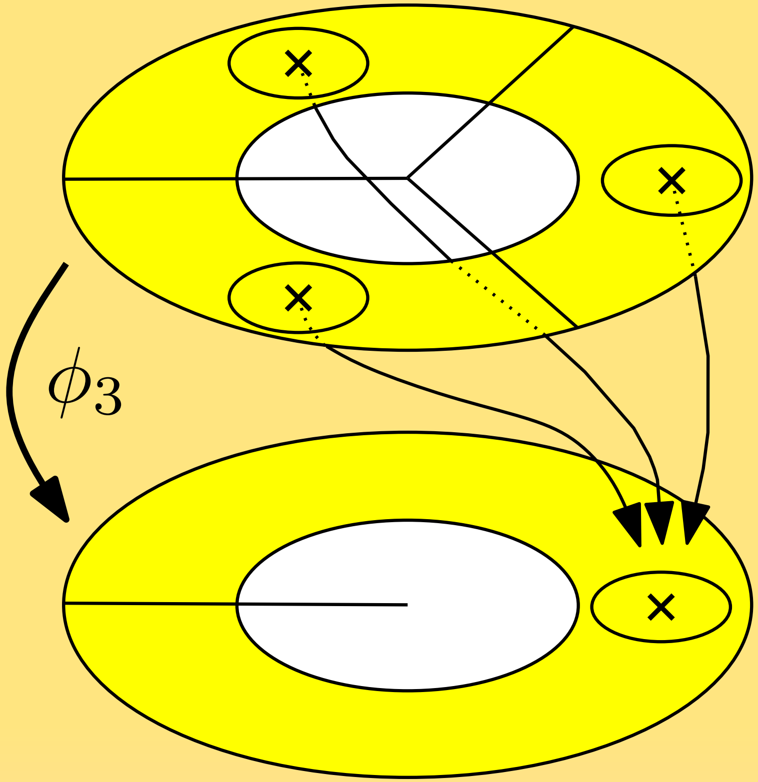
Origin of the problem...

Ramified coverings of the sphere by itself

Ramified coverings of the sphere by itself

Let A_r be the annulus $\{z \mid r < |z| < 1\} \subset \mathbb{C}$, and $D = \{z \mid |z| < 1\}$ the disk.

Consider $\phi_k : A_r \to A_r$ with $\phi_k(z) = z^k$.



The mapping ϕ_k is a covering of A_r by A_r because: for all x in the image of ϕ_k there exists n and a neighborhood V of x such that $\phi_k^{-1}(V) \sim D \times \{1, \ldots, n\}$.

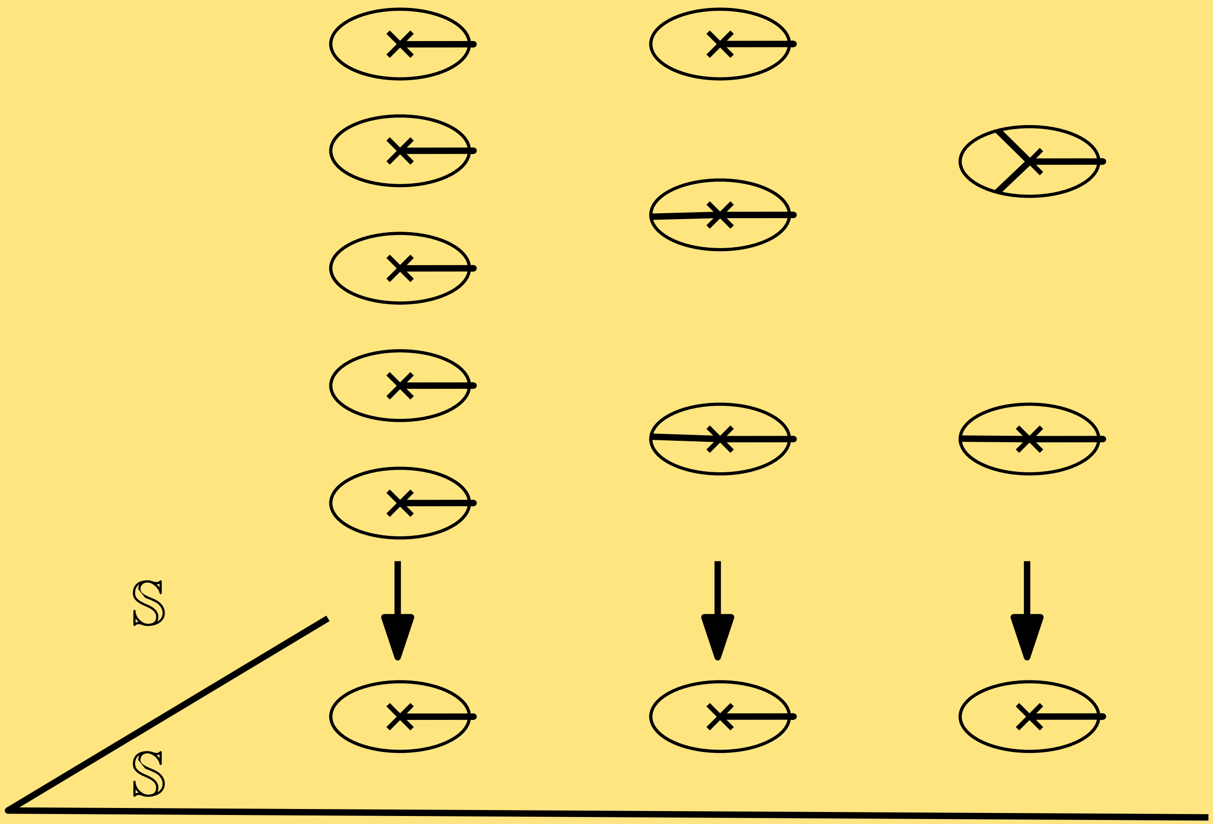
By continuity, the number $n = |\phi^{-1}(x)|$ of sheets of any covering ϕ does not depend on x: for instance $n = k$ for ϕ_k.

Extend from A_r to D? Have to exclude 0.

A mapping ϕ is a ramified covering from $\mathbb{S}$ to $\mathbb{S}$ if there exists a finite subset $X = \{x_1, \ldots, x_p\}$ such that $\phi_{\mathbb{S}\setminus\phi^{-1}(X)}$ is a covering and ϕ behaves like a collection of ϕ_k above each x_i.

See book Lando-Zvonkin for more details.

Ramified coverings of the sphere by itself (Cont'd)

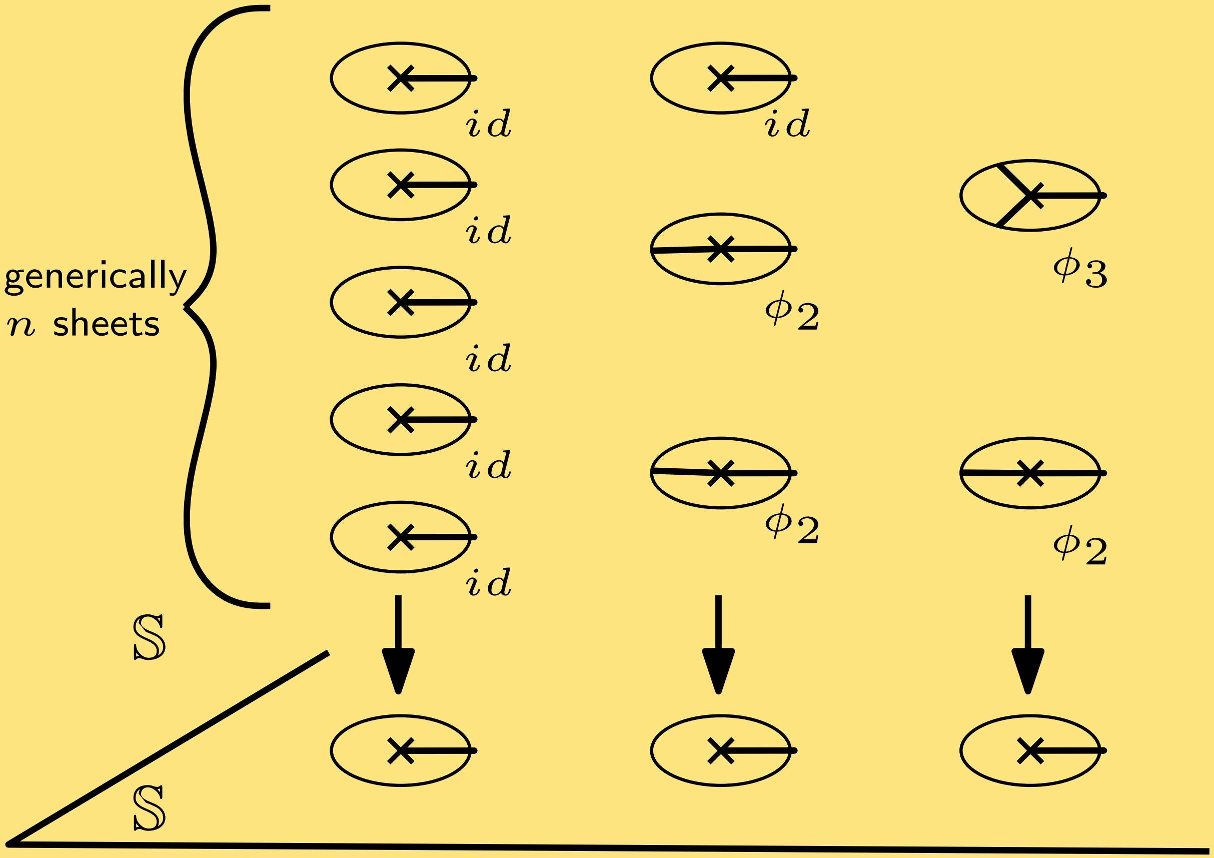


regular value critical value critical value

$\lambda^{(1)} = 1^5$ $\lambda^{(2)} = 1, 2^2$ $\lambda^{(2)} = 2, 3$

the passport $\Lambda = (\lambda^{(1)}, \ldots, \lambda^{(p)})$ of a ramified covering

Ramified coverings of the sphere by itself (Cont'd)

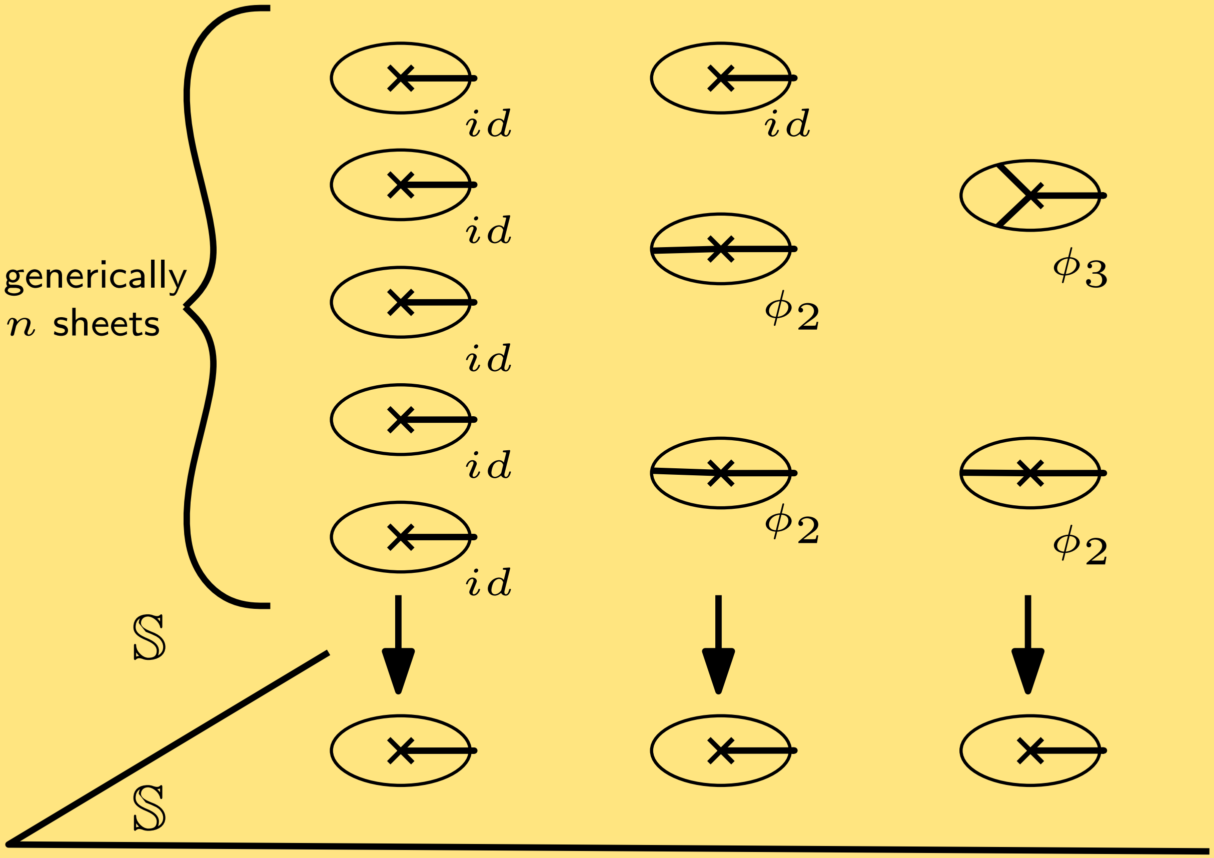


regular value critical value critical value

$\lambda^{(1)} = 1^5$ $\lambda^{(2)} = 1, 2^2$ $\lambda^{(2)} = 2, 3$

the passport $\Lambda = (\lambda^{(1)}, \ldots, \lambda^{(p)})$ of a ramified covering

Ramified coverings of the sphere by itself (Cont'd)



regular value critical value critical value

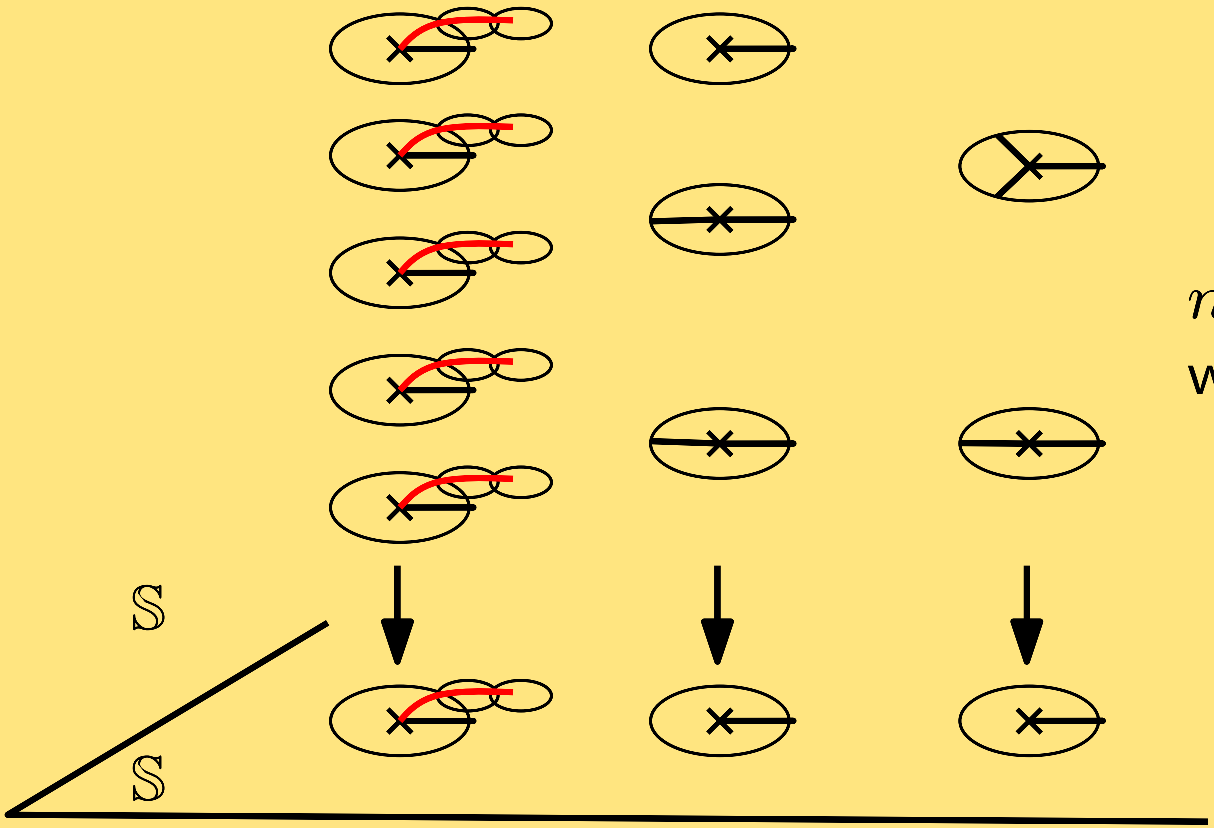
$\lambda^{(1)} = 1^5$ $\lambda^{(2)} = 1, 2^2$ $\lambda^{(2)} = 2, 3$

the passport $\Lambda = (\lambda^{(1)}, \ldots, \lambda^{(p)})$ of a ramified covering

The sphere $\mathcal{S}$ is connected:

study preimages of a path!

Ramified coverings of the sphere by itself (Cont'd)



regular value critical value critical value

$\lambda^{(1)} = 1^5$ $\lambda^{(2)} = 1, 2^2$ $\lambda^{(2)} = 2, 3$

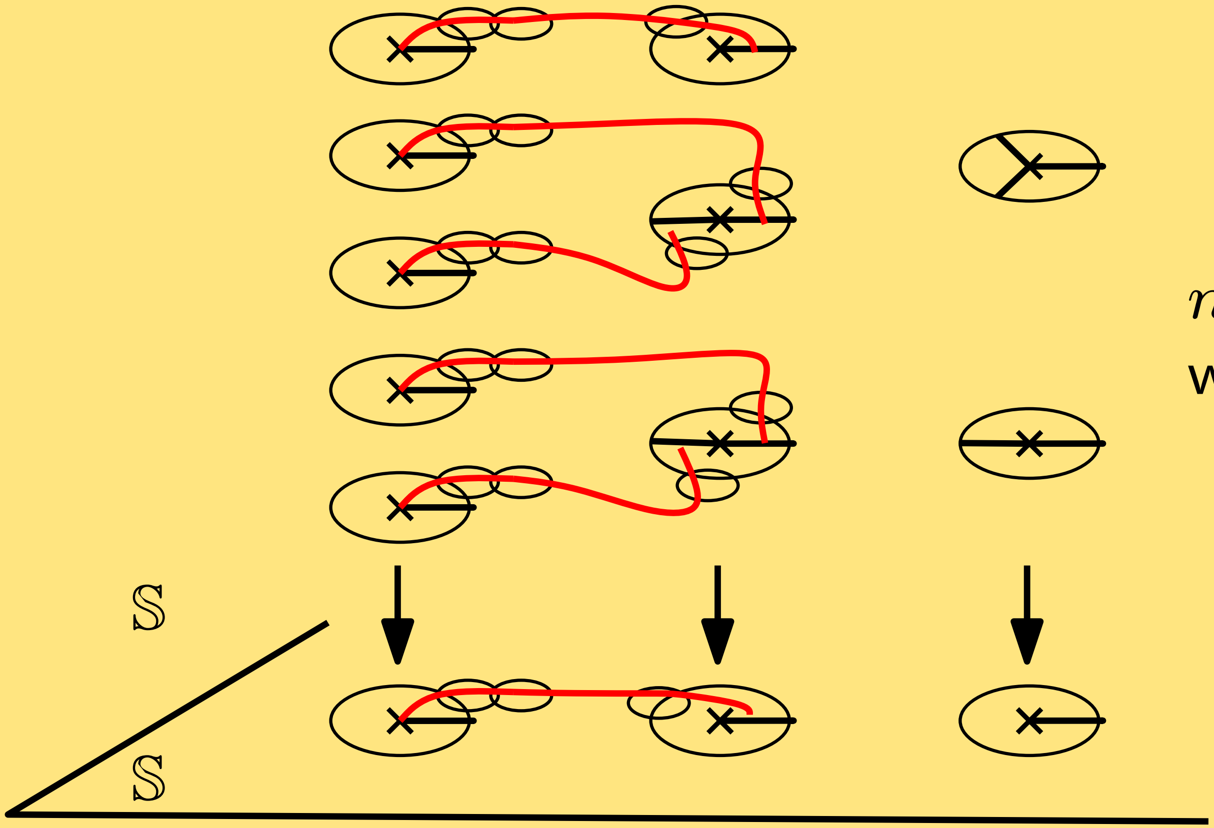
the passport $\Lambda = (\lambda^{(1)}, \ldots, \lambda^{(p)})$ of a ramified covering

The sphere $\mathcal{S}$ is connected:

study preimages of a path!

n independant preimages as long as we stay away from critical points

Ramified coverings of the sphere by itself (Cont'd)



regular value critical value critical value

$\lambda^{(1)} = 1^5$ $\lambda^{(2)} = 1, 2^2$ $\lambda^{(2)} = 2, 3$

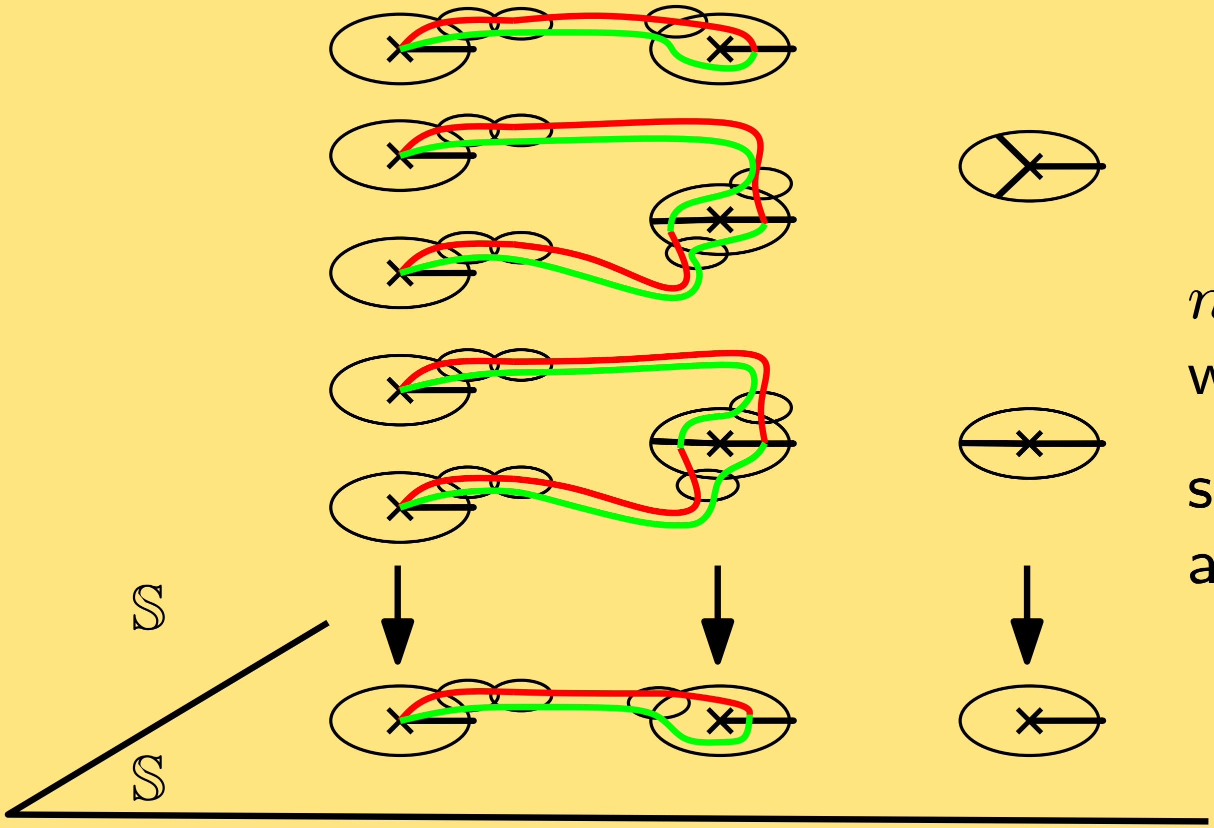
the passport $\Lambda = (\lambda^{(1)}, \ldots, \lambda^{(p)})$ of a ramified covering

The sphere $\mathcal{S}$ is connected:

study preimages of a path!

n independant preimages as long as we stay away from critical points

Ramified coverings of the sphere by itself (Cont'd)



regular value critical value critical value

$\lambda^{(1)} = 1^5$ $\lambda^{(2)} = 1, 2^2$ $\lambda^{(2)} = 2, 3$

the passport $\Lambda = (\lambda^{(1)}, \ldots, \lambda^{(p)})$ of a ramified covering

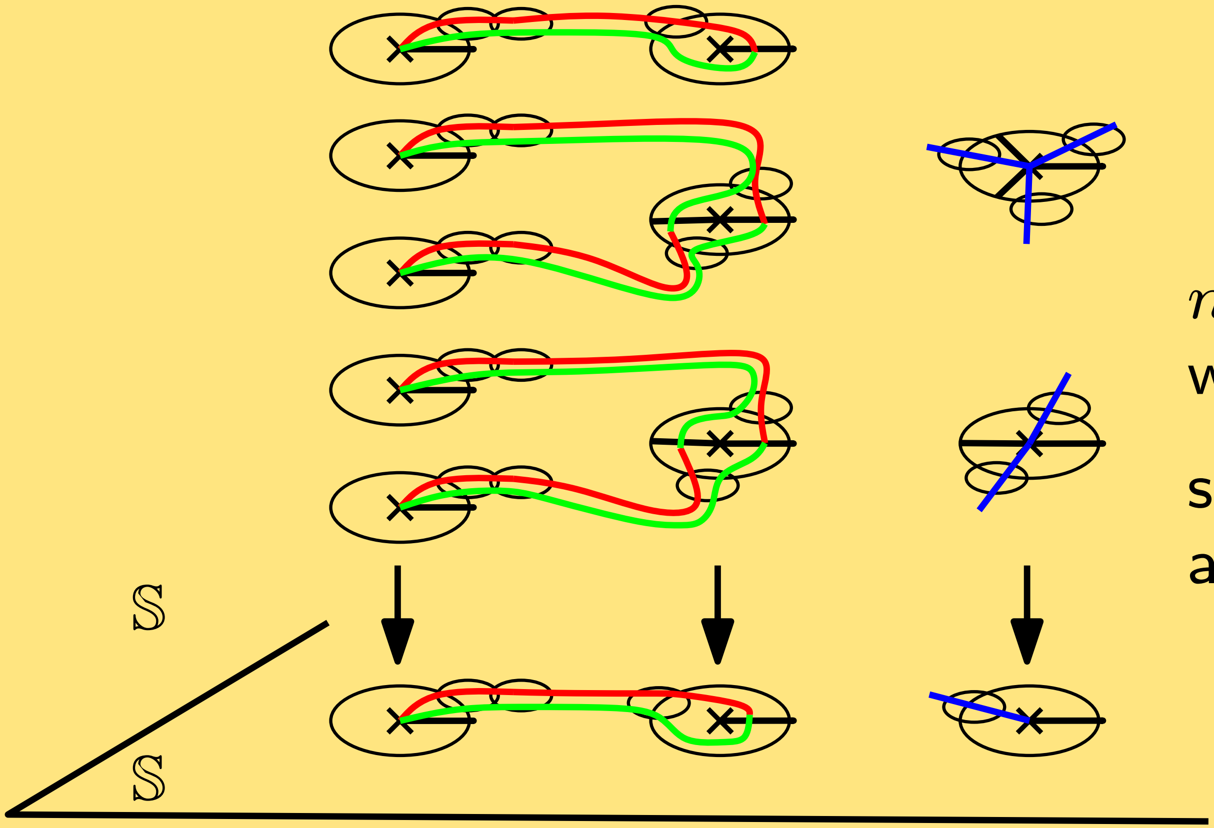
The sphere $\mathcal{S}$ is connected:

study preimages of a path!

n independant preimages as long as we stay away from critical points

sheets gets permuted while winding around critical points

Ramified coverings of the sphere by itself (Cont'd)



regular value critical value critical value

$\lambda^{(1)} = 1^5$ $\lambda^{(2)} = 1, 2^2$ $\lambda^{(2)} = 2, 3$

the passport $\Lambda = (\lambda^{(1)}, \ldots, \lambda^{(p)})$ of a ramified covering

The sphere $\mathcal{S}$ is connected:

study preimages of a path!

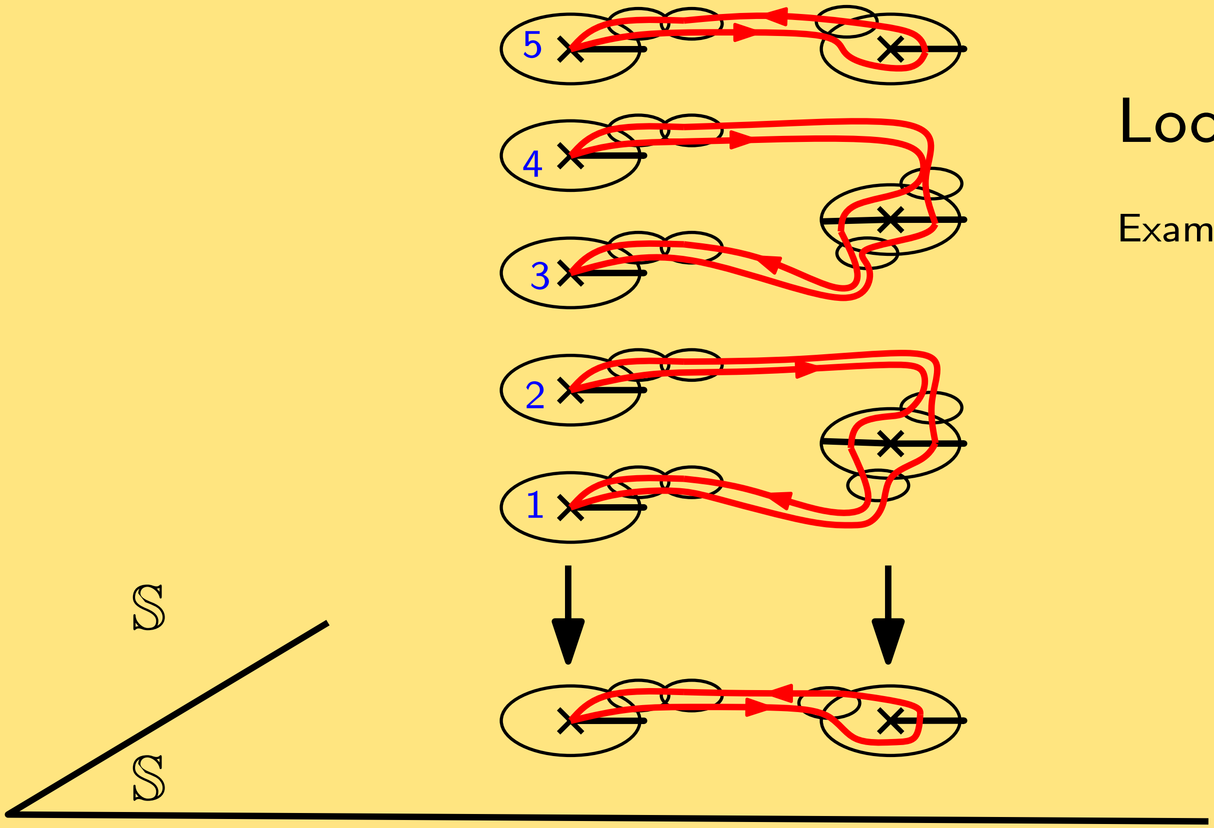
n independant preimages as long as we stay away from critical points

sheets gets permuted while winding around critical points

visiting critical points yields multiple points or "vertices"

conversely preimages of loops cannot cross otherwise

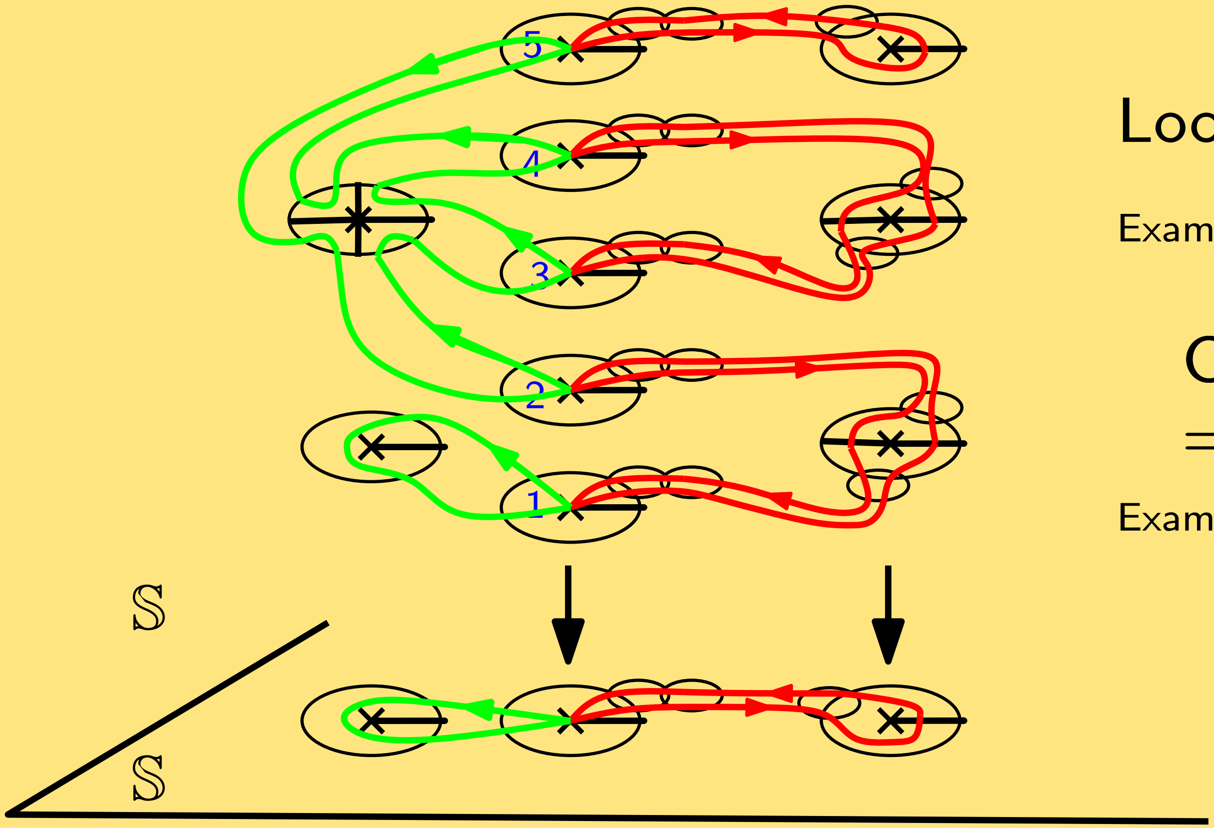
Monodromy, permutations, constellations



Loop $\Rightarrow$ permutation of sheet labels

Example: $(1,2)(3,4)(5)$ in cyclic notation

Monodromy, permutations, constellations



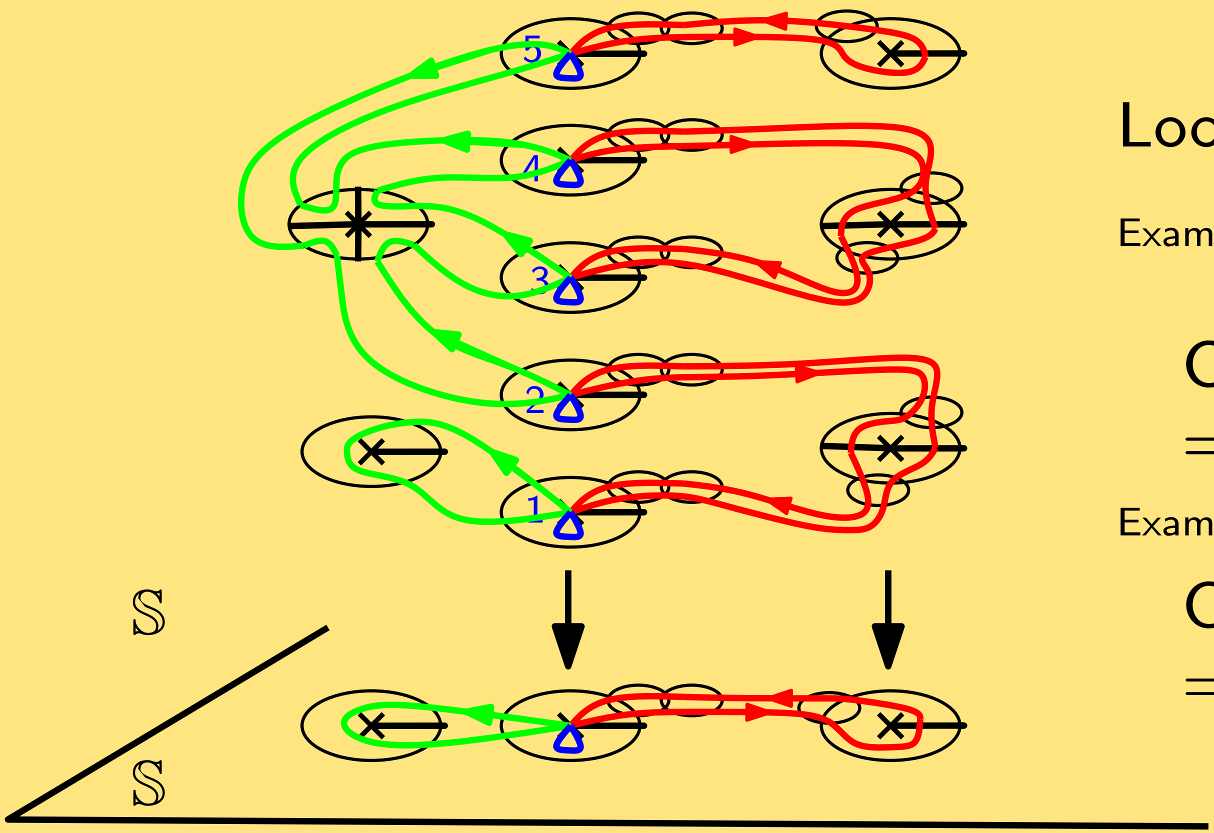
Loop $\Rightarrow$ permutation of sheet labels

Example: $(1, 2)(3, 4)(5)$ in cyclic notation

Concatenation of two loops
$\Rightarrow$ product of the permutations

Example: $(1)(2, 3, 4, 5) \cdot (1, 2)(3, 4)(5)$

Monodromy, permutations, constellations



Loop $\Rightarrow$ permutation of sheet labels

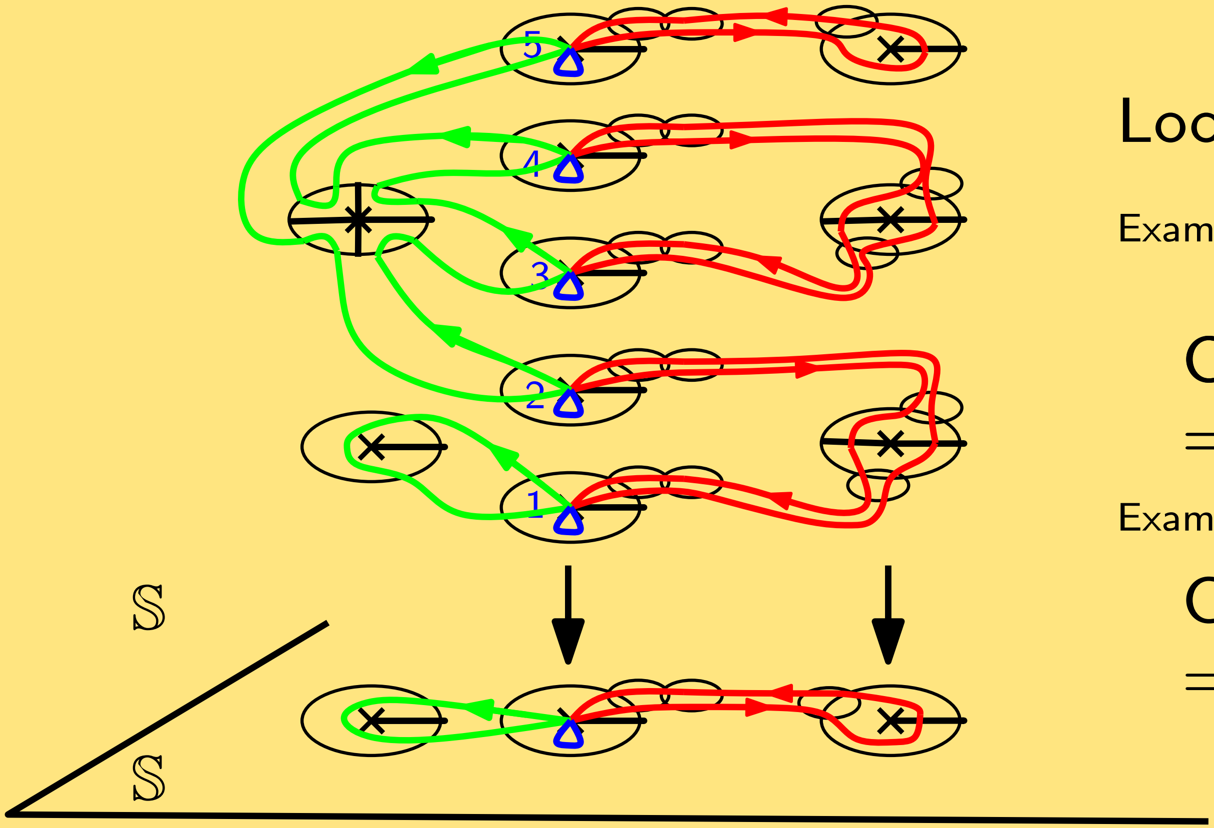
Example: $(1,2)(3,4)(5)$ in cyclic notation

Concatenation of two loops
$\Rightarrow$ product of the permutations

Example: $(1)(2,3,4,5)\cdot(1,2)(3,4)(5)$

Contractible loop in $\mathbb{S}\setminus X$
$\Rightarrow$ identity permutation

Monodromy, permutations, constellations



Loop $\Rightarrow$ permutation of sheet labels

Example: $(1,2)(3,4)(5)$ in cyclic notation

Concatenation of two loops
$\Rightarrow$ product of the permutations

Example: $(1)(2,3,4,5)\cdot(1,2)(3,4)(5)$

Contractible loop in $\mathbb{S}\setminus X$
$\Rightarrow$ identity permutation

Region inside a contractible loop $\Rightarrow$ preimages are discs

Monodromy, permutations, constellations

Theorem. There is a bijection between

- Labelled ramified covering of type Λ
- Factorizations of type Λ
- Constellations of type Λ.

Fundamental remark. Constellations of type λ encodes f.i.t. iff there are $n-1$ vertices of color i for all $i = 1 \dots m$.

A formula for general factorizations [BMS00]

Theorem. Let $\lambda = 1^{\ell_1}, \ldots, n^{\ell_n}$ be a partition of n, and $\ell = \sum_i \ell_i$.
The number of m-uple of permutations $(\sigma_1, \ldots, \sigma_m)$ such that

- (factorization) $\sigma_1 \cdots \sigma_m = \sigma$ with cycle type λ
- (transitivity) $\langle \sigma_1, \ldots, \sigma_m \rangle$ acts transitively on $\{1, \ldots, n\}$
- (minimality) the total rank of factors is $\sum_i r(\sigma_i) = n + \ell - 2$

is

$$m \frac{((m-1)n-1)!}{(mn-(n+\ell-2))!} \cdot \prod_i \left(i \binom{mi-1}{i} \right)^{\ell_i}$$