Mots, chemins, arbres et cartes

Gilles Schaeffer

CNRS / Ecole Polytechnique

ERC Research Starting Grant "ExploreMaps"

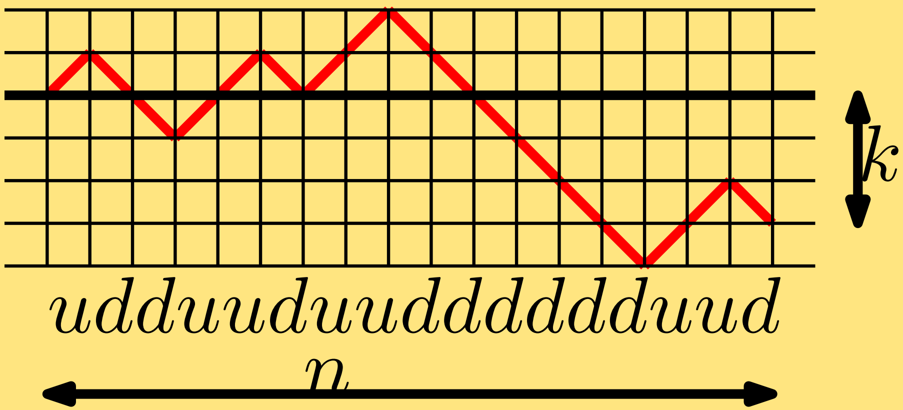
Des mots et des chemins

Des mots et des chemins

Chemins du plan issus de $(0,0)$, à pas $(1,1)$ ou $(1,-1)$.

$=$

Mots sur l'alphabet $\{u,d\}$, $u = up = (1,1)$, $d = down = (1,-1)$.



$L(n) = \{u,d\}^n, \qquad |L(n)| = 2^n.$

$L_k(n) = \{w,\ |w| = n,\ h(w) = k\}$

$$\left\{\begin{array}{l} \ell + k \text{ pas } u \\ \ell \text{ pas } d \\ n = 2\ell + k \end{array}\right. \qquad \Rightarrow |L_k(n)| = \binom{n}{\frac{n-k}{2}}$$

Série formelle en variables non commutatives:

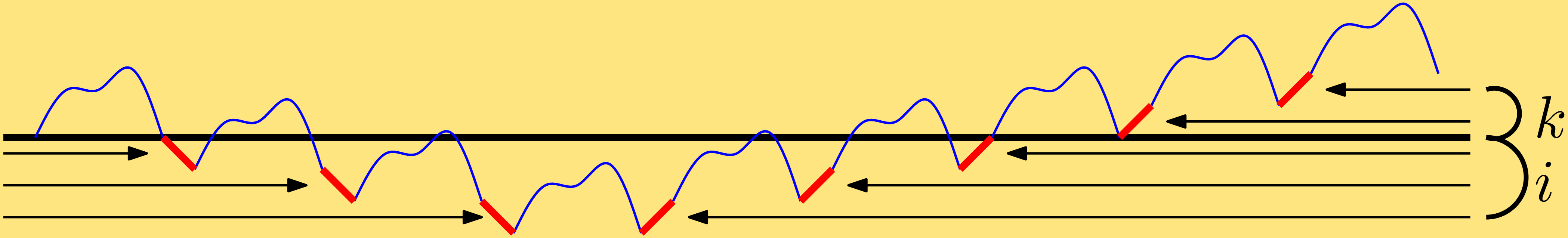
pour $L = \{u,d\}^* \quad \Rightarrow \quad \sum_{w \in L} w = \sum_{n \geq 0} (u+d)^n$

Image commutative: $\phi : u \mapsto tv, d \mapsto tv^{-1} = t\bar{v}$ $\quad \Rightarrow$ série génératrice

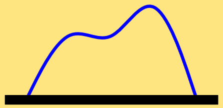
$$L(v) \equiv L(t;v) = \sum_{w \in L} t^{|w|} v^{h(w)} = \sum_{n \geq 0} ((v+\bar{v})t)^n = \frac{1}{1-t(v+\bar{v})}$$

$$L(1) \equiv L(t;1) = \sum_{n \geq 0} (2t)^n = \frac{1}{1-2t} \quad \Rightarrow \quad [t^n]L(t,1) = 2^n$$

Factorisation de Catalan (premiers/derniers passages)



$$L = \{u, d\}^* = (Dd)^* D (uD)^*$$

ici $D =$  $= \{$chemins de Dyck$\}$ (ou mots de Dyck)

$= \{w \in L \mid h(w) = 0$ et $h(u) \geq 0, \forall w = uv\}$.

$\Rightarrow \quad \frac{1}{1-2t} = \frac{1}{1-tD} D \frac{1}{1-tD} \qquad \Rightarrow D = 1 + 2t^2 D^2$

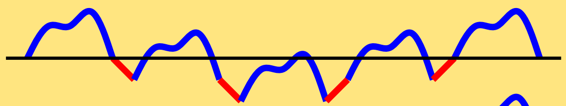
interpréter...

$L_{i,k} = (Dd)^i D (uD)^{i+k}$: profondeur i, hauteur finale k

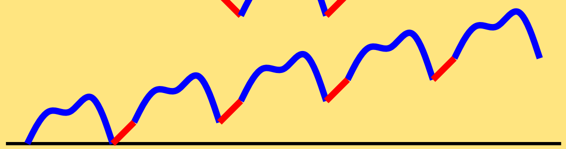
Application aux ponts et méandres (Catalan's lego$^{\mathrm{TM}}$)

$$L_{i,k} = (Dd)^i D(uD)^{i+k}\text{: profondeur } i\text{, hauteur finale } k$$

pour $k = 0$, $i = j$: $L_{j,0} = (Dd)^j D(uD)^j$



pour $k = 2j$, $i = 0$: $L_{0,2j} = D(uD)^{2j}$



$$L_{j,0} \equiv L_{0,2j} \;\Rightarrow\; P = \text{SG Ponts} = \text{SG Méandres hauteur paire} = M_e$$

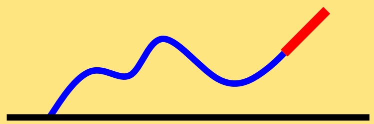
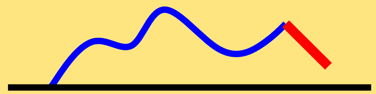
$$L_{j,1} \equiv L_{0,2j+1} \;\Rightarrow\; Q = \text{SG QuasiPonts} = \text{SG M. hauteur impaire} = M_o$$

Ponts = facile: autant de u que de d: $P(2n) = \binom{2n}{n} = M_e(2n) = M(2n)$

QuasiPonts : autant de u que de d, +1: $Q(2n+1) = \binom{2n+1}{n} = M(2n+1)$

Application aux mots de Dyck

On va comparer les méandres $M(2n+1) = \binom{2n+1}{n}$ et $M(2n) = \binom{2n}{n}$

Supprimer le dernier pas d'un $M_j(2n+1)$:  ou 

$$\Rightarrow M_j(2n+1) = M_{j+1}(2n) + M_{j-1}(2n)$$

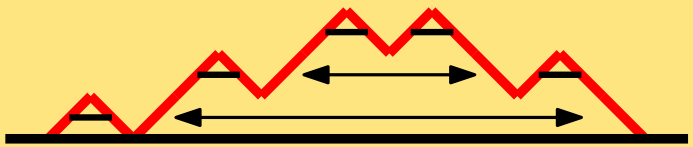
On somme: $M(2n+1) = (M(2n) - M_0(2n)) + M(2n)$

$$D(2n) = M_0(2n) = 2M(2n) - M(2n+1) = 2\binom{2n}{n} - \binom{2n+1}{n} = \frac{1}{n+1}\binom{2n}{n}.$$

Chemins et arbres

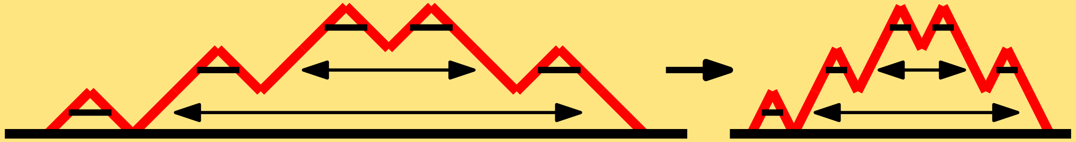
Chemins de Dyck et arbres plans

Chemin de Dyck de longueur $2n =$ contour d'un arbre plan à n arêtes.



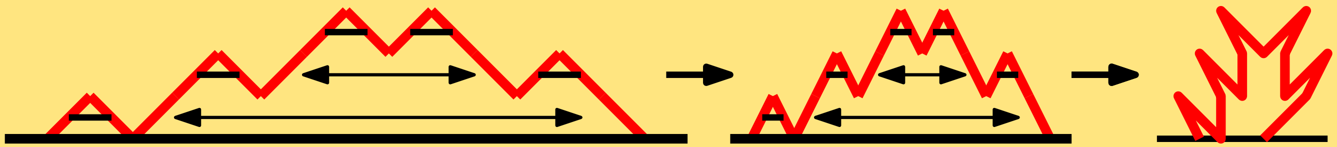
Chemins de Dyck et arbres plans

Chemin de Dyck de longueur $2n =$ contour d'un arbre plan à n arêtes.



Chemins de Dyck et arbres plans

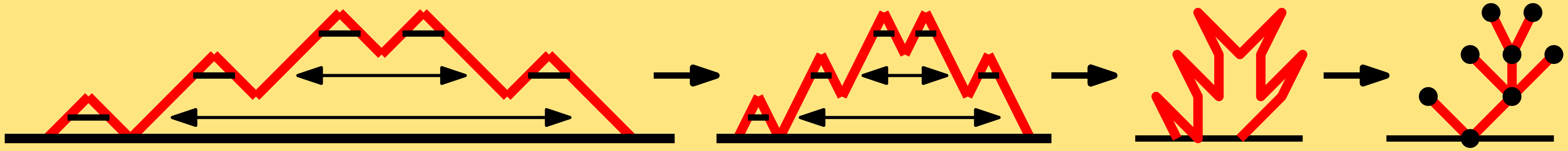
Chemin de Dyck de longueur $2n$ = contour d'un arbre plan à n arêtes.



Chemins de Dyck et arbres plans

Chemin de Dyck de longueur $2n$ = contour d'un arbre plan à n arêtes.

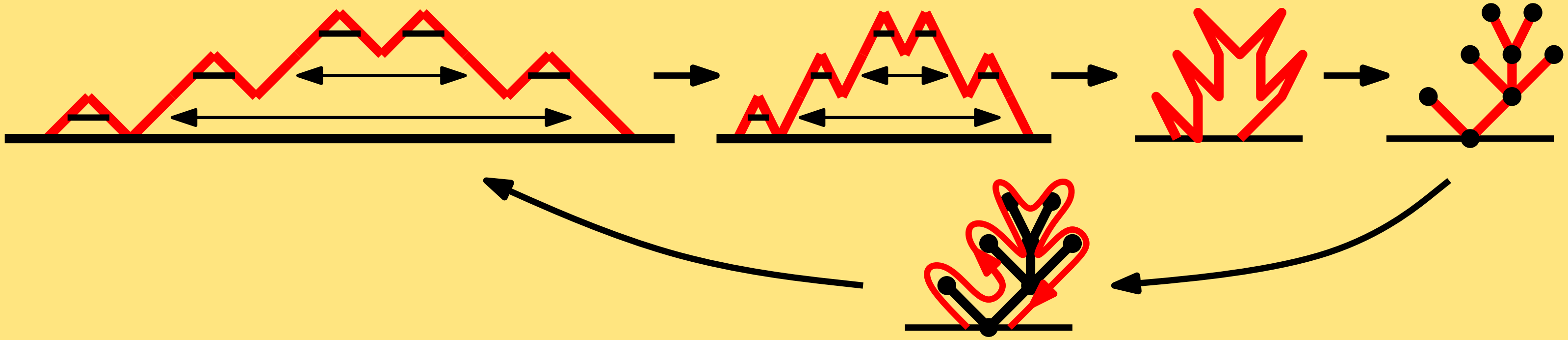
(arbres enracinés, plongés dans le plan)

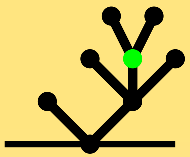


Chemins de Dyck et arbres plans

Chemin de Dyck de longueur $2n$ = contour d'un arbre plan à n arêtes.

(arbres enracinés, plongés dans le plan)

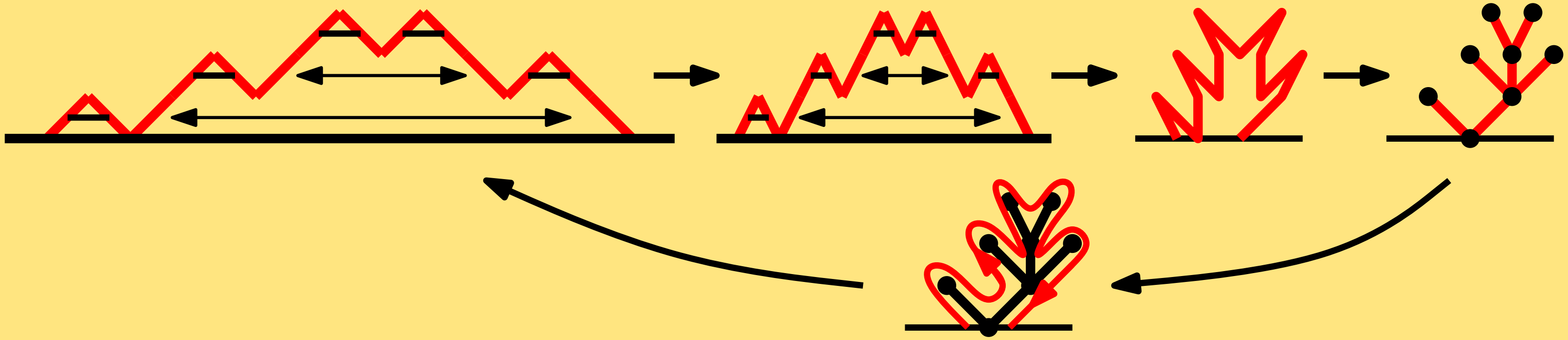




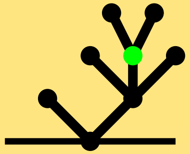
Chemins de Dyck et arbres plans

Chemin de Dyck de longueur $2n$ = contour d'un arbre plan à n arêtes.

(arbres enracinés, plongés dans le plan)



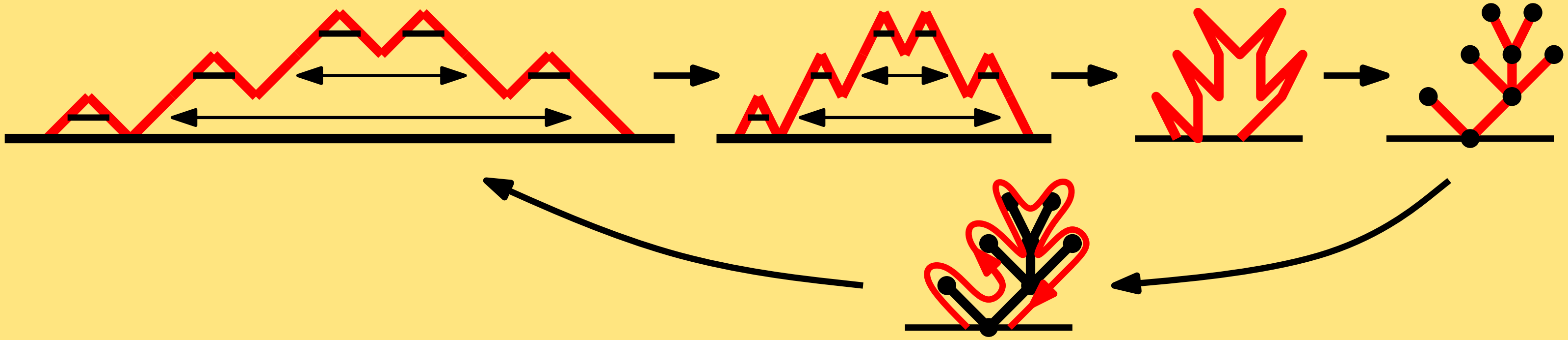
Marquons un des $n+1$ sommets de l'arbre.



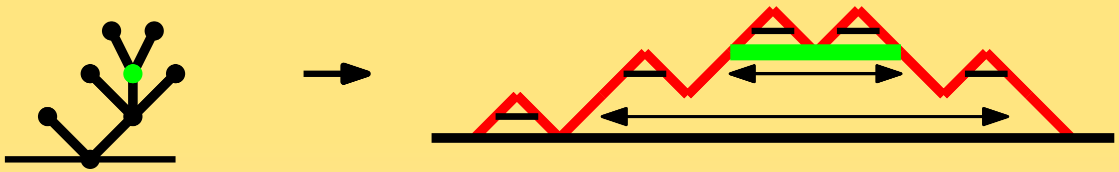
Chemins de Dyck et arbres plans

Chemin de Dyck de longueur $2n$ = contour d'un arbre plan à n arêtes.

(arbres enracinés, plongés dans le plan)



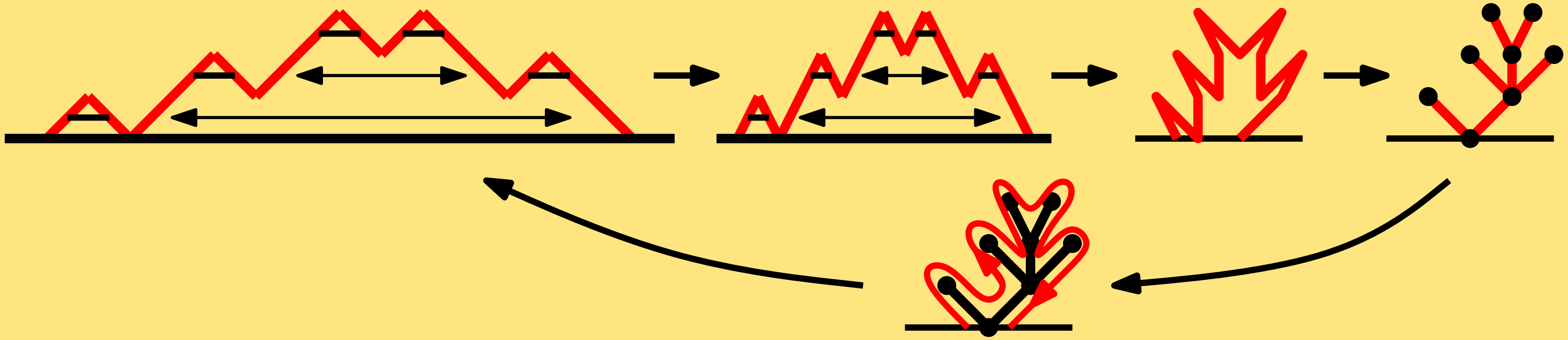
Marquons un des $n+1$ sommets de l'arbre.



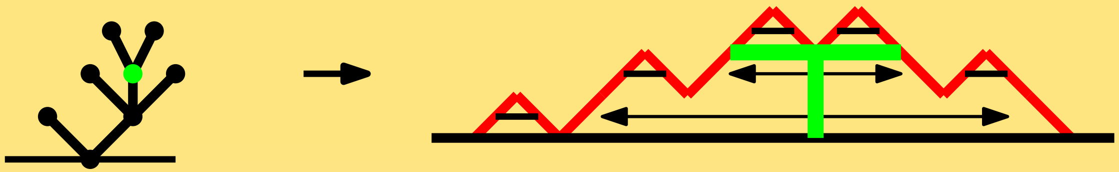
Chemins de Dyck et arbres plans

Chemin de Dyck de longueur $2n =$ contour d'un arbre plan à n arêtes.

(arbres enracinés, plongés dans le plan)



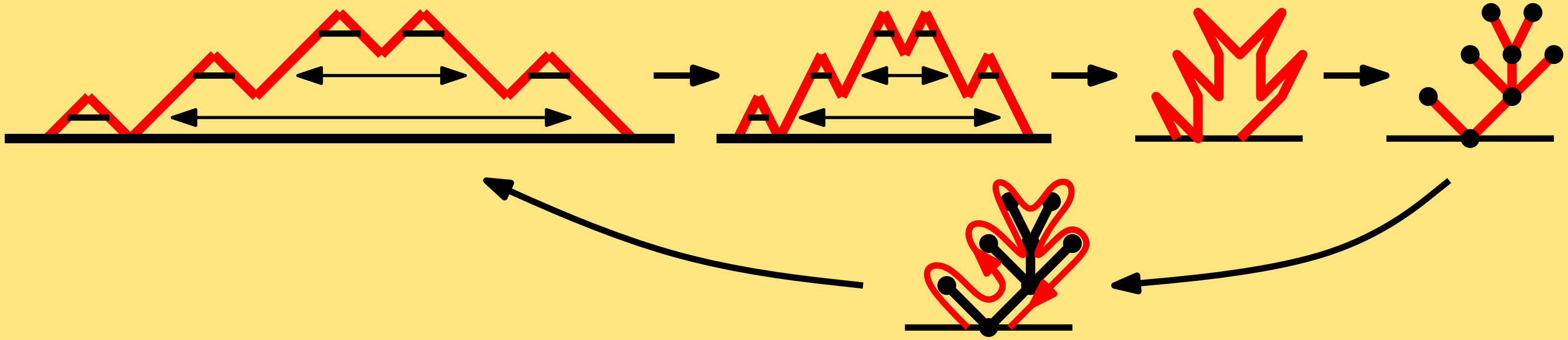
Marquons un des $n + 1$ sommets de l'arbre.



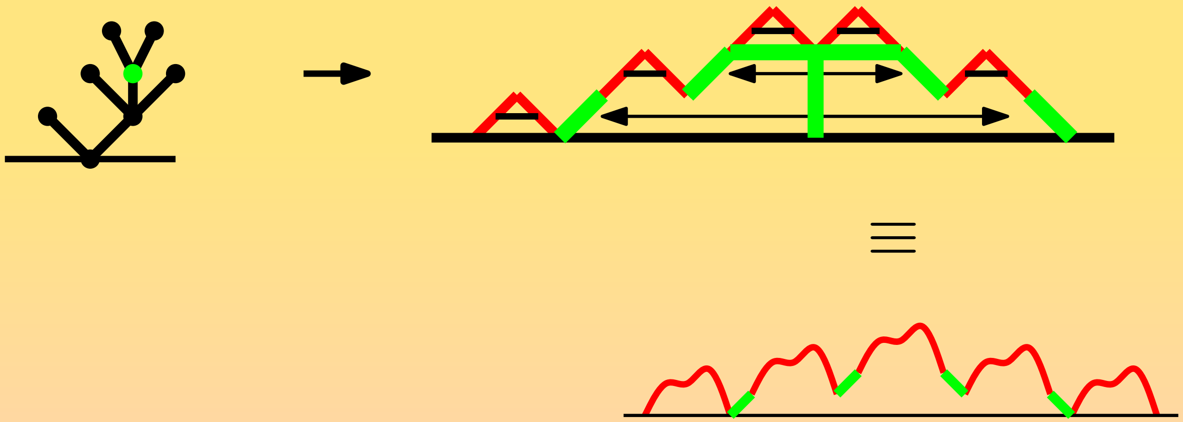
Chemins de Dyck et arbres plans

Chemin de Dyck de longueur $2n$ = contour d'un arbre plan à n arêtes.

(arbres enracinés, plongés dans le plan)



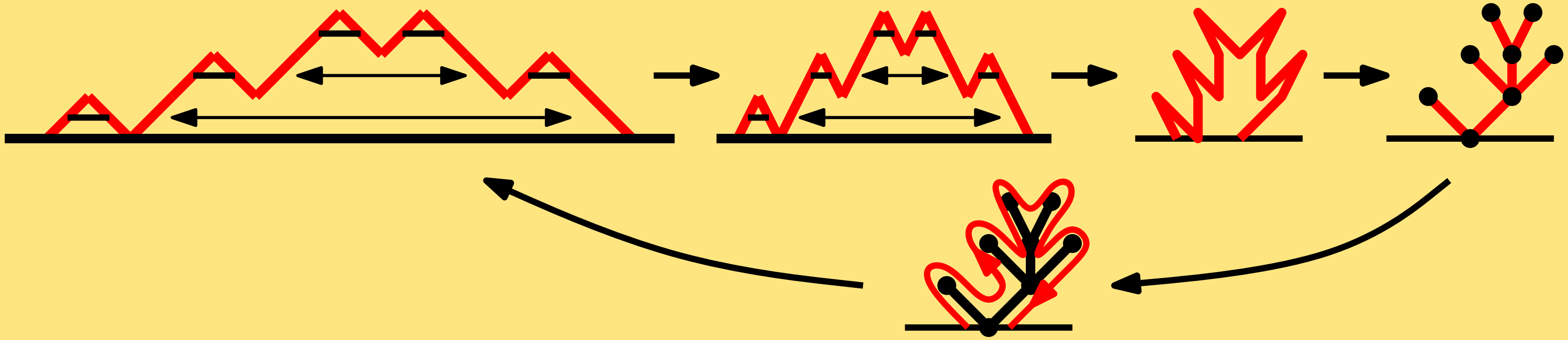
Marquons un des $n+1$ sommets de l'arbre.



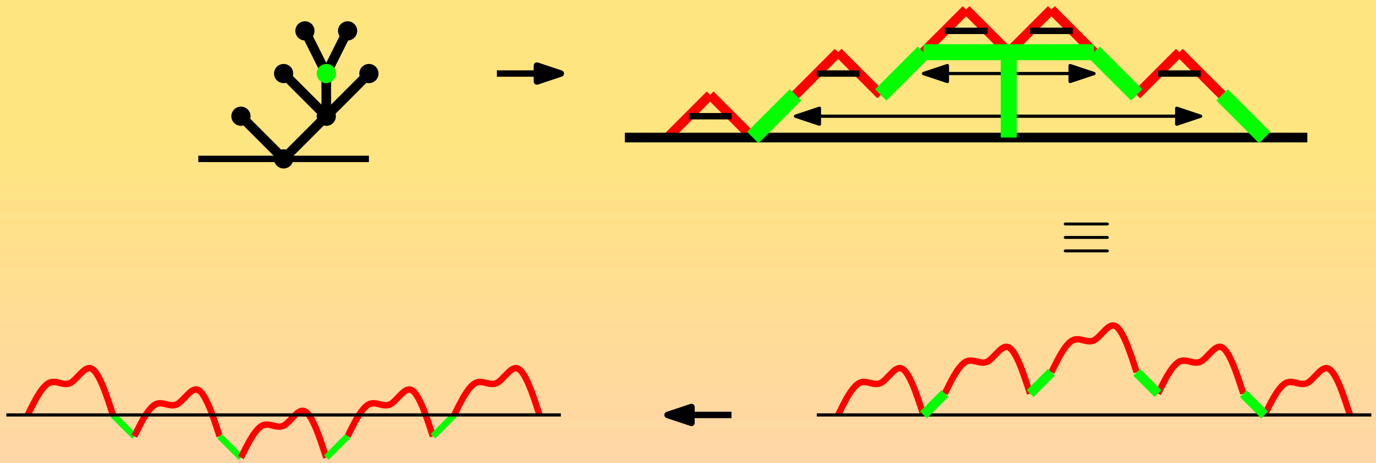
Chemins de Dyck et arbres plans

Chemin de Dyck de longueur $2n$ = contour d'un arbre plan à n arêtes.

(arbres enracinés, plongés dans le plan)



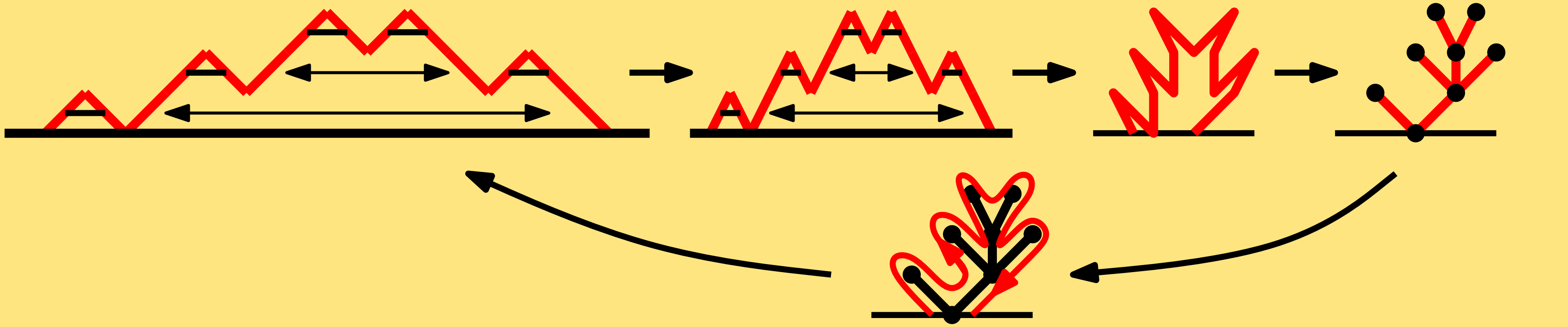
Marquons un des $n+1$ sommets de l'arbre.



Chemins de Dyck et arbres plans

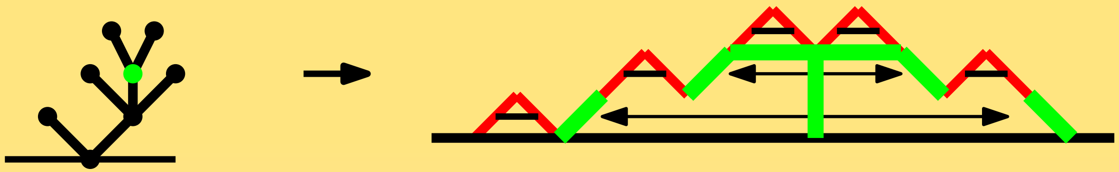
Chemin de Dyck de longueur $2n =$ contour d'un arbre plan à n arêtes.

(arbres enracinés, plongés dans le plan)



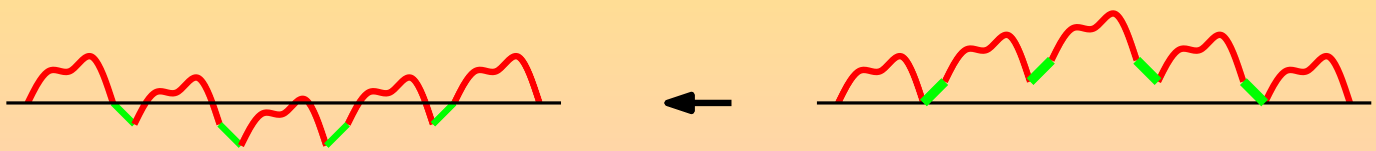
Marquons un des $n+1$ sommets de l'arbre.

$(n+1)A(n) =$



$\equiv$

$\binom{2n}{n} =$



$$A(n) = D(2n) = \frac{1}{n+1}\binom{2n}{n}$$

D'autres codages classiques

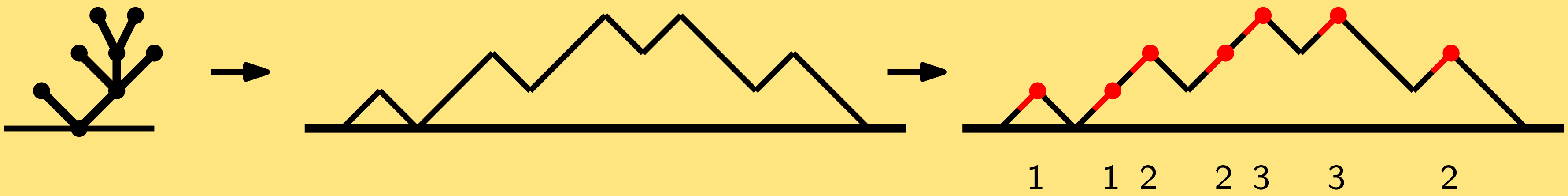
Le mot de Dyck s'obtient au cours du contour de l'arbre:

– coder la première visite d'un sommet par u

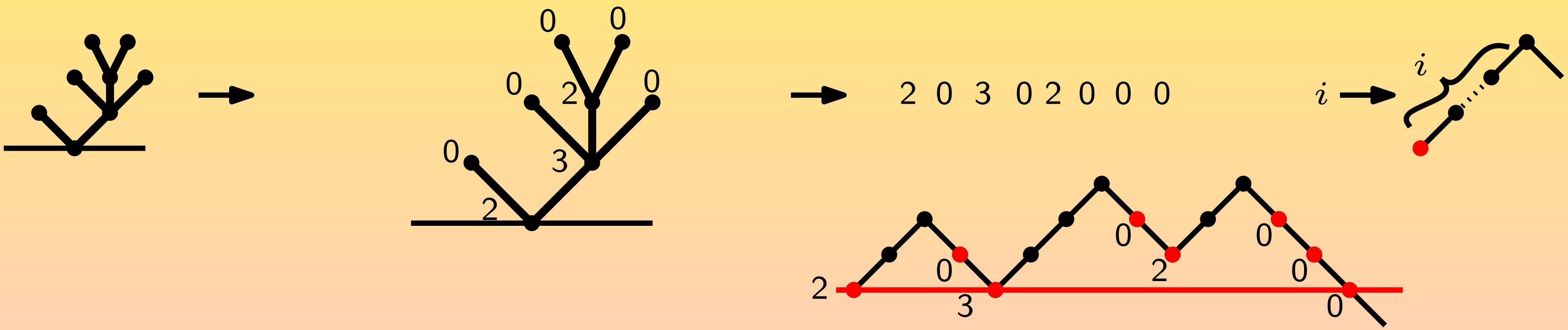
– coder la dernière visite d'un sommet par d

Autres codes possibles:

– code des hauteurs: 1ère visite codée par la hauteur du sommet



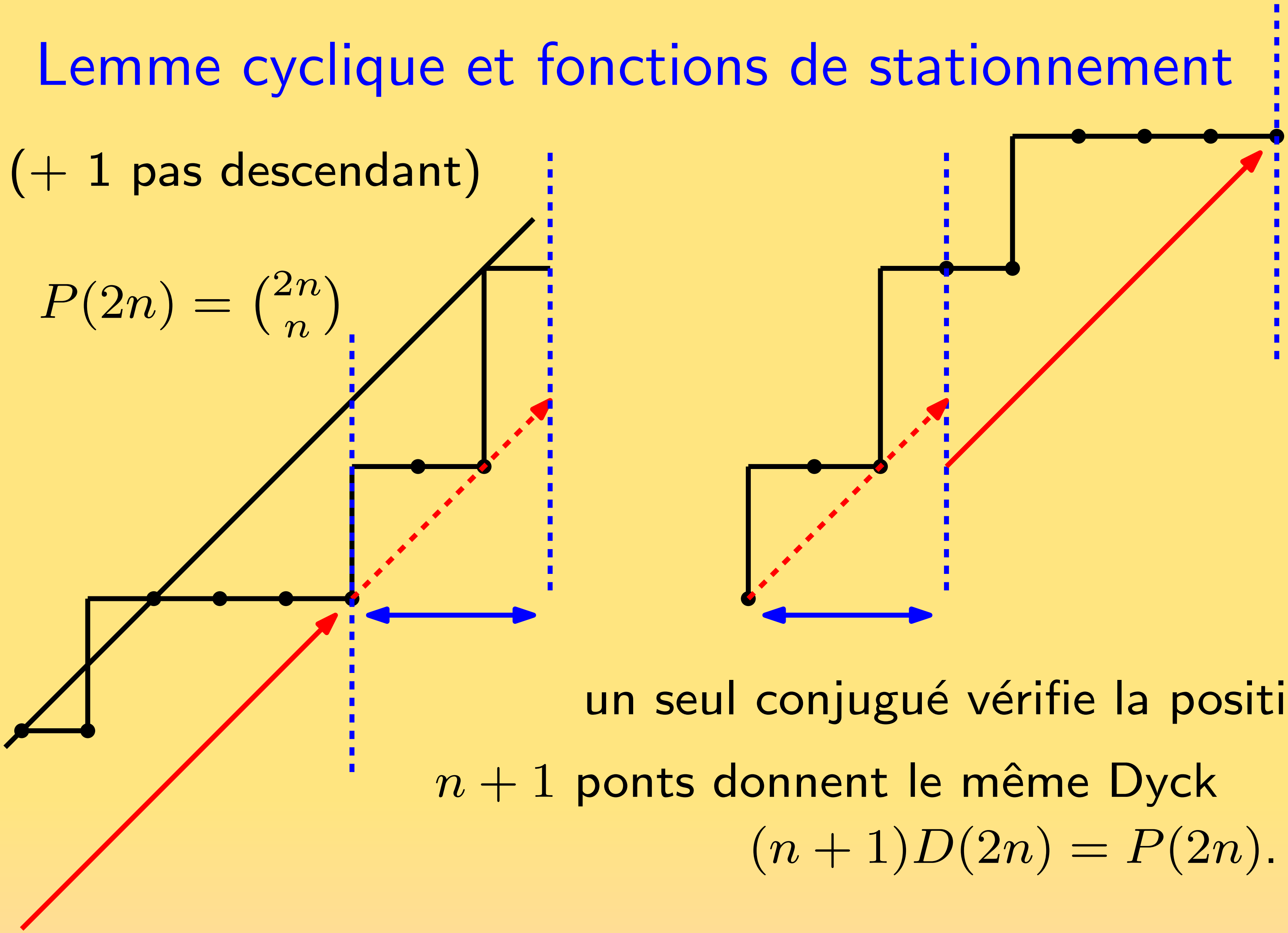
– code des degrés: 1ère visite codée par le degré du sommet



Lemme cyclique et fonctions de stationnement

pont (+ 1 pas descendant)

$P(2n) = \binom{2n}{n}$



un seul conjugué vérifie la positivité (Dyck)

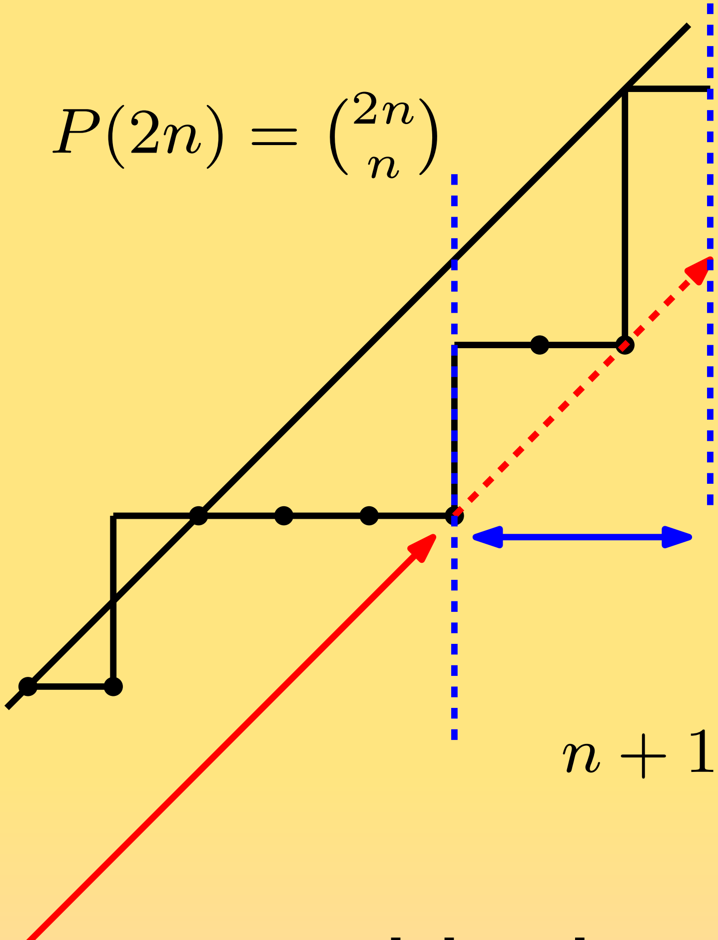
$n + 1$ ponts donnent le même Dyck

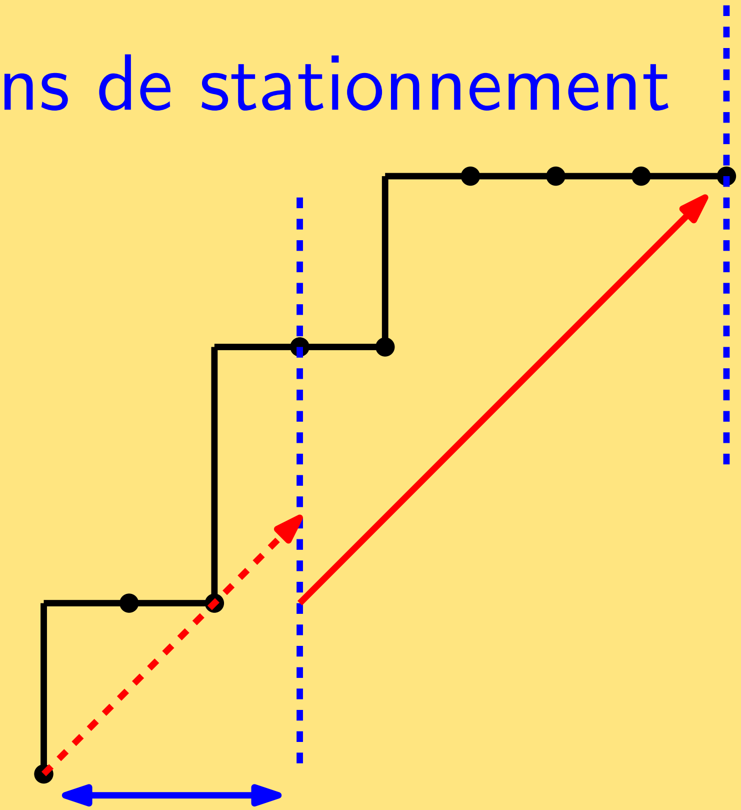
$$(n+1)D(2n) = P(2n).$$

Lemme cyclique et fonctions de stationnement

pont (+ 1 pas descendant)

$$P(2n) = \binom{2n}{n}$$





un seul conjugué vérifie la positivité (Dyck)

$n+1$ ponts donnent le même Dyck

$$(n+1)D(2n) = P(2n).$$

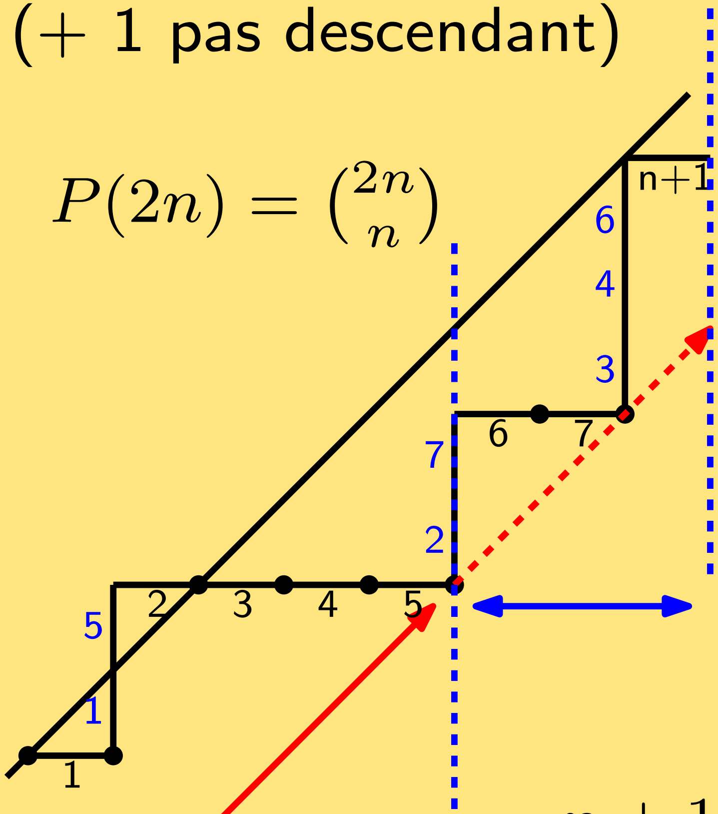
une fonction de $[n] \to [n+1]$

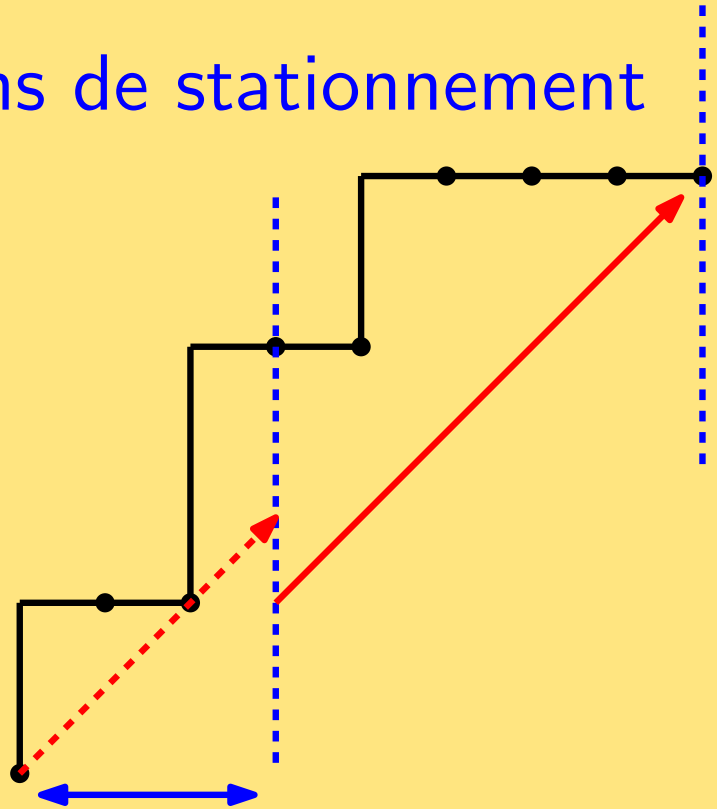
1	2	3	4	5	6	7
2	6	8	8	2	8	6

Lemme cyclique et fonctions de stationnement

pont (+ 1 pas descendant)

$$P(2n) = \binom{2n}{n}$$





un seul conjugué vérifie la positivité (Dyck)

$n+1$ ponts donnent le même Dyck

$$(n+1)D(2n) = P(2n).$$

une fonction de $[n] \to [n+1]$ représentation en chemin

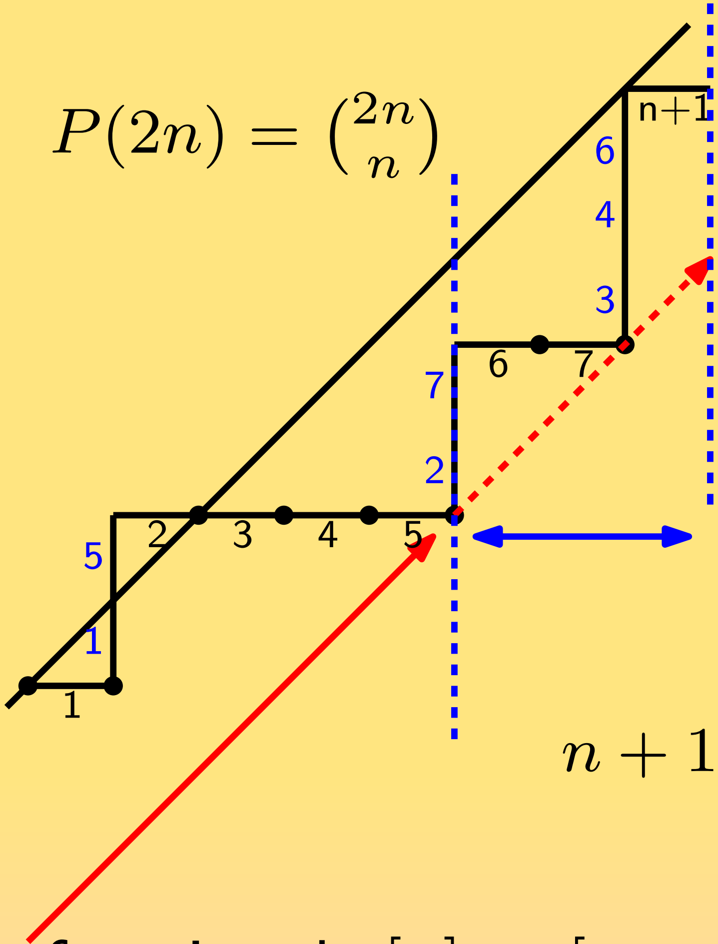
1	2	3	4	5	6	7
2	6	8	8	2	8	6

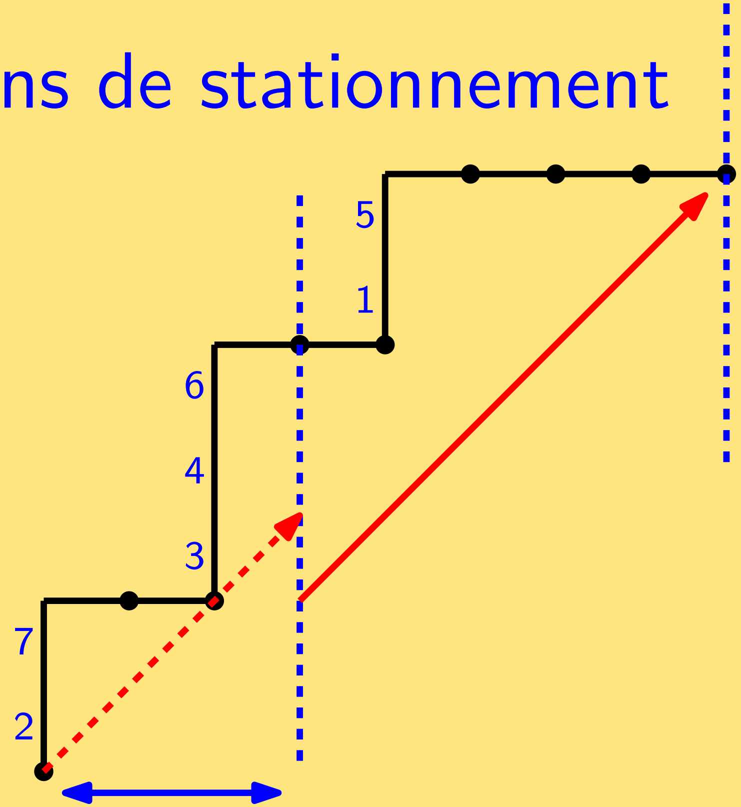
shift = ajouter 1 (mod $n+1$) aux images

Lemme cyclique et fonctions de stationnement

pont (+ 1 pas descendant)

$$P(2n) = \binom{2n}{n}$$





un seul conjugué vérifie la positivité (Dyck)

$n+1$ ponts donnent le même Dyck

$$(n+1)D(2n) = P(2n).$$

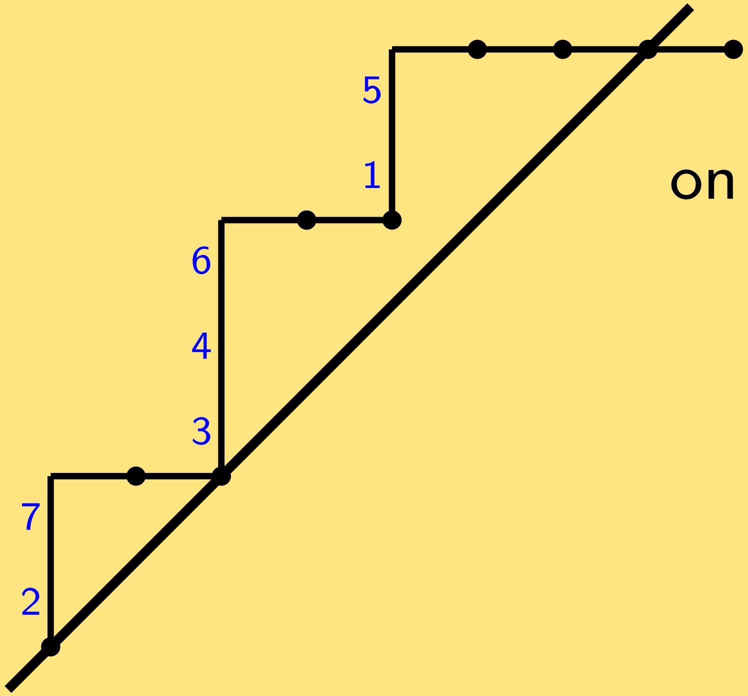
une fonction de $[n] \to [n+1]$ représentation en chemin

1	2	3	4	5	6	7
2	6	8	8	2	8	6

shift = ajouter $1 \pmod{n+1}$ aux images

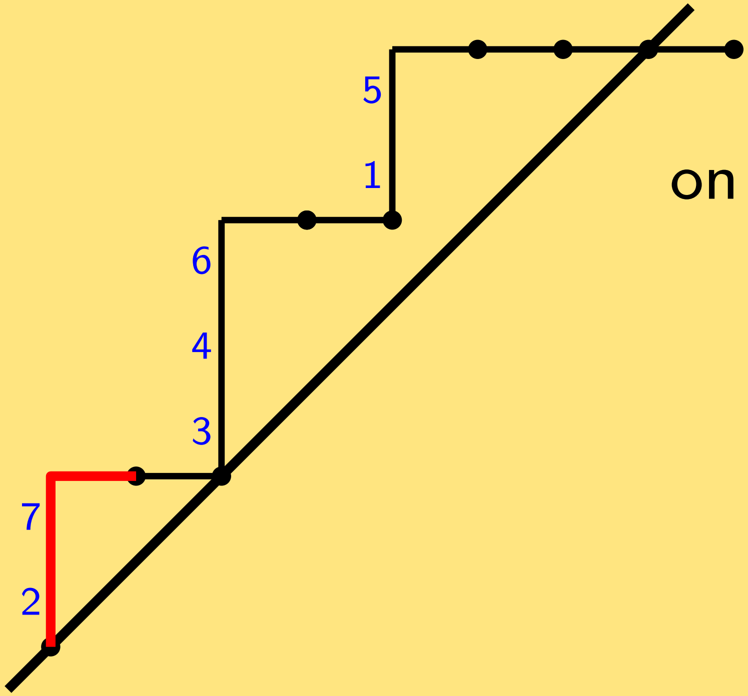
une fonction est de stationnement si le chemin est de Dyck $\Rightarrow \frac{1}{n+1}(n+1)^n$

fonctions de stationnement et code d'arbres

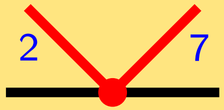


on considère ce mot comme un code des degrés

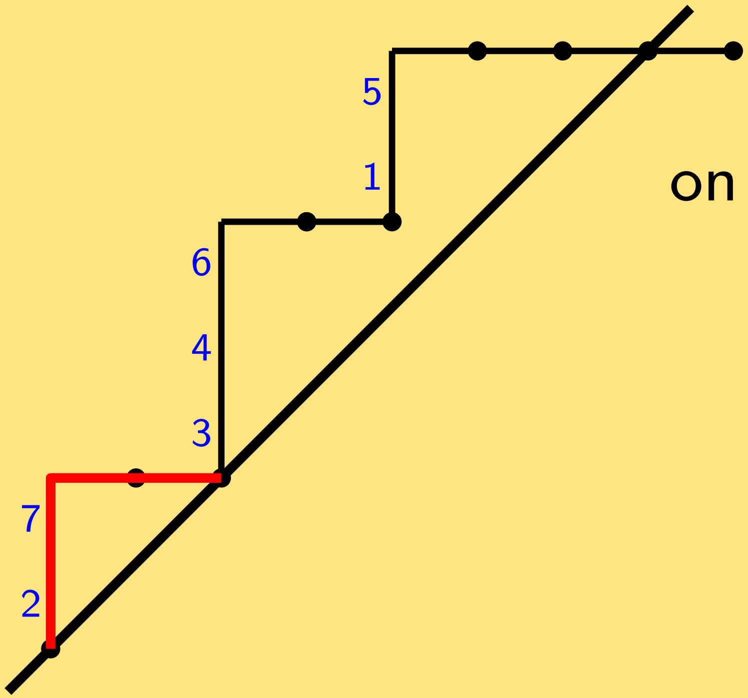
fonctions de stationnement et code d'arbres



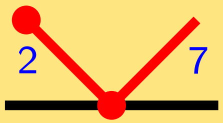
on considère ce mot comme un code des degrés



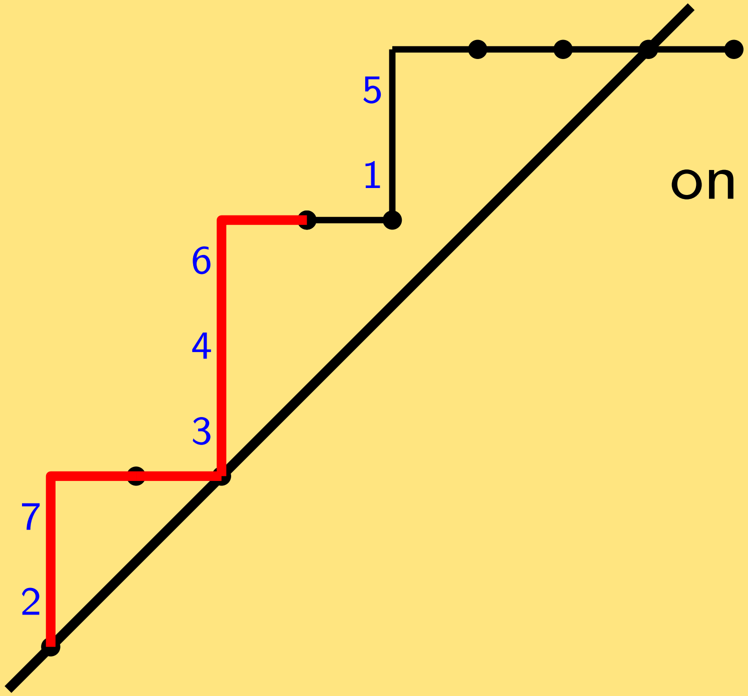
fonctions de stationnement et code d'arbres



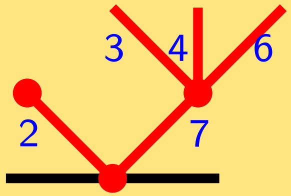
on considère ce mot comme un code des degrés



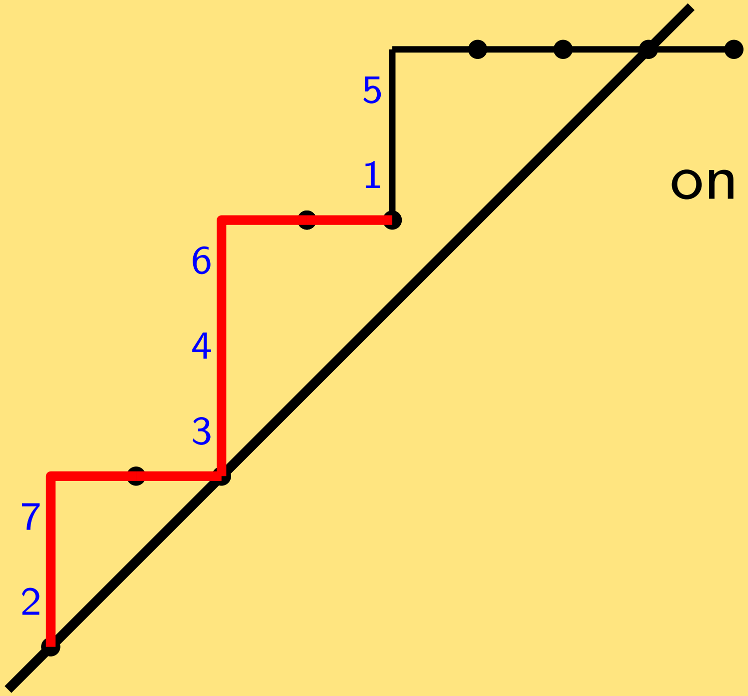
fonctions de stationnement et code d'arbres



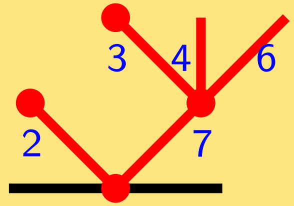
on considère ce mot comme un code des degrés



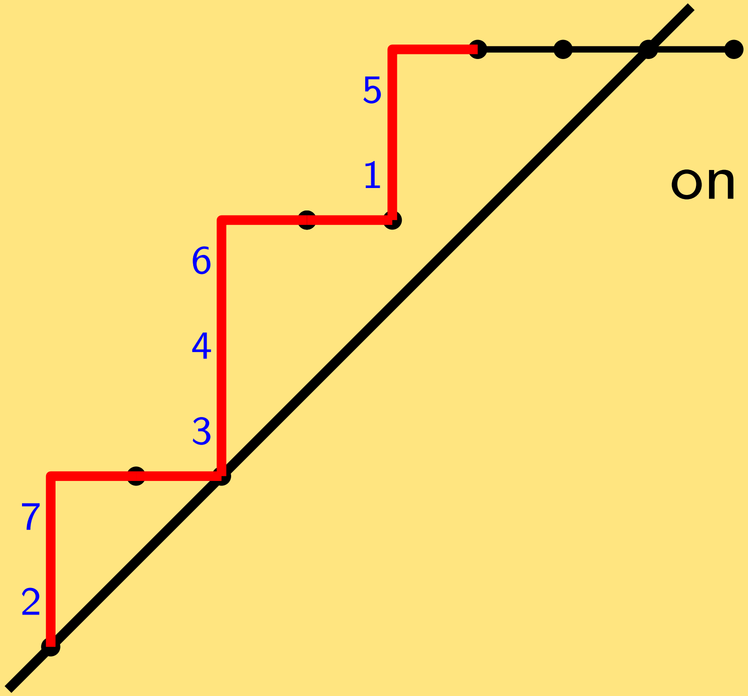
fonctions de stationnement et code d'arbres



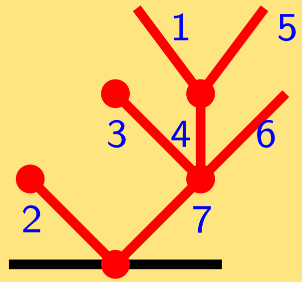
on considère ce mot comme un code des degrés



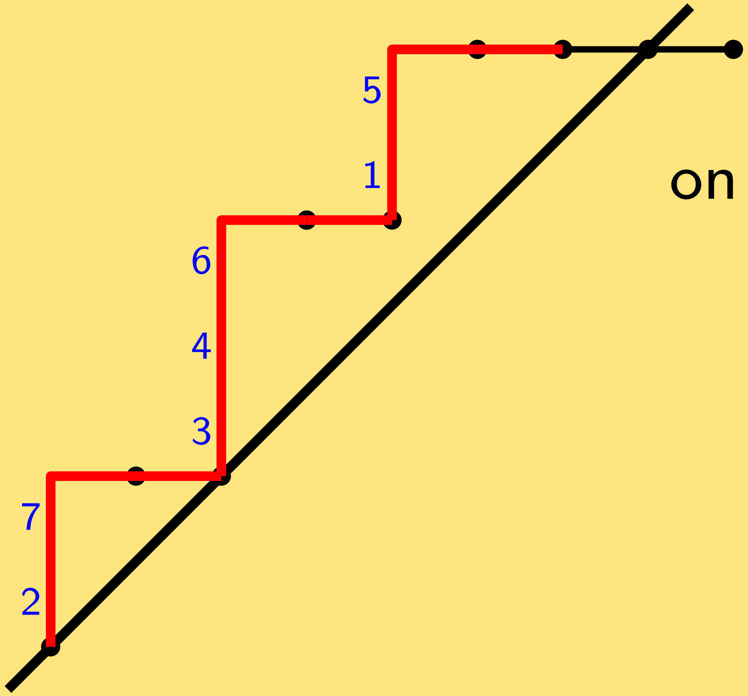
fonctions de stationnement et code d'arbres



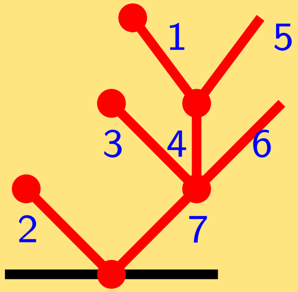
on considère ce mot comme un code des degrés



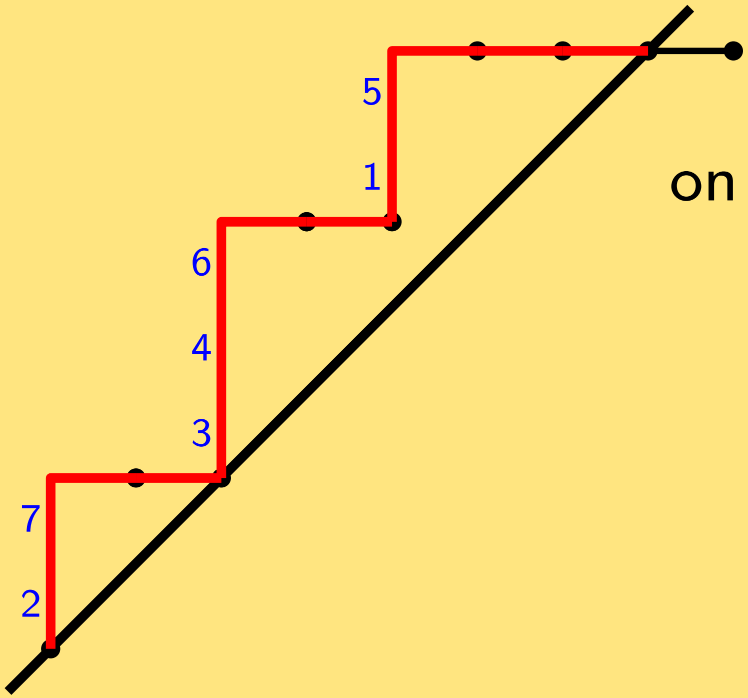
fonctions de stationnement et code d'arbres



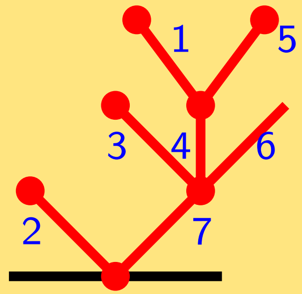
on considère ce mot comme un code des degrés



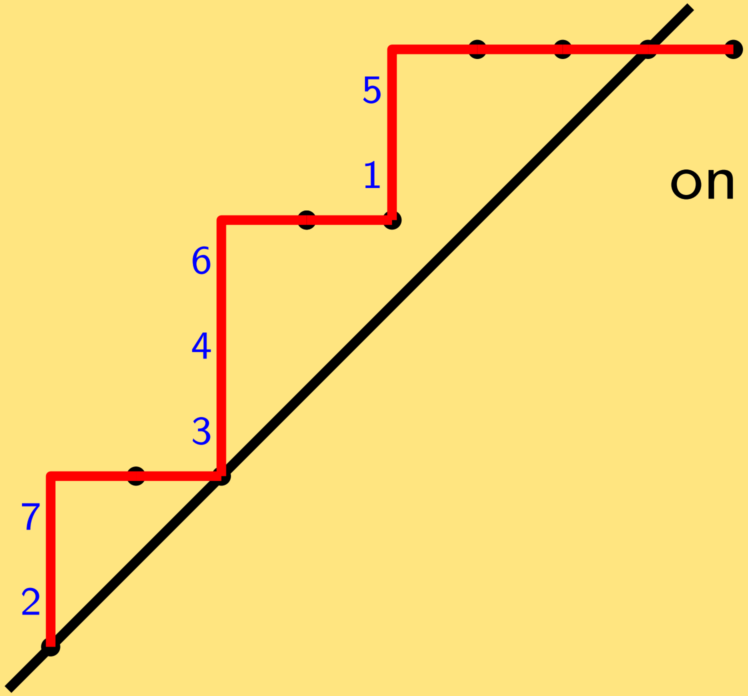
fonctions de stationnement et code d'arbres



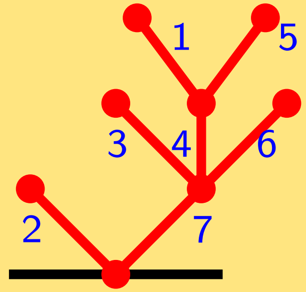
on considère ce mot comme un code des degrés



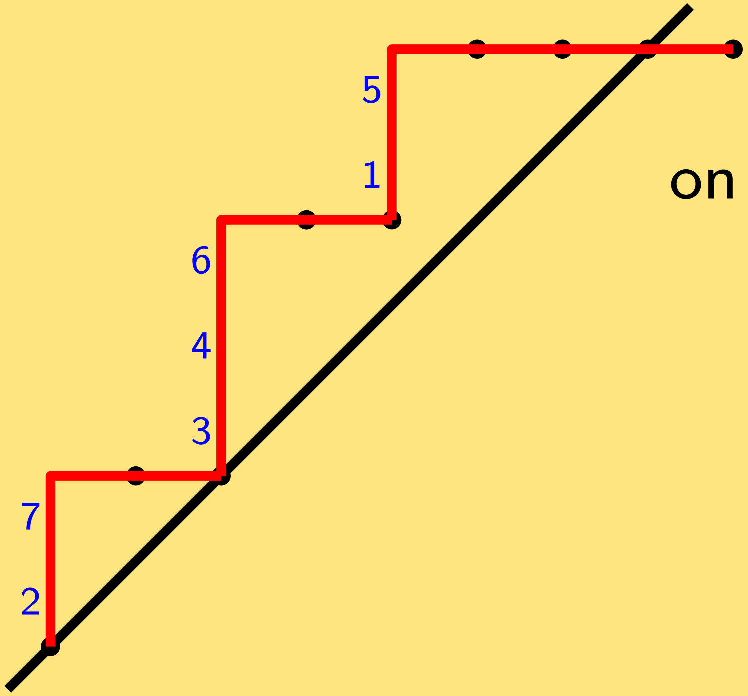
fonctions de stationnement et code d'arbres



on considère ce mot comme un code des degrés

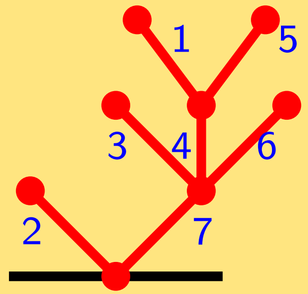


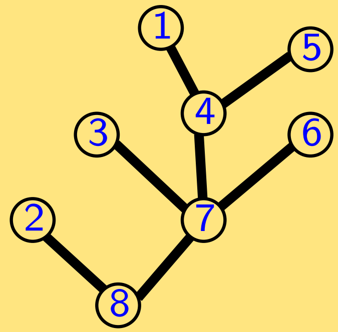
fonctions de stationnement et code d'arbres



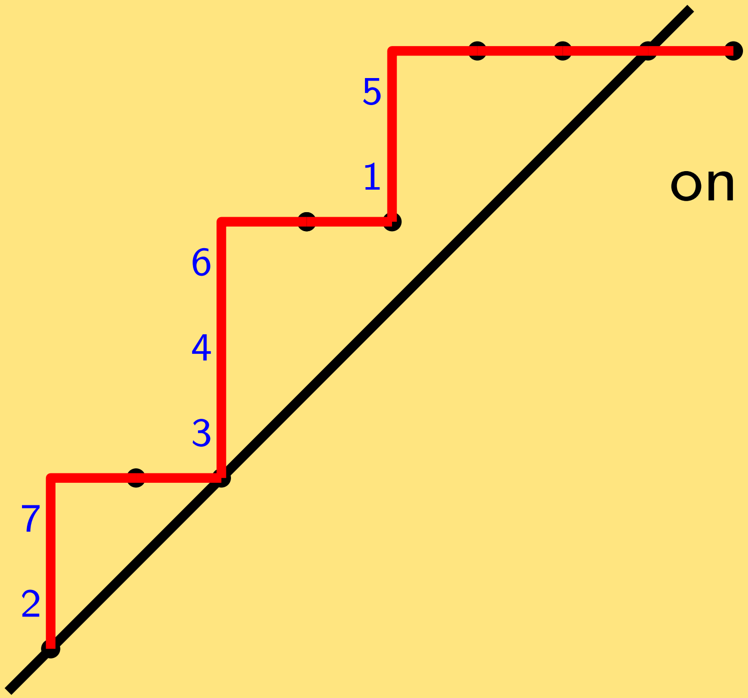
on considère ce mot comme un code des degrés

étiquetage des sommets (racine $n+1$)



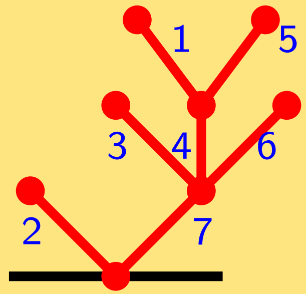


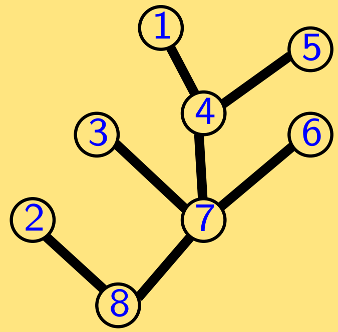
fonctions de stationnement et code d'arbres



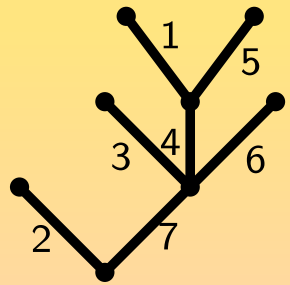
on considère ce mot comme un code des degrés

étiquetage des sommets (racine $n+1$)

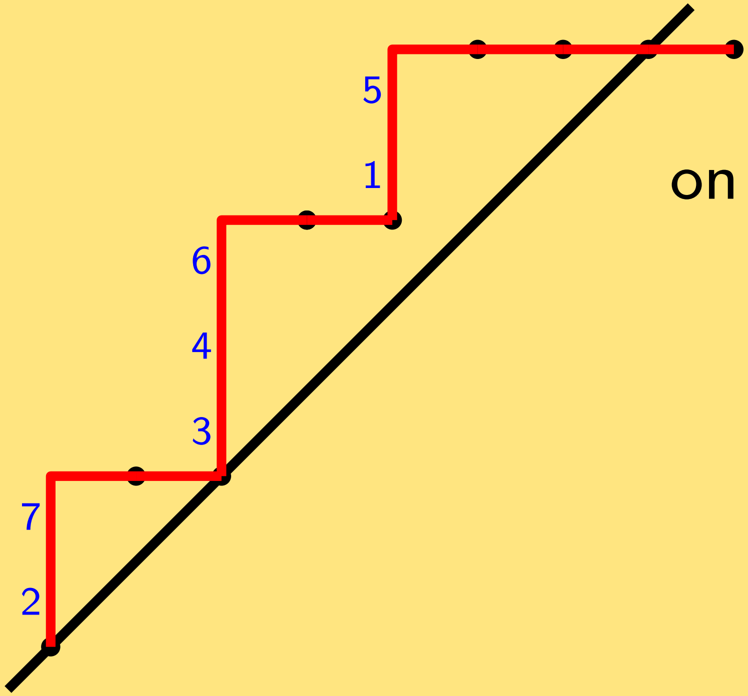




$(n+1)^{n-1}$ arbres de Cayley à $n+1$ sommets étiquetés

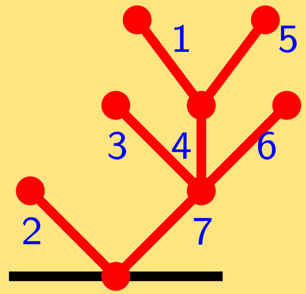


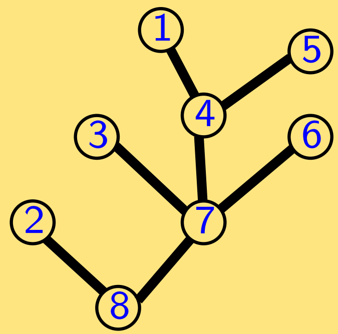
fonctions de stationnement et code d'arbres



on considère ce mot comme un code des degrés

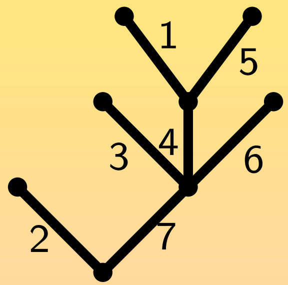
étiquetage des sommets (racine $n+1$)



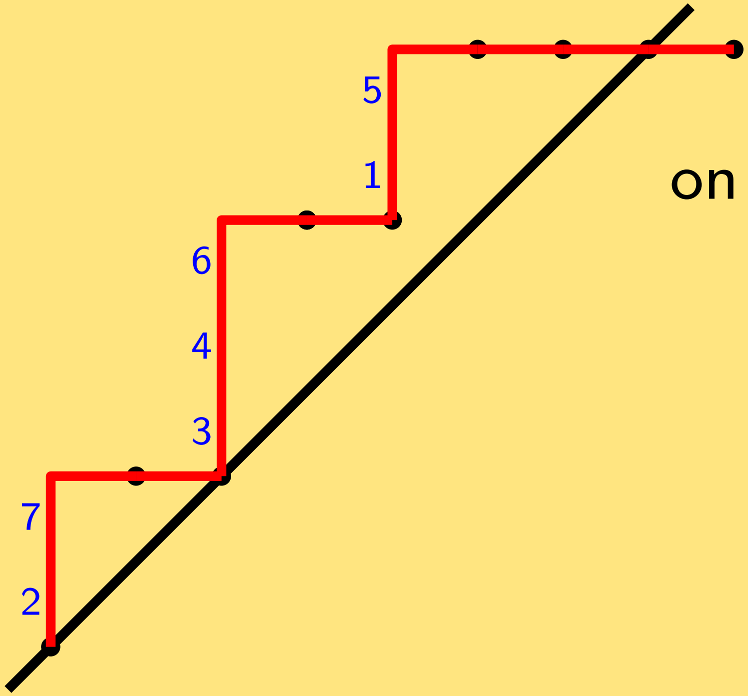


$(n+1)^{n-1}$ arbres de Cayley à $n+1$ sommets étiquetés

étiquetage des arêtes

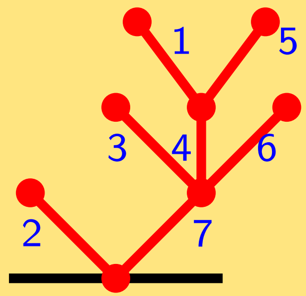


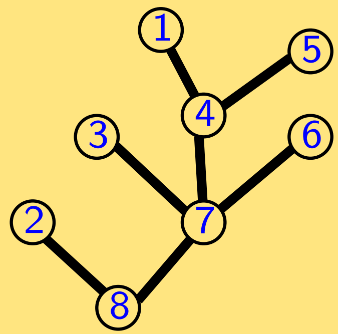
fonctions de stationnement et code d'arbres



on considère ce mot comme un code des degrés

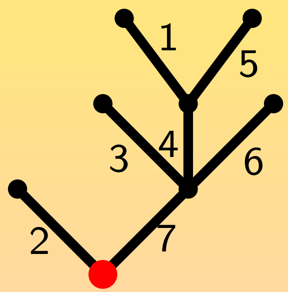
étiquetage des sommets (racine $n+1$)





$(n+1)^{n-1}$ arbres de Cayley à $n+1$ sommets étiquetés

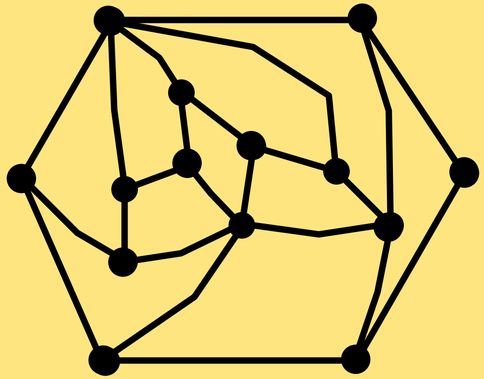
étiquetage des arêtes



$(n+1)^{n-1}$ arbres de Cayley enracinés à n arêtes étiquetées

Cartes et arbres

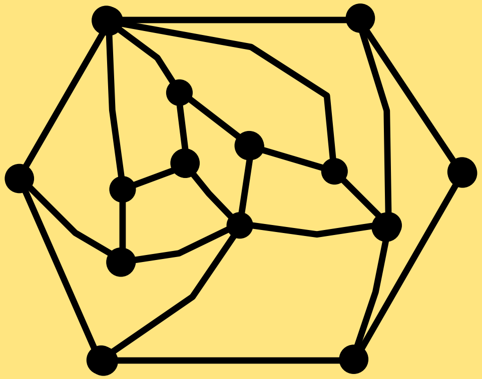
Cartes planaires



plongement propre d'un graphe connexe dans le plan

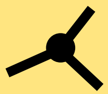
à déformation continue près du plan

Cartes planaires

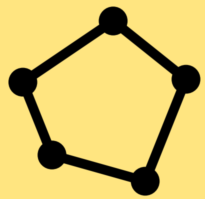


plongement propre d'un graphe connexe dans le plan

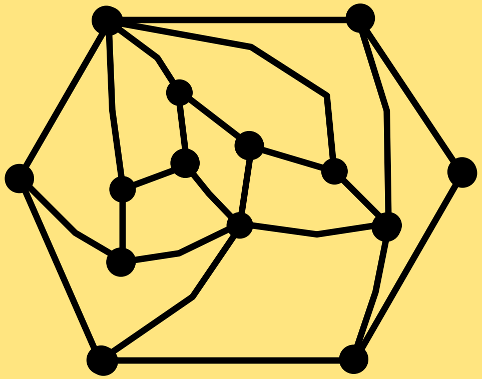
à déformation continue près du plan

sommets  s

arêtes  a

faces  f

Cartes planaires

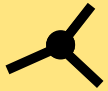


plongement propre d'un graphe connexe dans le plan

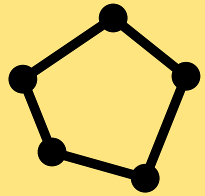
à déformation continue près du plan

$$s + f = a + 2$$

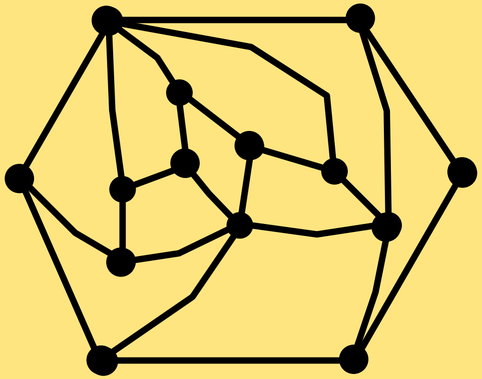
(Euler)

sommets  s

arêtes  a

faces  f

Cartes planaires

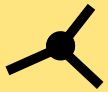


plongement propre d'un graphe connexe dans le plan

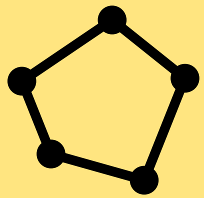
à déformation continue près du plan

$$s + f = a + 2$$

(Euler)

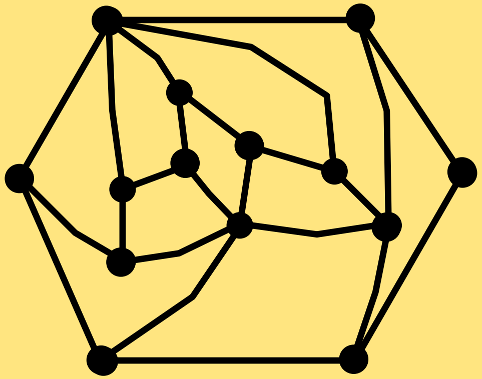
sommets  s

arêtes  a

faces  f

degré $=$ nb de "coins"

Cartes planaires



plongement propre d'un graphe connexe dans le plan

à déformation continue près du plan

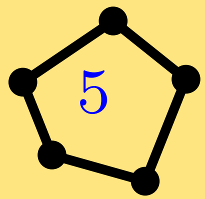
$$s + f = a + 2$$

(Euler)

sommets 

s

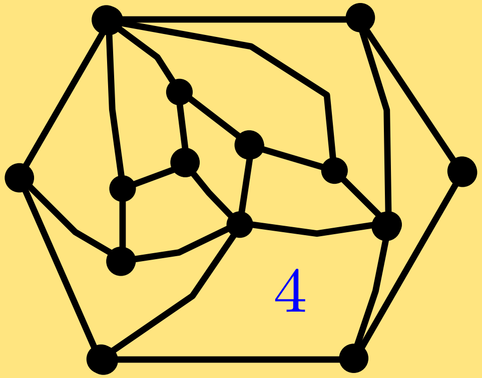
arêtes  a

faces 

f

degré = nb de "coins"

Cartes planaires



plongement propre d'un graphe connexe dans le plan

à déformation continue près du plan

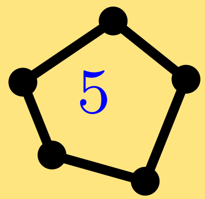
$$s + f = a + 2$$

(Euler)

sommets 

s

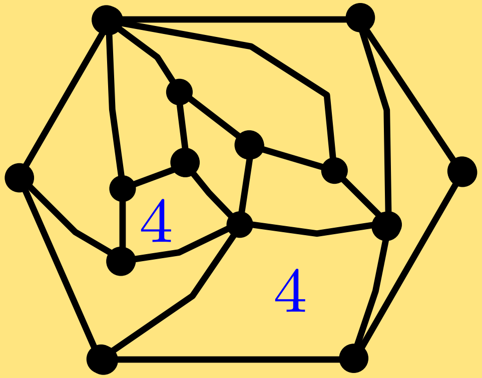
arêtes  a

faces 

f

degré = nb de "coins"

Cartes planaires



plongement propre d'un graphe connexe dans le plan

à déformation continue près du plan

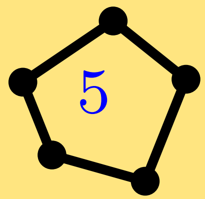
$$s + f = a + 2$$

(Euler)

sommets 

s

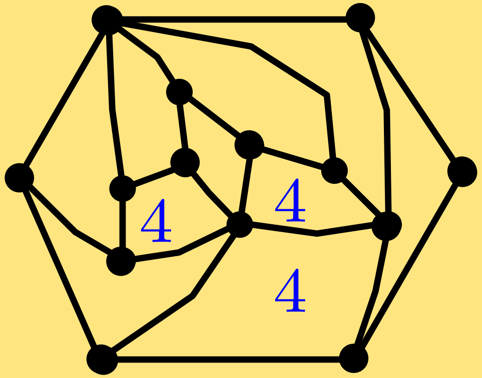
arêtes  a

faces 

f

degré = nb de "coins"

Cartes planaires



plongement propre d'un graphe connexe dans le plan

à déformation continue près du plan

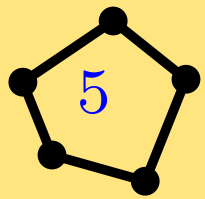
$$s + f = a + 2$$

(Euler)

sommets 

 s

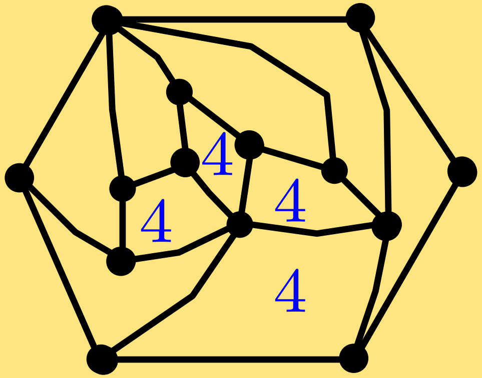
arêtes  a

faces 

 f

degré = nb de "coins"

Cartes planaires



plongement propre d'un graphe connexe dans le plan

à déformation continue près du plan

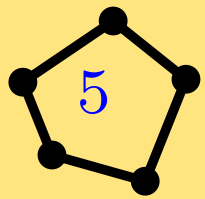
$$s + f = a + 2$$

(Euler)

sommets 

s

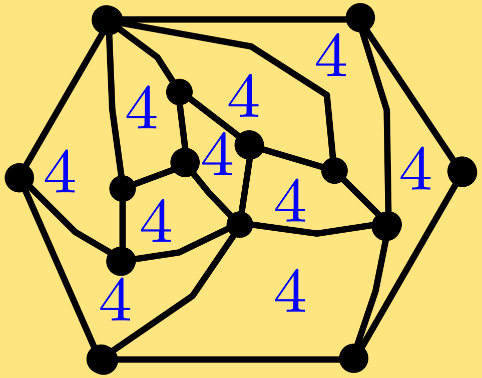
arêtes  a

faces 

f

degré = nb de "coins"

Cartes planaires



plongement propre d'un graphe connexe dans le plan

à déformation continue près du plan

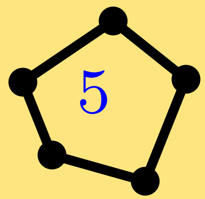
$$s+f=a+2$$

(Euler)

sommets 

s

arêtes  a

faces 

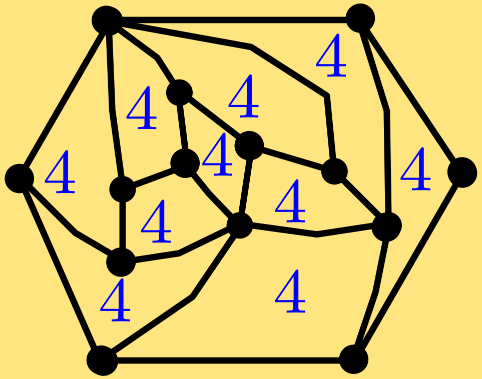
f

degré = nb de "coins"

Cartes planaires

plongement propre d'un graphe connexe dans le plan

à déformation continue près du plan



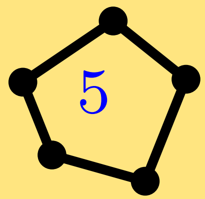
quadrangulation
d'un hexagone

$$s + f = a + 2$$

(Euler)

sommets  s

arêtes a

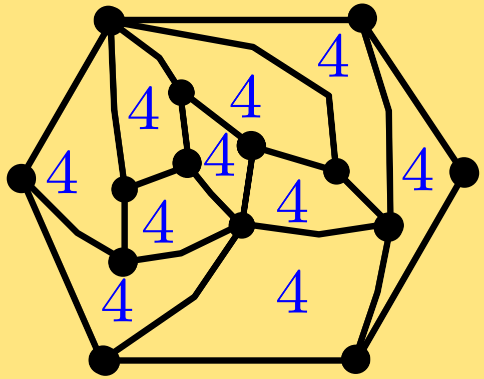
faces  f

degré = nb de "coins"

Cartes planaires

plongement propre d'un graphe connexe dans le plan

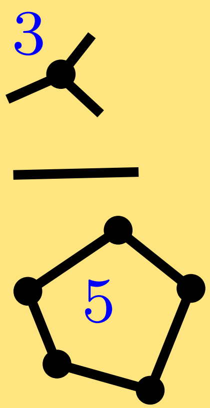
à déformation continue près du plan



quadrangulation
d'un hexagone

$$s + f = a + 2$$

(Euler)



sommets s

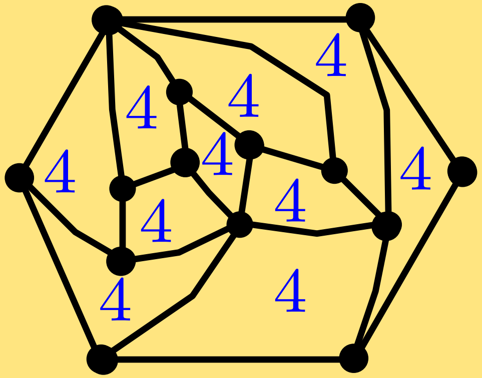
arêtes a

faces f

degré = nb de "coins"

Pourquoi s'intéresser à ces objets ?

Cartes planaires



quadrangulation
d'un hexagone

plongement propre d'un graphe connexe dans le plan

à déformation continue près du plan

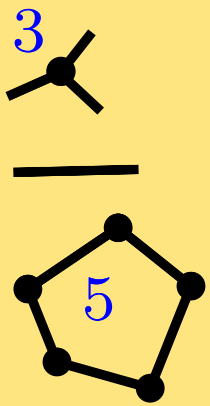
$$s + f = a + 2$$

(Euler)

sommets — s

arêtes — a

faces — f



degré $=$ nb de "coins"

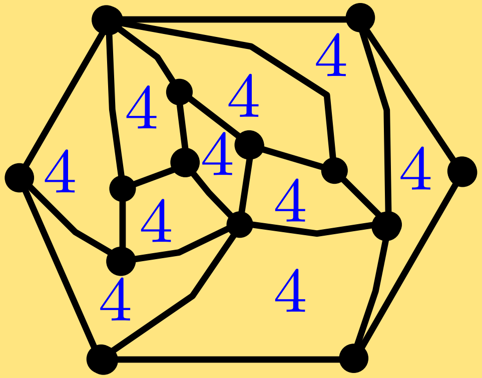
Pourquoi s'intéresser à ces objets ?

Parce qu'il y a presque autant de jolies formules pour les cartes que de jolies formules pour les arbres...

Cartes planaires

plongement propre d'un graphe connexe dans le plan

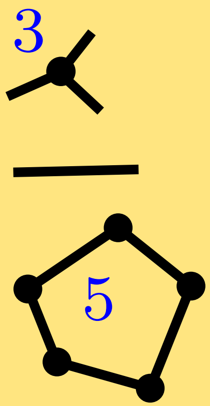
à déformation continue près du plan



quadrangulation
d'un hexagone

$$s + f = a + 2$$

(Euler)



sommets s

arêtes a

faces f

degré $=$ nb de "coins"

Pourquoi s'intéresser à ces objets ?

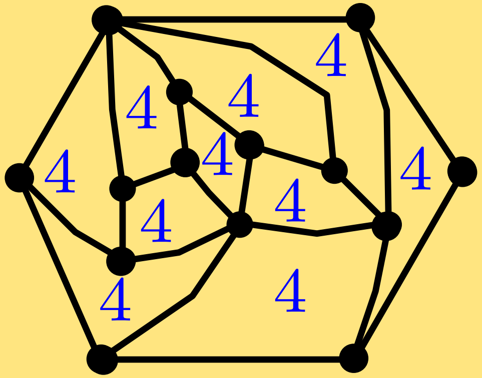
Parce qu'il y a presque autant de jolies formules pour les cartes
que de jolies formules pour les arbres...

$$\begin{matrix}\text{cartes} \\ n \text{ arêtes}\end{matrix} = \frac{2}{n+2}\frac{3^n}{n+1}\binom{2n}{n}$$

Cartes planaires

plongement propre d'un graphe connexe dans le plan

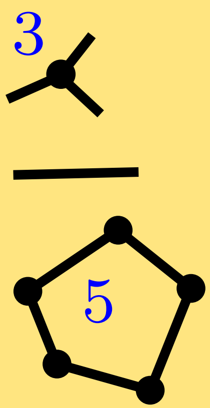
à déformation continue près du plan



quadrangulation
d'un hexagone

$$s + f = a + 2$$

(Euler)



sommets	s
arêtes	a
faces	f

degré $=$ nb de "coins"

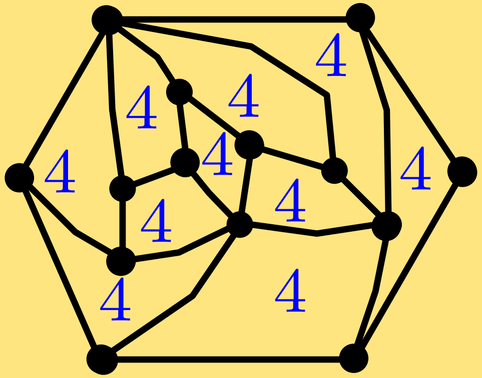
Pourquoi s'intéresser à ces objets ?

Parce qu'il y a presque autant de jolies formules pour les cartes que de jolies formules pour les arbres...

cartes
n arêtes $= \frac{2}{n+2} \frac{3^n}{n+1} \binom{2n}{n}$

quadrangulations*
d'un hexagone $= \frac{6}{n+2} \frac{1}{n+1} \binom{2n}{n}$

Cartes planaires



quadrangulation
d'un hexagone

plongement propre d'un graphe connexe dans le plan

à déformation continue près du plan

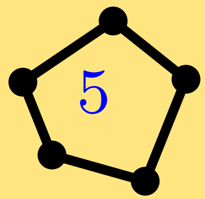
$s + f = a + 2$

(Euler)

sommets 

s

arêtes  a

faces 

f

degré $=$ nb de "coins"

Pourquoi s'intéresser à ces objets ?

Parce qu'il y a presque autant de jolies formules pour les cartes que de jolies formules pour les arbres...

cartes n arêtes $= \frac{2}{n+2}\frac{3^n}{n+1}\binom{2n}{n}$

quadrangulations* d'un hexagone $= \frac{6}{n+2}\frac{1}{n+1}\binom{2n}{n}$

Triangulations d'un triangle $= \frac{2}{(n+1)n}\binom{4n+1}{n-1} =$ intervalles de Tamari

Preuves et interprétations combinatoires ?

cartes
n arêtes $= \frac{2}{n+2}\frac{3^n}{n+1}\binom{2n}{n}$

quadrangulations*
d'un hexagone $= \frac{6}{n+2}\frac{1}{n+1}\binom{2n}{n}$

Triangulations
d'un triangle $= \frac{2}{(n+1)n}\binom{4n+1}{n-1} =$ intervalles de
Tamari

Preuves et interprétations combinatoires ?

cartes n arêtes $= \frac{2}{n+2}\frac{3^n}{n+1}\binom{2n}{n}$

quadrangulations* d'un hexagone $= \frac{6}{n+2}\frac{1}{n+1}\binom{2n}{n}$

Triangulations d'un triangle $= \frac{2}{(n+1)n}\binom{4n+1}{n-1} =$ intervalles de Tamari

Décompositions "simples" + calculs : Tutte et al (60s)

Preuves et interprétations combinatoires ?

cartes n arêtes $= \frac{2}{n+2}\frac{3^n}{n+1}\binom{2n}{n}$

quadrangulations* d'un hexagone $= \frac{6}{n+2}\frac{1}{n+1}\binom{2n}{n}$

Triangulations d'un triangle $= \frac{2}{(n+1)n}\binom{4n+1}{n-1} =$ intervalles de Tamari

Décompositions "simples" + calculs : Tutte et al (60s)

Intégrales de matrices + calculs : BIPZ et al (70s)

Preuves et interprétations combinatoires ?

cartes
n arêtes $= \frac{2}{n+2} \frac{3^n}{n+1} \binom{2n}{n}$

quadrangulations*
d'un hexagone $= \frac{6}{n+2} \frac{1}{n+1} \binom{2n}{n}$

Triangulations
d'un triangle $= \frac{2}{(n+1)n} \binom{4n+1}{n-1} =$ intervalles de
Tamari

Décompositions "simples" + calculs : Tutte et al (60s)

Intégrales de matrices + calculs : BIPZ et al (70s)

Bijections: Cori et al. (80's)

Preuves et interprétations combinatoires ?

cartes
n arêtes $= \frac{2}{n+2}\frac{3^n}{n+1}\binom{2n}{n}$

quadrangulations*
d'un hexagone $= \frac{6}{n+2}\frac{1}{n+1}\binom{2n}{n}$

Triangulations
d'un triangle $= \frac{2}{(n+1)n}\binom{4n+1}{n-1} =$ intervalles de
Tamari

Décompositions "simples" + calculs : Tutte et al (60s)

Intégrales de matrices + calculs : BIPZ et al (70s)

Bijections: Cori et al. (80's)

Idée générale en 3 étapes

Preuves et interprétations combinatoires ?

cartes n arêtes $= \frac{2}{n+2} \frac{3^n}{n+1} \binom{2n}{n}$

quadrangulations* d'un hexagone $= \frac{6}{n+2} \frac{1}{n+1} \binom{2n}{n}$

Triangulations d'un triangle $= \frac{2}{(n+1)n} \binom{4n+1}{n-1} =$ intervalles de Tamari

Décompositions "simples" + calculs : Tutte et al (60s)

Intégrales de matrices + calculs : BIPZ et al (70s)

Bijections: Cori et al. (80's)

Idée générale en 3 étapes

- une famille de carte = caractérisée par une famille d'orientations

Preuves et interprétations combinatoires ?

cartes n arêtes $= \frac{2}{n+2}\frac{3^n}{n+1}\binom{2n}{n}$

quadrangulations* d'un hexagone $= \frac{6}{n+2}\frac{1}{n+1}\binom{2n}{n}$

Triangulations d'un triangle $= \frac{2}{(n+1)n}\binom{4n+1}{n-1} =$ intervalles de Tamari

Décompositions "simples" + calculs : Tutte et al (60s)

Intégrales de matrices + calculs : BIPZ et al (70s)

Bijections: Cori et al. (80's)

Idée générale en 3 étapes

- une famille de carte = caractérisée par une famille d'orientations
- carte bien orientée = décomposition en deux arbres "collés"

Preuves et interprétations combinatoires ?

cartes n arêtes $= \frac{2}{n+2}\frac{3^n}{n+1}\binom{2n}{n}$

quadrangulations* d'un hexagone $= \frac{6}{n+2}\frac{1}{n+1}\binom{2n}{n}$

Triangulations d'un triangle $= \frac{2}{(n+1)n}\binom{4n+1}{n-1} =$ intervalles de Tamari

Décompositions "simples" + calculs : Tutte et al (60s)

Intégrales de matrices + calculs : BIPZ et al (70s)

Bijections: Cori et al. (80's)

Idée générale en 3 étapes

- une famille de carte = caractérisée par une famille d'orientations
- carte bien orientée = décomposition en deux arbres "collés"
- coder un des arbres et "écrire le code sur le bord de l'autre"

Preuves et interprétations combinatoires ?

cartes n arêtes $= \frac{2}{n+2}\frac{3^n}{n+1}\binom{2n}{n}$ quadrangulations* d'un hexagone $= \frac{6}{n+2}\frac{1}{n+1}\binom{2n}{n}$

Triangulations d'un triangle $= \frac{2}{(n+1)n}\binom{4n+1}{n-1} =$ intervalles de Tamari

Décompositions "simples" + calculs : Tutte et al (60s)

Intégrales de matrices + calculs : BIPZ et al (70s)

Bijections: Cori et al. (80's)

Idée générale en 3 étapes

- une famille de carte = caractérisée par une famille d'orientations
- carte bien orientée = décomposition en deux arbres "collés"
- coder un des arbres et "écrire le code sur le bord de l'autre"

(en cours de formalisation par Bernardi, Chapuy et Fusy)

Orientation caractéristique ?

une carte est bipartie $\Leftrightarrow$ son dual admet une orientation eulérienne

une carte est 2-connexe $\Leftrightarrow$ elle admet une orientation bipolaire

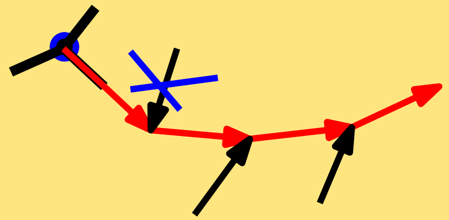
une carte est une triangulation $\Leftrightarrow$ elle admet une orientation à 3 sortantes

etc...

Orientations accessibles gauches et décomposition

(Bernardi, Chapuy, Fusy)

Une carte orientée et un sommet racine

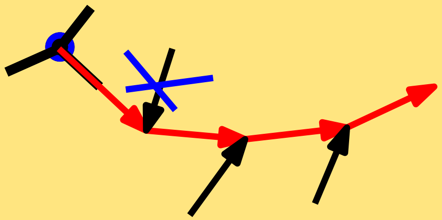


Chemin gauche = pas d'arêtes entrantes sur la gauche

Orientations accessibles gauches et décomposition

(Bernardi, Chapuy, Fusy)

Une carte orientée et un sommet racine



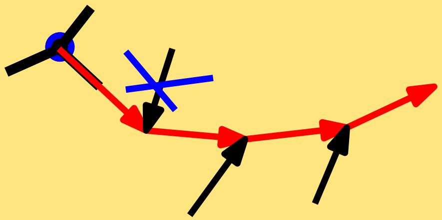
Chemin gauche = pas d'arêtes entrantes sur la gauche

Une carte orientée est accessible gauche si tout sommet est accessible par un chemin gauche

Orientations accessibles gauches et décomposition

(Bernardi, Chapuy, Fusy)

Une carte orientée et un sommet racine



Chemin gauche $=$ pas d'arêtes entrantes sur la gauche

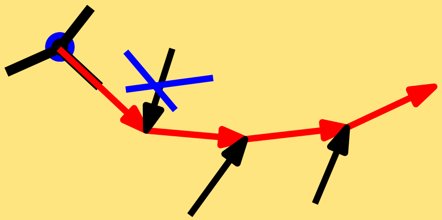
Une carte orientée est accessible gauche si tout sommet est accessible par un chemin gauche

Chaque arête est l'extrémité d'un unique chemin gauche

Orientations accessibles gauches et décomposition

(Bernardi, Chapuy, Fusy)

Une carte orientée et un sommet racine

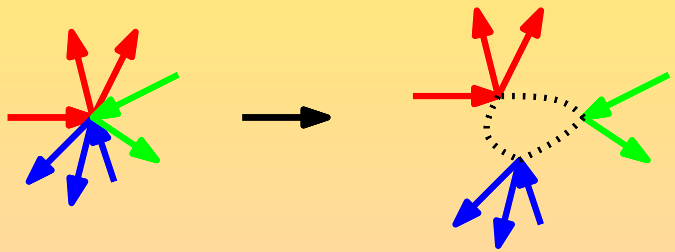


Chemin gauche = pas d'arêtes entrantes sur la gauche

Une carte orientée est accessible gauche si tout sommet est accessible par un chemin gauche

Chaque arête est l'extrémité d'un unique chemin gauche

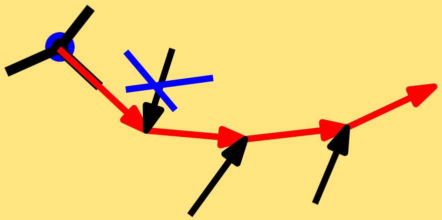
Eclatement d'un sommet en préservant les chemins gauches:



Orientations accessibles gauches et décomposition

(Bernardi, Chapuy, Fusy)

Une carte orientée et un sommet racine



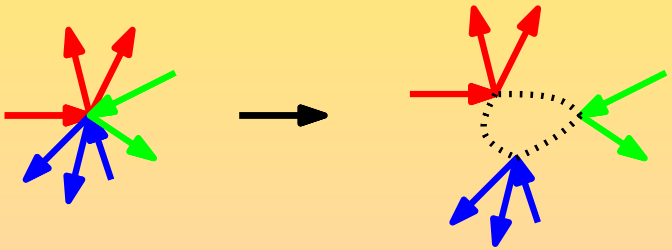
Chemin gauche = pas d'arêtes entrantes sur la gauche

Une carte orientée est accessible gauche si tout sommet est accessible par un chemin gauche

Chaque arête est l'extrémité d'un unique chemin gauche

Eclatement d'un sommet en préservant les chemins gauches:

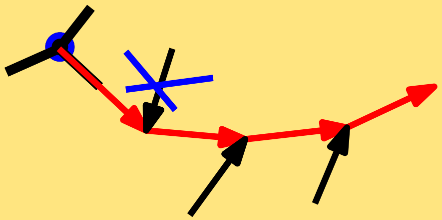
Le résultat est un arbre



Orientations accessibles gauches et décomposition

(Bernardi, Chapuy, Fusy)

Une carte orientée et un sommet racine

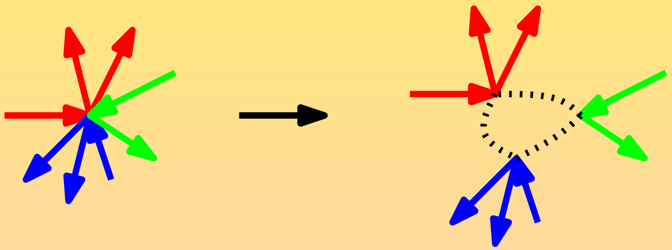


Chemin gauche = pas d'arêtes entrantes sur la gauche

Une carte orientée est accessible gauche si tout sommet est accessible par un chemin gauche

Chaque arête est l'extrémité d'un unique chemin gauche

Eclatement d'un sommet en préservant les chemins gauches:



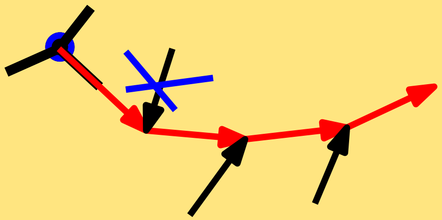
Le résultat est un arbre

Il ne définit qu'une face.

Orientations accessibles gauches et décomposition

(Bernardi, Chapuy, Fusy)

Une carte orientée et un sommet racine

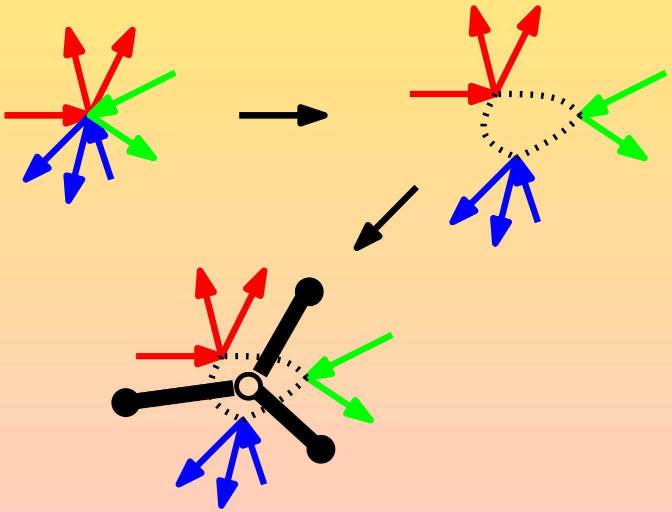


Chemin gauche = pas d'arêtes entrantes sur la gauche

Une carte orientée est accessible gauche si tout sommet est accessible par un chemin gauche

Chaque arête est l'extrémité d'un unique chemin gauche

Eclatement d'un sommet en préservant les chemins gauches:



Le résultat est un arbre

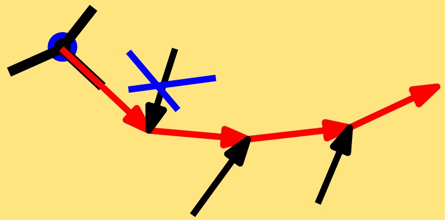
Il ne définit qu'une face.

Joindre les centres des régions duales.

Orientations accessibles gauches et décomposition

(Bernardi, Chapuy, Fusy)

Une carte orientée et un sommet racine

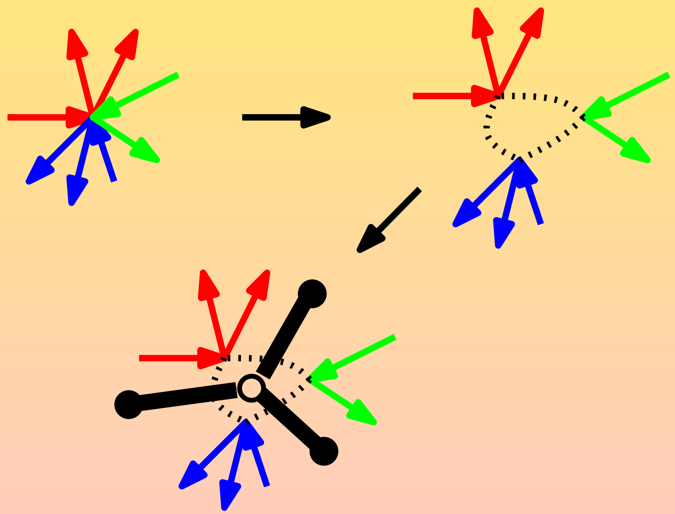


Chemin gauche = pas d'arêtes entrantes sur la gauche

Une carte orientée est accessible gauche si tout sommet est accessible par un chemin gauche

Chaque arête est l'extrémité d'un unique chemin gauche

Eclatement d'un sommet en préservant les chemins gauches:



Le résultat est un arbre

Il ne définit qu'une face.

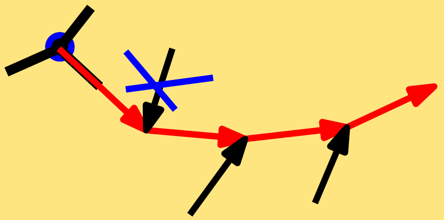
Joindre les centres des régions duales.

Le complémentaire/dual ainsi formé est aussi un arbre

Orientations accessibles gauches et décomposition

(Bernardi, Chapuy, Fusy)

Une carte orientée et un sommet racine

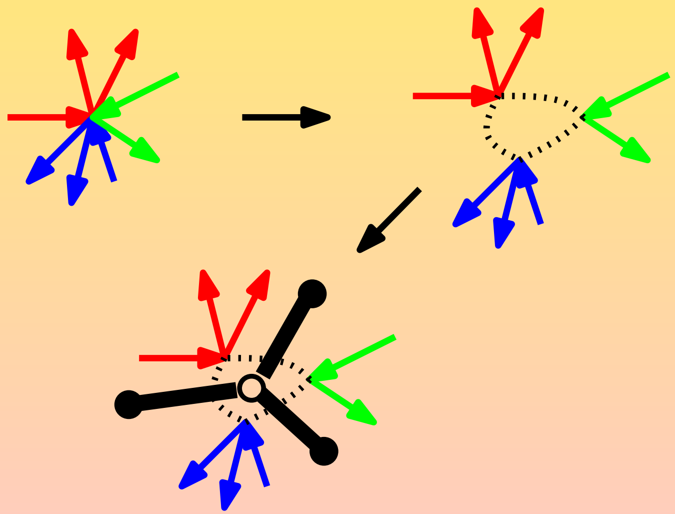


Chemin gauche = pas d'arêtes entrantes sur la gauche

Une carte orientée est accessible gauche si tout sommet est accessible par un chemin gauche

Chaque arête est l'extrémité d'un unique chemin gauche

Eclatement d'un sommet en préservant les chemins gauches:



Le résultat est un arbre

Il ne définit qu'une face.

Joindre les centres des régions duales.

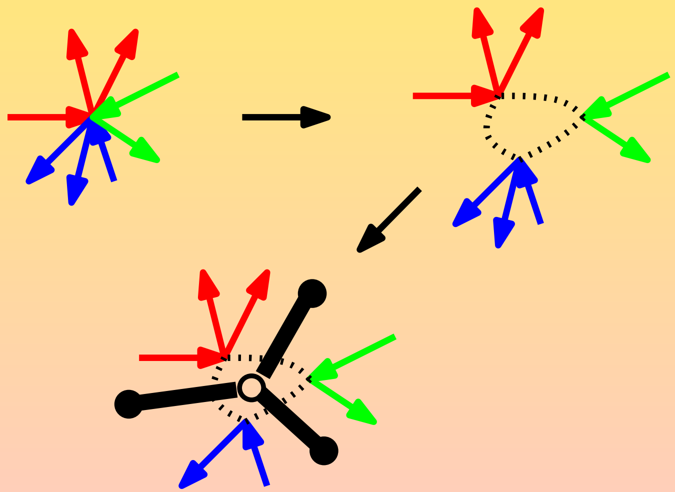
Le complémentaire/dual ainsi formé est aussi un arbre

Orientations accessibles gauches et décomposition

(Bernardi, Chapuy, Fusy)

À une carte orientée accessible gauche

Eclatement d'un sommet en préservant les chemins gauches:



Le résultat est un arbre

Il ne définit qu'une face.

Joindre les centres des régions duales.

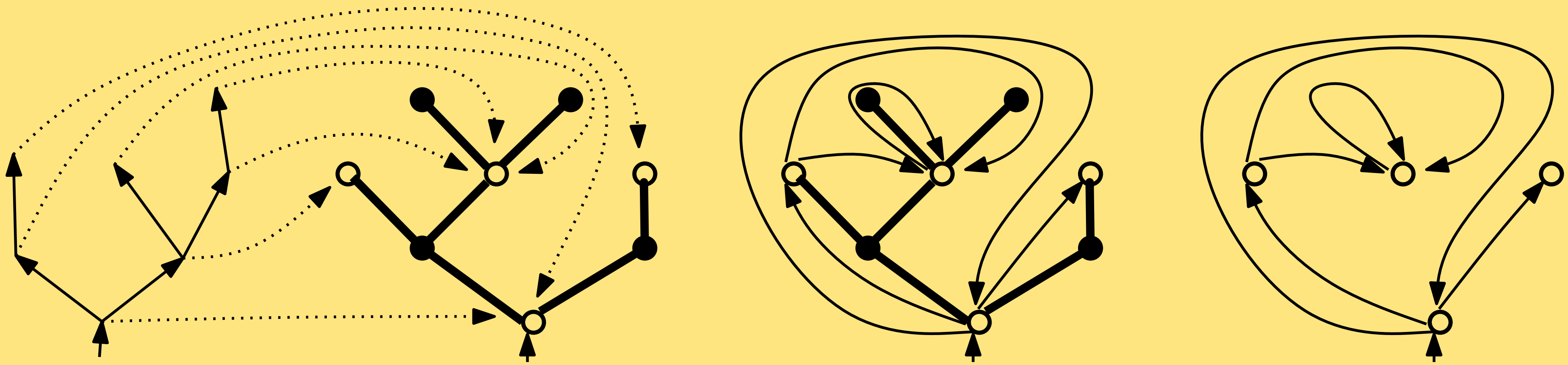
Le complémentaire/dual ainsi formé
est aussi un arbre

Orientations accessibles gauches et décomposition

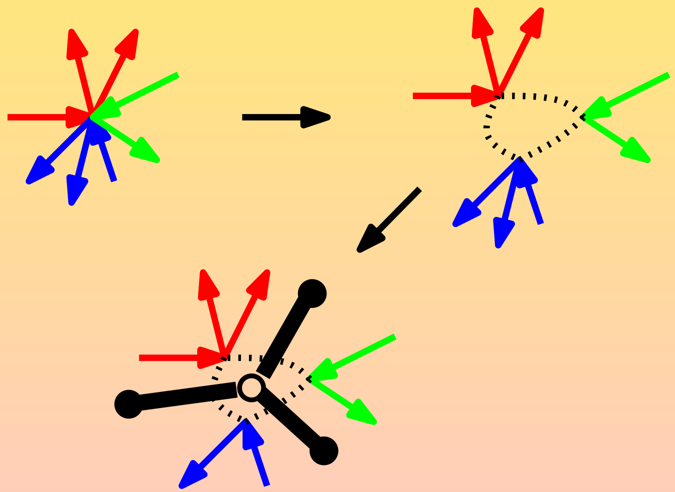
(Bernardi, Chapuy, Fusy)

À une carte orientée accessible gauche

On a associé bijectivement un couple d'arbres "collés"



Eclatement d'un sommet en préservant les chemins gauches:



Le résultat est un arbre

Il ne définit qu'une face.

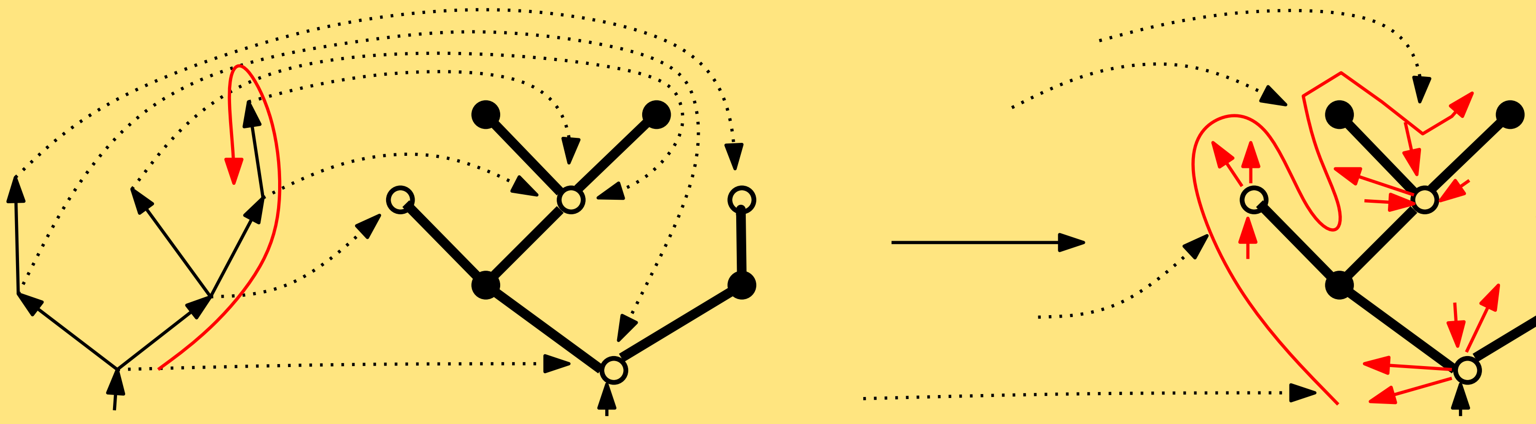
Joindre les centres des régions duales.

Le complémentaire/dual ainsi formé
est aussi un arbre

Couple d'arbres "collés" = arbre décoré équilibré

- coder un des arbres et "écrire le code sur le bord de l'autre"

exemple le code des degrés

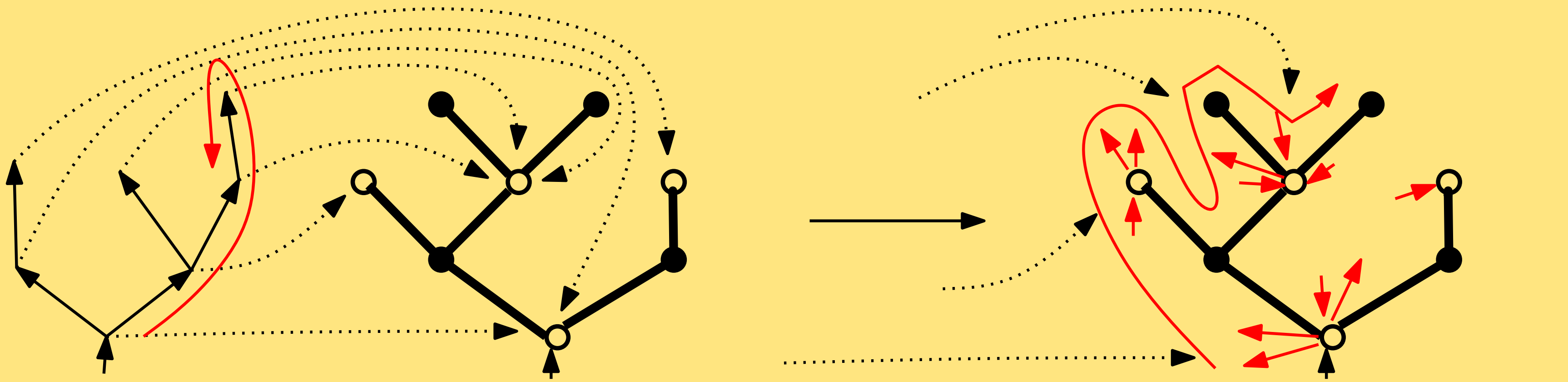


On obtient un arbre décoré

Couple d'arbres "collés" = arbre décoré équilibré

- coder un des arbres et "écrire le code sur le bord de l'autre"

exemple le code des degrés

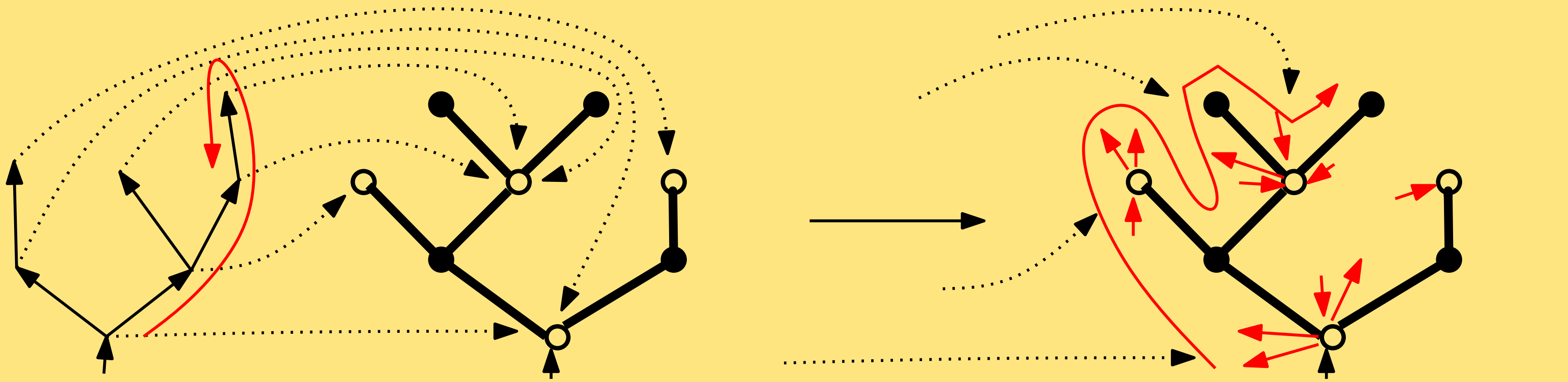


On obtient un arbre décoré

Couple d'arbres "collés" = arbre décoré équilibré

- coder un des arbres et "écrire le code sur le bord de l'autre"

exemple le code des degrés



On obtient un arbre décoré

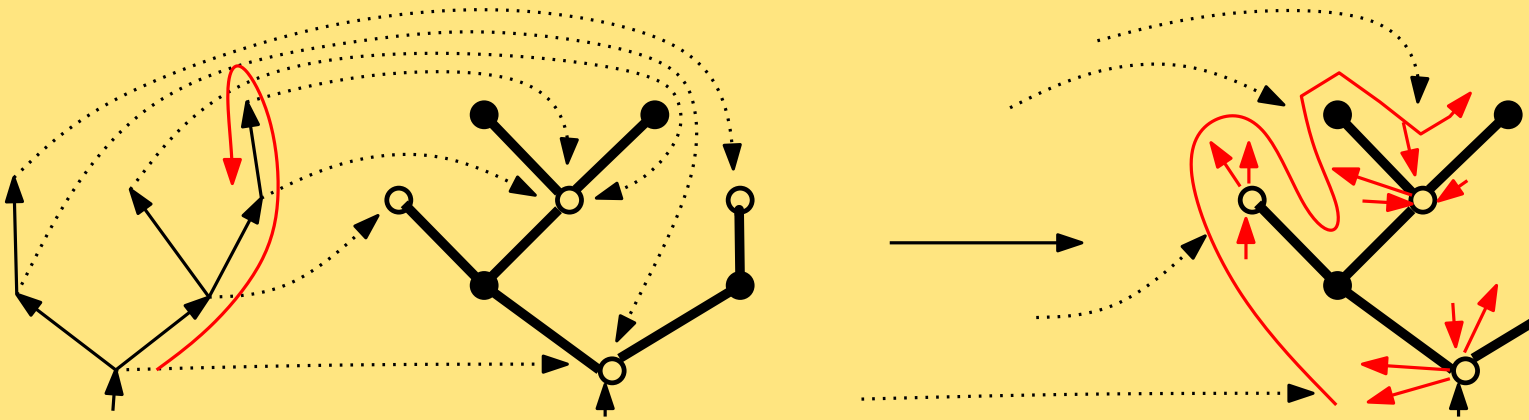
Les décorations doivent former un mot positif
(au sens du lemme cyclique)

Les cartes sont en bijection avec des arbres décorés équilibrés

Couple d'arbres "collés" = arbre décoré équilibré

- coder un des arbres et "écrire le code sur le bord de l'autre"

exemple le code des degrés



On obtient un arbre décoré

Les décorations doivent former un mot positif
(au sens du lemme cyclique)

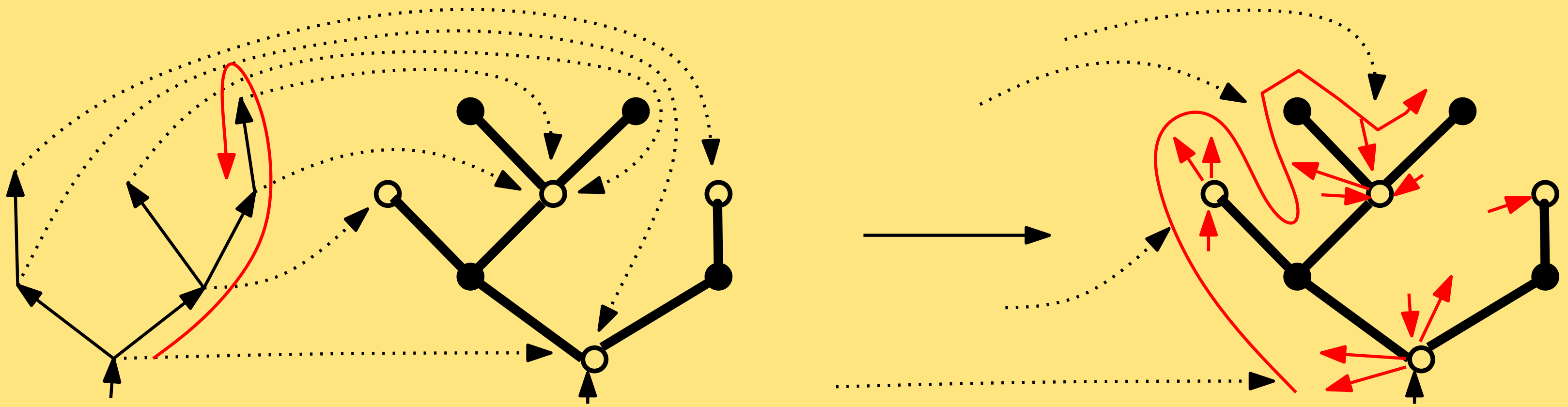
Les cartes sont en bijection avec des arbres décorés équilibrés

$$\frac{2}{n+2}\,\frac{3^n}{n+1}\binom{2n}{n} \qquad\qquad \frac{6}{n+2}\,\frac{1}{n+1}\binom{2n}{n}$$

Couple d'arbres "collés" = arbre décoré équilibré

- coder un des arbres et "écrire le code sur le bord de l'autre"

exemple le code des degrés



On obtient un arbre décoré

Les décorations doivent former un mot positif
(au sens du lemme cyclique)

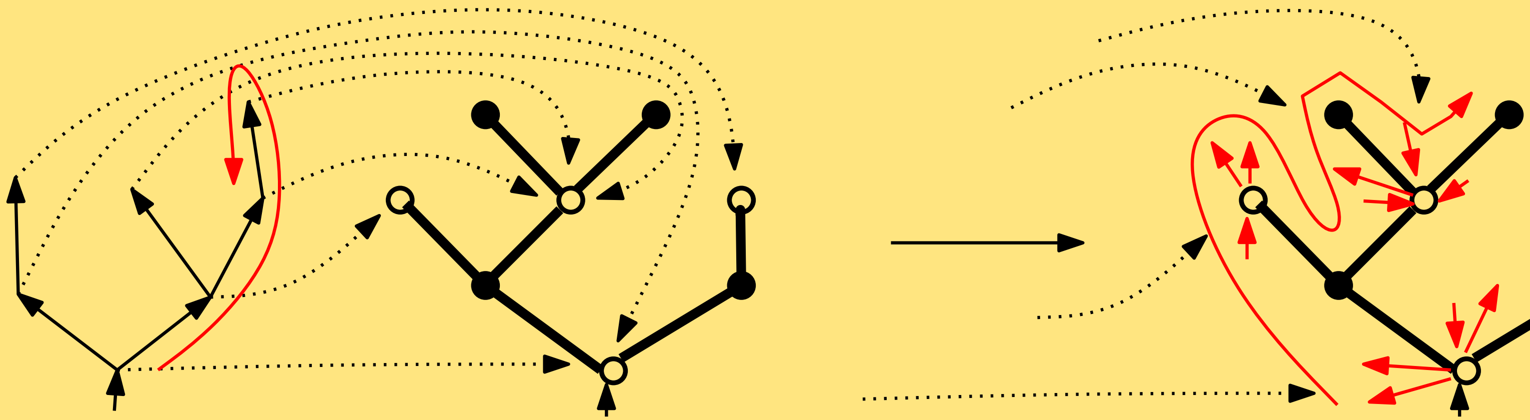
Les cartes sont en bijection avec des arbres décorés équilibrés

$$\frac{2}{n+2}\underbrace{\frac{3^n}{n+1}\binom{2n}{n}}_{\text{arbre}} \qquad \frac{6}{n+2}\underbrace{\frac{1}{n+1}\binom{2n}{n}}_{\text{arbre}}$$

Couple d'arbres "collés" = arbre décoré équilibré

- coder un des arbres et "écrire le code sur le bord de l'autre"

exemple le code des degrés



On obtient un arbre décoré

Les décorations doivent former un mot positif
(au sens du lemme cyclique)

Les cartes sont en bijection avec des arbres décorés équilibrés

$$\underbrace{\boxed{\frac{2}{n+2}}}_{\text{équilibre}}\underbrace{\frac{3^n}{n+1}\binom{2n}{n}}_{\text{arbre}} \qquad \underbrace{\boxed{\frac{6}{n+2}}}_{\text{équilibre}}\underbrace{\frac{1}{n+1}\binom{2n}{n}}_{\text{arbre}}$$

Arbres équilibrés

Lemme cyclique et arbres équilibrés

$$\frac{2}{n+2}\,\frac{3^n}{n+1}\binom{2n}{n}$$

interprétation ?

n nœuds
$n+2$ feuilles

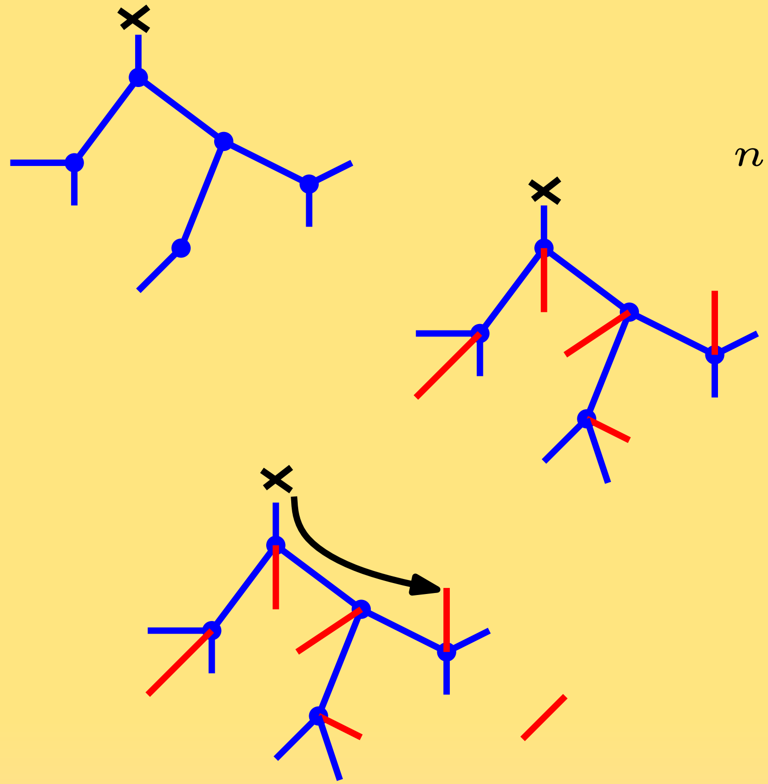
n bourgeons

$$\frac{1}{n+1}\binom{2n}{n}$$

arbres binaires
plantés

$$\frac{3^n}{n+1}\binom{2n}{n}$$

arbres binaires
plantés décorés

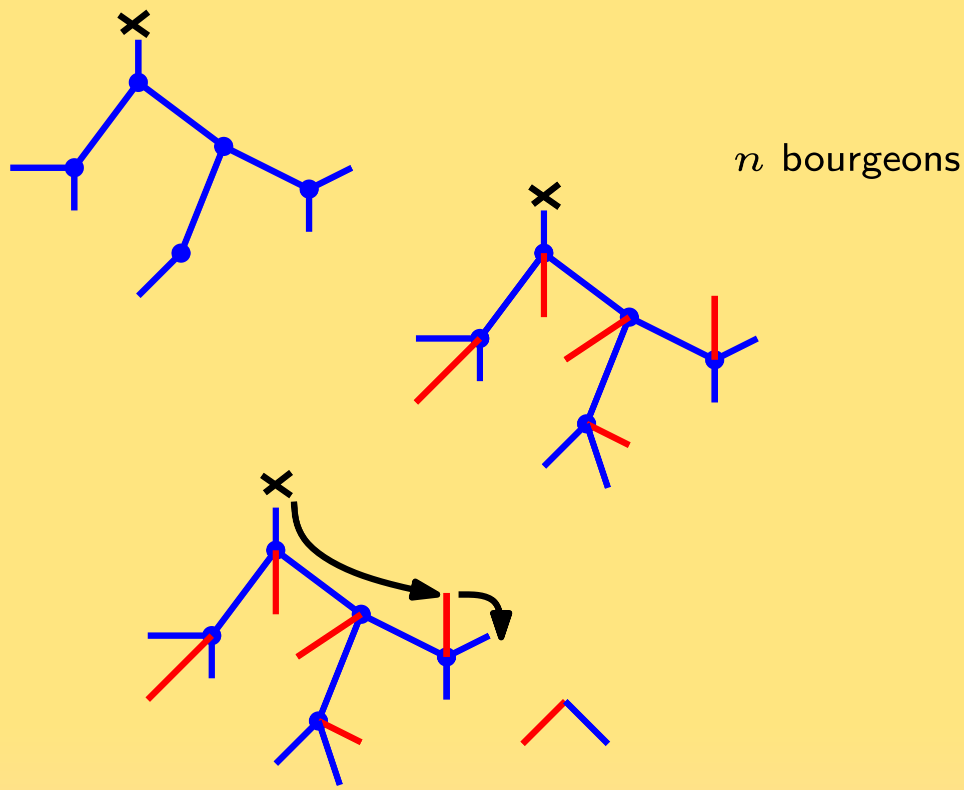


Lemme cyclique et arbres équilibrés

$$\frac{2}{n+2}\,\frac{3^n}{n+1}\binom{2n}{n}$$ interprétation ?

$$\frac{1}{n+1}\binom{2n}{n}$$ arbres binaires plantés

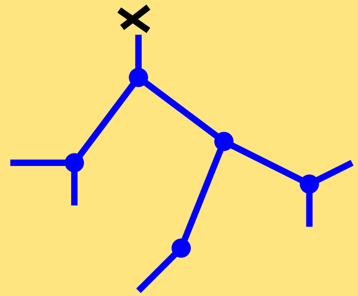
$$\frac{3^n}{n+1}\binom{2n}{n}$$ arbres binaires plantés décorés



Lemme cyclique et arbres équilibrés

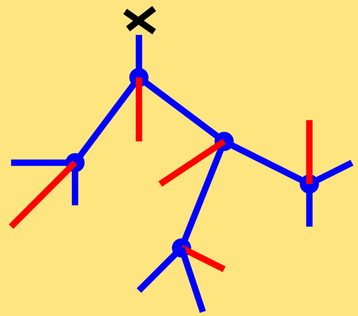
$$\frac{2}{n+2}\,\frac{3^n}{n+1}\binom{2n}{n}$$ interprétation ?

n nœuds
$n+2$ feuilles

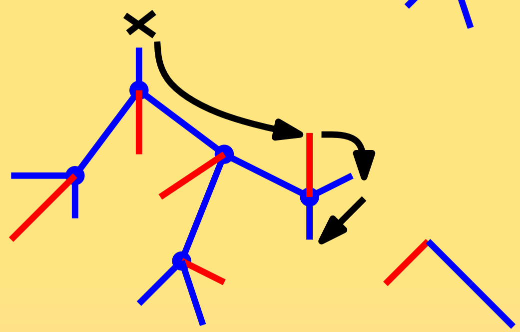


$$\frac{1}{n+1}\binom{2n}{n}$$ arbres binaires plantés

n bourgeons



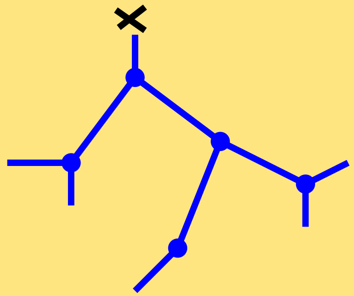
$$\frac{3^n}{n+1}\binom{2n}{n}$$ arbres binaires plantés décorés



Lemme cyclique et arbres équilibrés

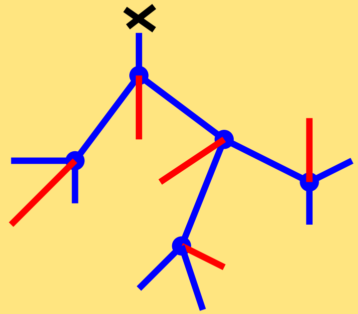
n nœuds
$n+2$ feuilles

$$\frac{2}{n+2}\,\frac{3^n}{n+1}\binom{2n}{n}$$ interprétation ?

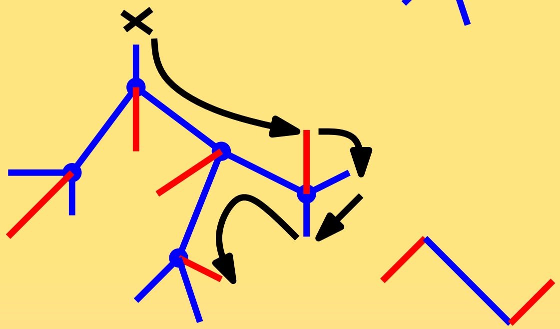


$$\frac{1}{n+1}\binom{2n}{n}$$ arbres binaires plantés

n bourgeons



$$\frac{3^n}{n+1}\binom{2n}{n}$$ arbres binaires plantés décorés



Lemme cyclique et arbres équilibrés

$$\frac{2}{n+2}\,\frac{3^n}{n+1}\binom{2n}{n}$$

interprétation ?

n nœuds
$n+2$ feuilles

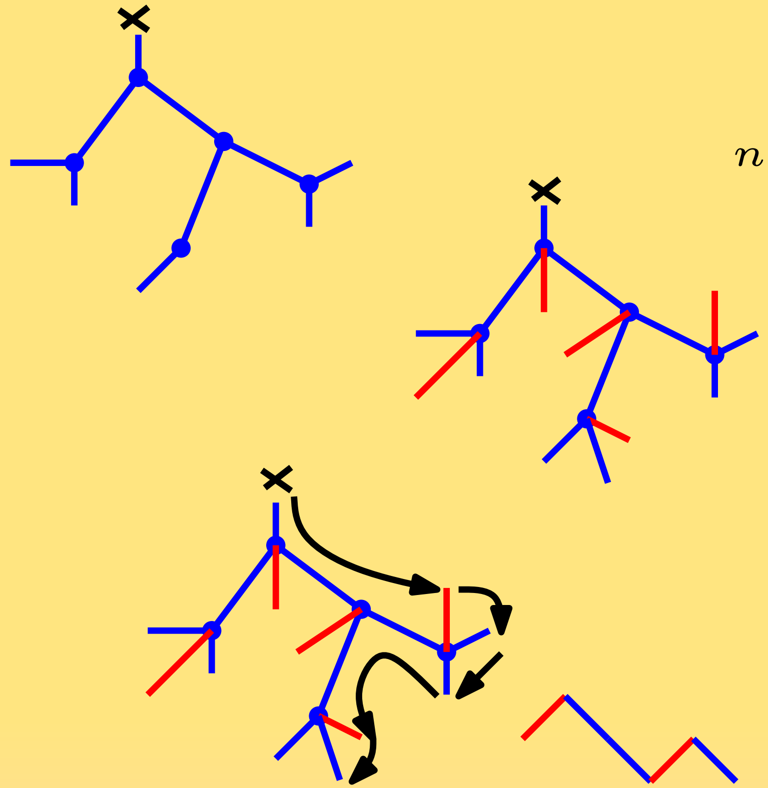
$$\frac{1}{n+1}\binom{2n}{n}$$

arbres binaires plantés

n bourgeons

$$\frac{3^n}{n+1}\binom{2n}{n}$$

arbres binaires plantés décorés

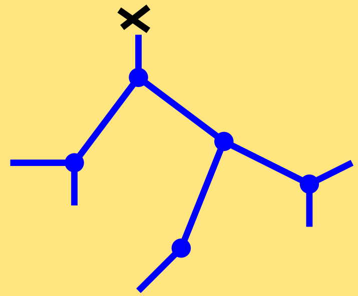


Lemme cyclique et arbres équilibrés

$$\frac{2}{n+2}\,\frac{3^n}{n+1}\binom{2n}{n}$$

interprétation ?

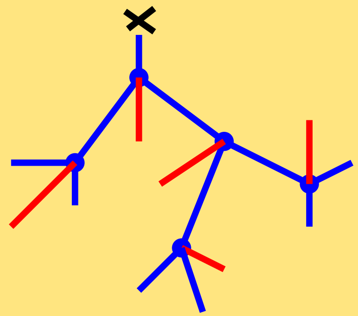
n nœuds
$n+2$ feuilles



$$\frac{1}{n+1}\binom{2n}{n}$$

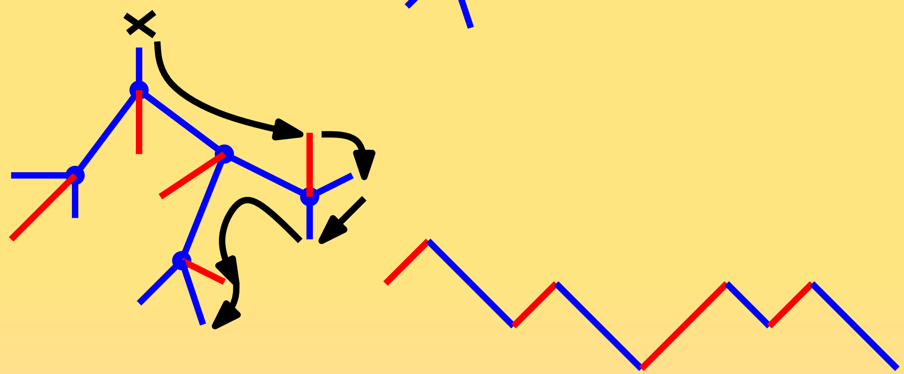
arbres binaires
plantés

n bourgeons



$$\frac{3^n}{n+1}\binom{2n}{n}$$

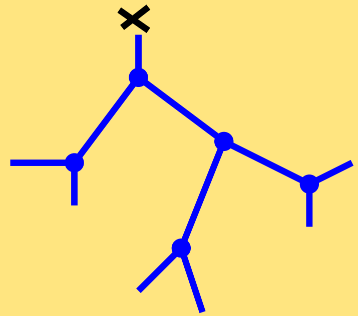
arbres binaires
plantés décorés



Lemme cyclique et arbres équilibrés

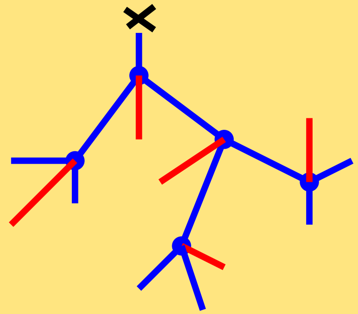
$\frac{2}{n+2}\,\frac{3^n}{n+1}\binom{2n}{n}$ interprétation ?

n nœuds
$n+2$ feuilles

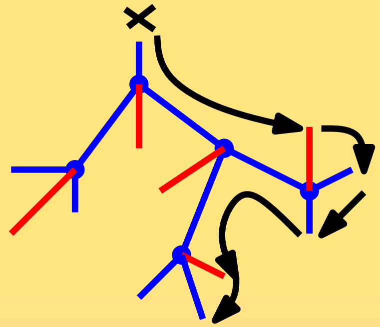


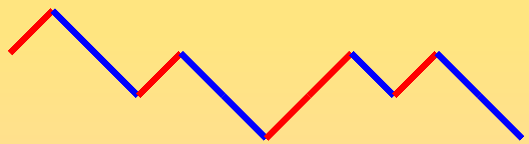
$\frac{1}{n+1}\binom{2n}{n}$ arbres binaires plantés

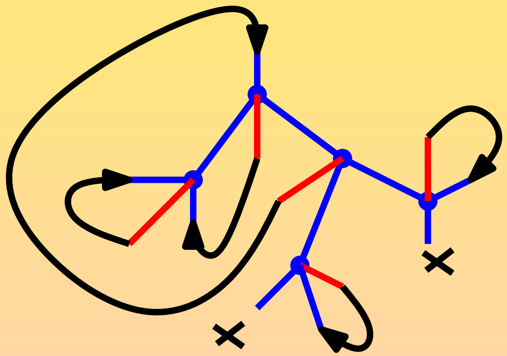
n bourgeons



$\frac{3^n}{n+1}\binom{2n}{n}$ arbres binaires plantés décorés







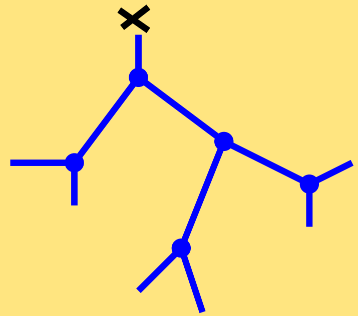
Lemme cyclique et arbres équilibrés

$$\frac{2}{n+2}\,\frac{3^n}{n+1}\binom{2n}{n}$$

interprétation ?

n nœuds

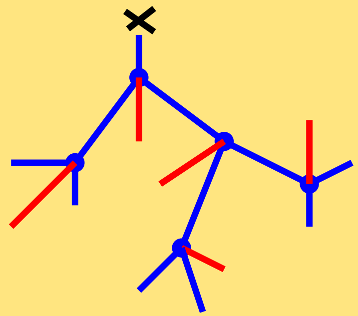
$n+2$ feuilles



$$\frac{1}{n+1}\binom{2n}{n}$$

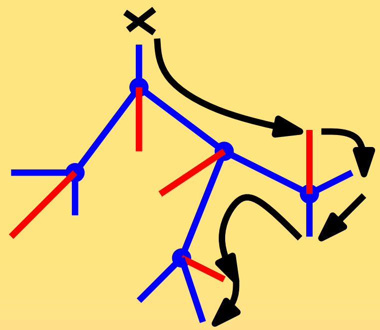
arbres binaires plantés

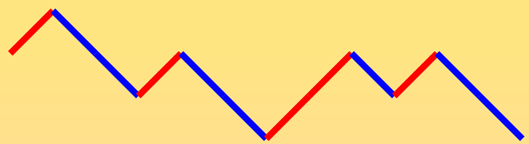
n bourgeons

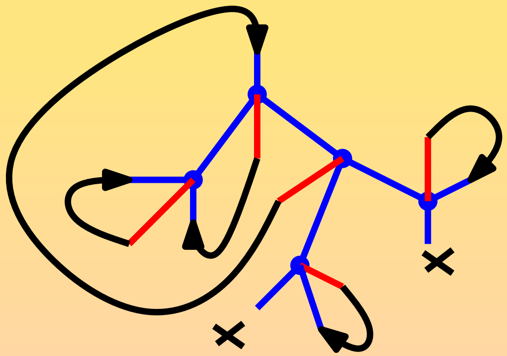


$$\frac{3^n}{n+1}\binom{2n}{n}$$

arbres binaires plantés décorés





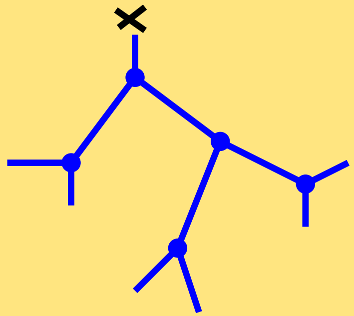


2 feuilles libres

Lemme cyclique et arbres équilibrés

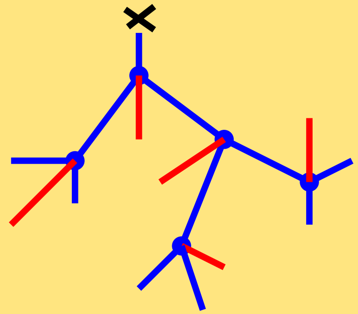
$\frac{2}{n+2}\,\frac{3^n}{n+1}\binom{2n}{n}$ interprétation ?

n nœuds
$n+2$ feuilles



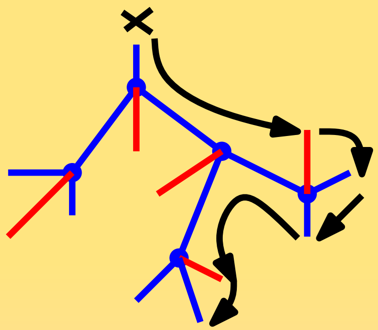
$\frac{1}{n+1}\binom{2n}{n}$ arbres binaires plantés

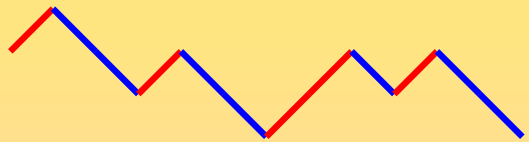
n bourgeons

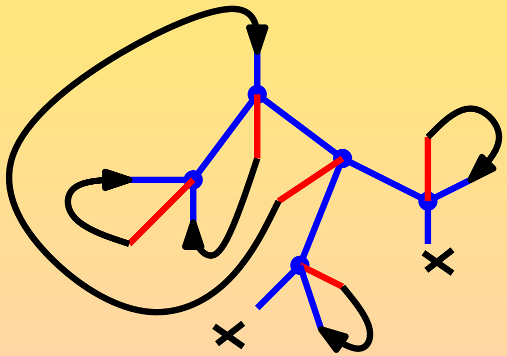


$\frac{3^n}{n+1}\binom{2n}{n}$ arbres binaires plantés décorés

$\frac{2}{n+2}\,\frac{3^n}{n+1}\binom{2n}{n}$ arbres binaires équilibrés







2 feuilles libres

2 racines parmi $n+2$ tels que le mot de bord code un(e paire d')arbres

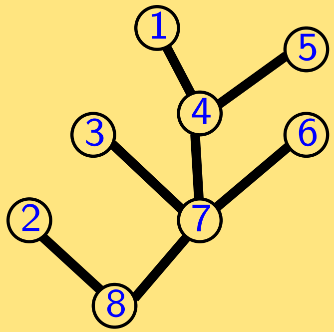
Cartes et arbres équilibrés

Énumération de cartes par *conjugaison d'arbres*:

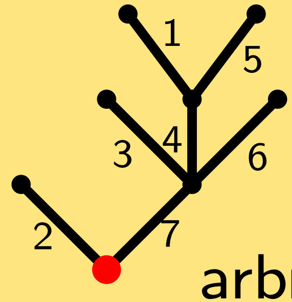
- une famille de carte = caractérisée par une famille d'orientations
- parmi ces orientations, une seule par carte est accessible-gauche
- carte accessible gauche = décomposition en deux arbres "collés"
- coder un des arbres et "écrire le code sur le bord de l'autre"
- compter les arbres équilibrés à partir des arbres décorés via le lemme cyclique.

Des arbres de Cayley équilibrés ?

arbre de Cayley à $n+1$ sommets étiquetés



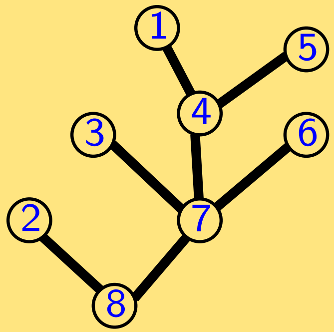
$$(n+1)^{n-1}$$



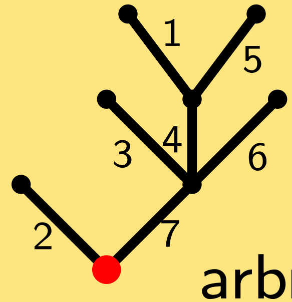
arbres de Cayley enraciné à n arêtes étiquetés

Des arbres de Cayley équilibrés ?

arbre de Cayley à
$n+1$ sommets
étiquetés



$(n+1)^{n-1}$

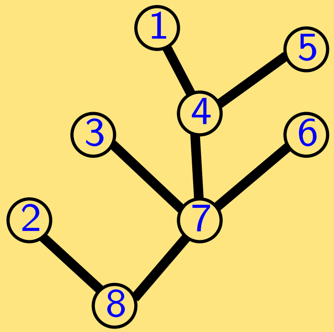


arbres de Cayley
enraciné à n
arêtes étiquetés

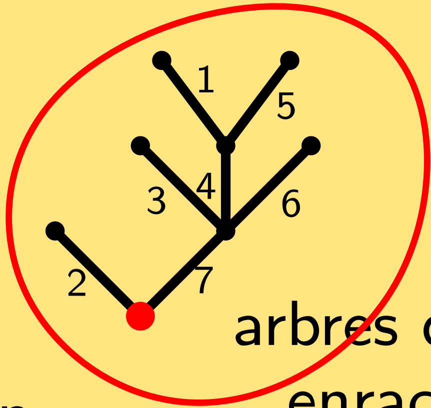
Pour pouvoir équilibrer il faut plonger dans le plan
et avoir une racine

Des arbres de Cayley équilibrés ?

arbre de Cayley à
$n+1$ sommets
étiquetés



$(n+1)^{n-1}$

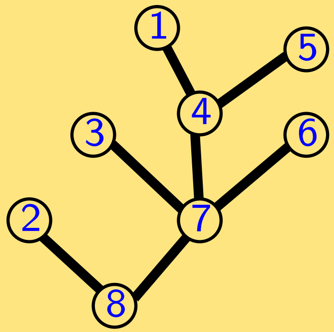


arbres de Cayley
enraciné à n
arêtes étiquetés

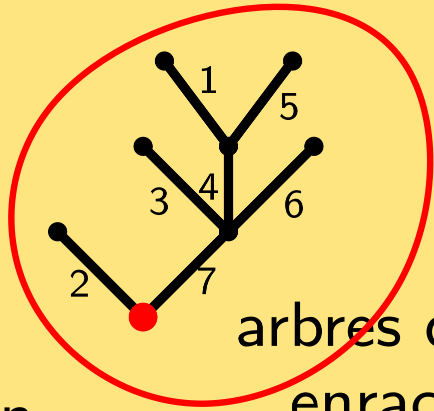
Pour pouvoir équilibrer il faut plonger dans le plan
et avoir une racine

Des arbres de Cayley équilibrés ?

arbre de Cayley à
$n+1$ sommets
étiquetés



$$(n+1)^{n-1}$$



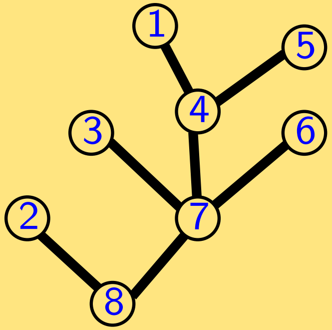
arbres de Cayley
enraciné à n
arêtes étiquetés

Pour pouvoir équilibrer il faut plonger dans le plan
et avoir une racine

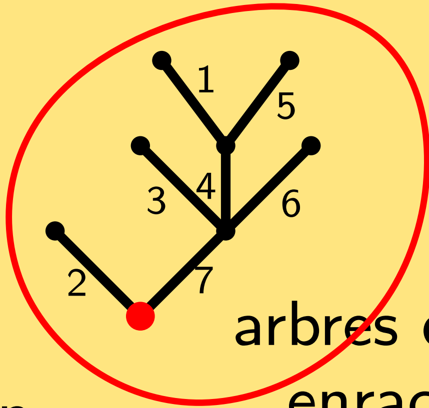
On pourrait ordonner les fils de la racine, et récursivement

Des arbres de Cayley équilibrés ?

arbre de Cayley à
$n+1$ sommets
étiquetés



$(n+1)^{n-1}$



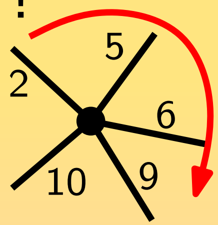
arbres de Cayley
enraciné à n
arêtes étiquetés

Pour pouvoir équilibrer il faut plonger dans le plan
et avoir une racine

On pourrait ordonner les fils de la racine, et récursivement

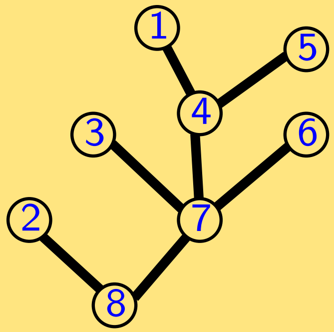
mais ce n'est pas stable par réenracinement !

$\Rightarrow$ plonger les arêtes dans le sens horaire
autour de chaque sommet

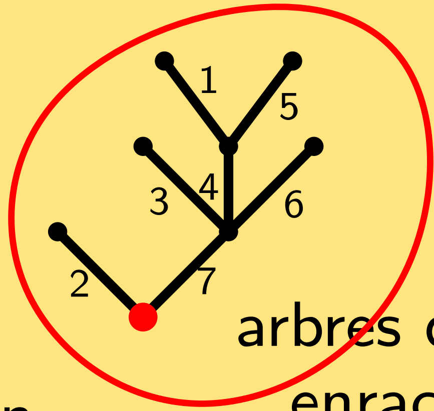


Des arbres de Cayley équilibrés ?

arbre de Cayley à $n+1$ sommets étiquetés



$(n+1)^{n-1}$

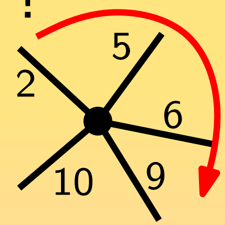


arbres de Cayley enraciné à n arêtes étiquetés

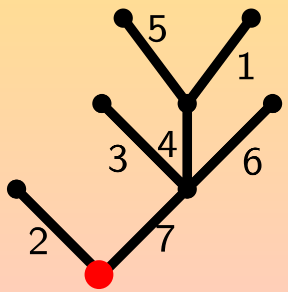
Pour pouvoir équilibrer il faut plonger dans le plan et avoir une racine

On pourrait ordonner les fils de la racine, et récursivement

mais ce n'est pas stable par réenracinement !

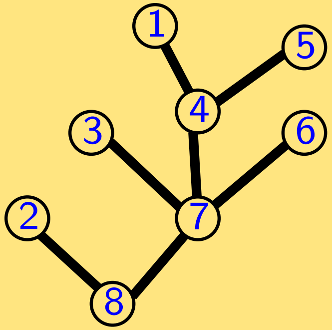


$\Rightarrow$ plonger les arêtes dans le sens horaire autour de chaque sommet

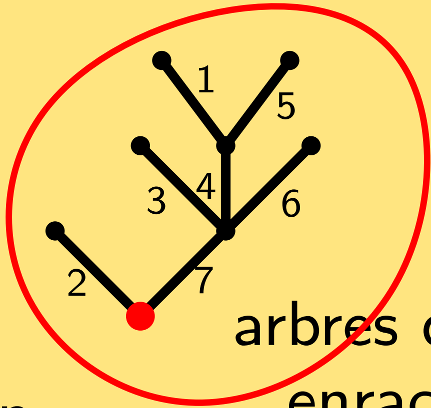


Des arbres de Cayley équilibrés ?

arbre de Cayley à
$n+1$ sommets
étiquetés



$(n+1)^{n-1}$

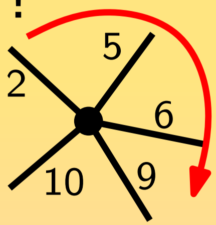


arbres de Cayley
enraciné à n
arêtes étiquetés

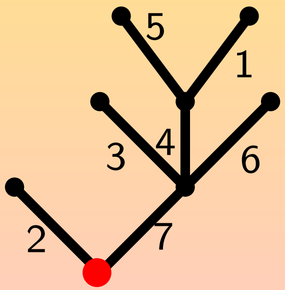
Pour pouvoir équilibrer il faut plonger dans le plan
et avoir une racine

On pourrait ordonner les fils de la racine, et récursivement

mais ce n'est pas stable par réenracinement !



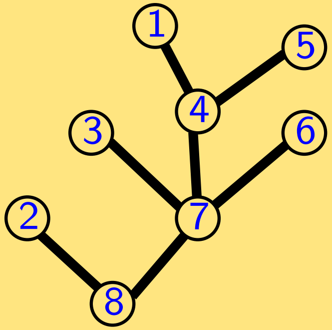
$\Rightarrow$ plonger les arêtes dans le sens horaire
autour de chaque sommet



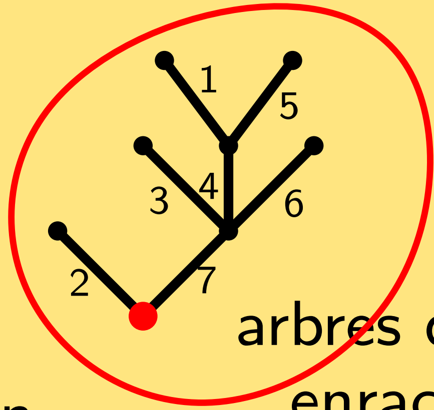
1 coins spécial par sommet

Des arbres de Cayley équilibrés ?

arbre de Cayley à
$n+1$ sommets
étiquetés



$(n+1)^{n-1}$



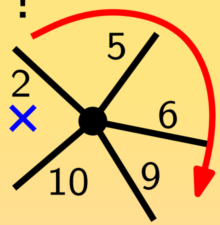
arbres de Cayley
enraciné à n
arêtes étiquetés

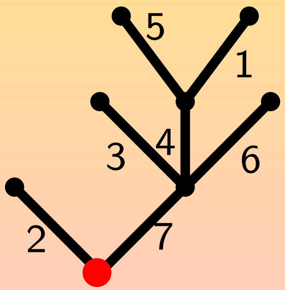
Pour pouvoir équilibrer il faut plonger dans le plan
et avoir une racine

On pourrait ordonner les fils de la racine, et récursivement

mais ce n'est pas stable par réenracinement !

$\Rightarrow$ plonger les arêtes dans le sens horaire
autour de chaque sommet

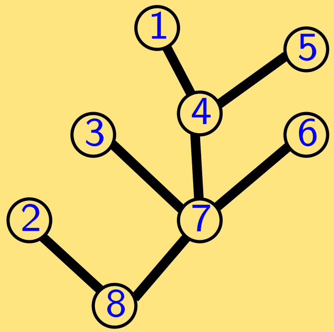




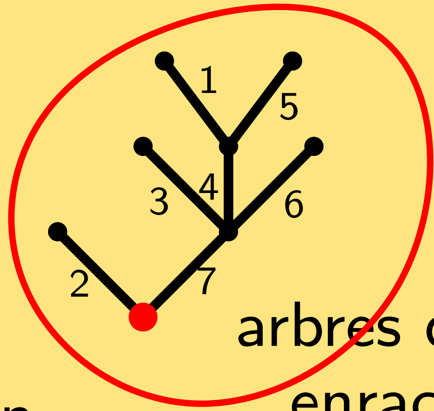
1 coins spécial par sommet

Des arbres de Cayley équilibrés ?

arbre de Cayley à $n+1$ sommets étiquetés



$(n+1)^{n-1}$

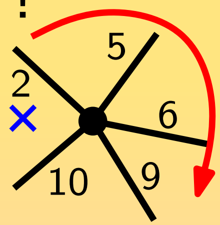


arbres de Cayley enraciné à n arêtes étiquetés

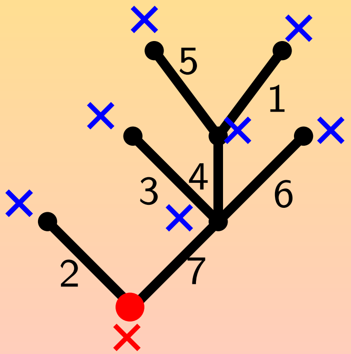
Pour pouvoir équilibrer il faut plonger dans le plan et avoir une racine

On pourrait ordonner les fils de la racine, et récursivement

mais ce n'est pas stable par réenracinement !



$\Rightarrow$ plonger les arêtes dans le sens horaire autour de chaque sommet

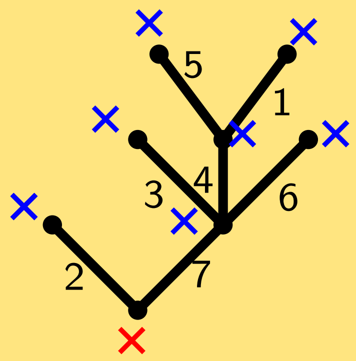


1 coins spécial par sommet

Des arbres de Cayley équilibrés ?

$$(n+1)^{n-1}$$

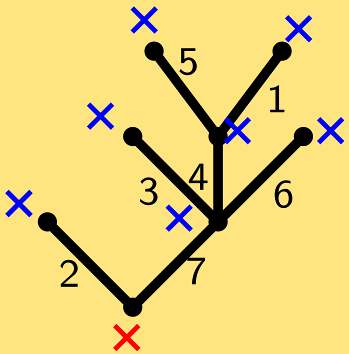
compte des arbres de Cayley bien plongés enracinés sur un coin spécial



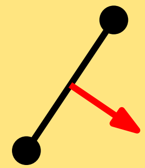
Des arbres de Cayley équilibrés ?

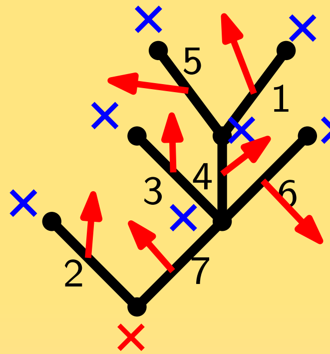
$(n+1)^{n-1}$

compte des arbres de Cayley bien plongés enracinés sur un coin spécial



Décorer l'arbre en ajoutant un bourgeon sur chaque arête

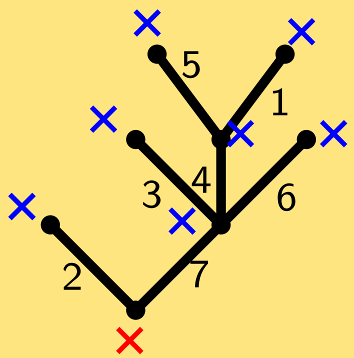




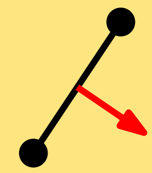
Des arbres de Cayley équilibrés ?

$(n+1)^{n-1}$

compte des arbres de Cayley bien plongés enracinés sur un coin spécial

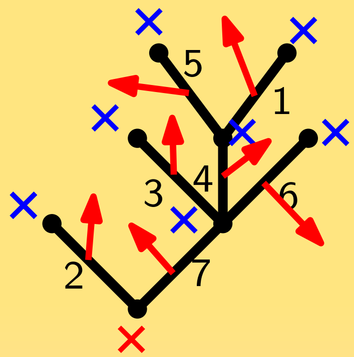


Décorer l'arbre en ajoutant un bourgeon sur chaque arête



$2^n(n+1)^{n-1}$

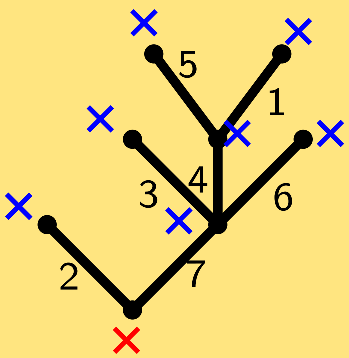
arbres décorés



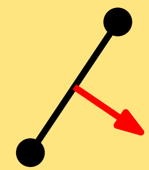
Des arbres de Cayley équilibrés ?

$(n+1)^{n-1}$

compte des arbres de Cayley bien plongés enracinés sur un coin spécial

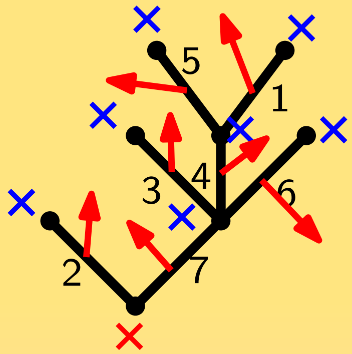


Décorer l'arbre en ajoutant un bourgeon sur chaque arête



$2^n(n+1)^{n-1}$

arbres décorés

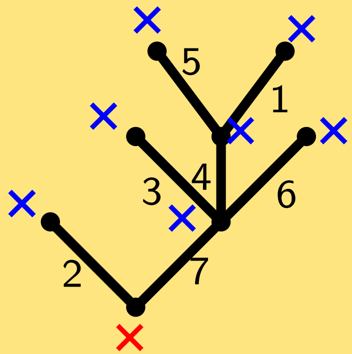


n bourgeons, $n+1$ coins spéciaux

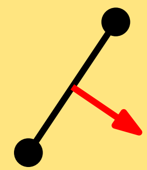
Des arbres de Cayley équilibrés ?

$$(n+1)^{n-1}$$

compte des arbres de Cayley bien plongés enracinés sur un coin spécial

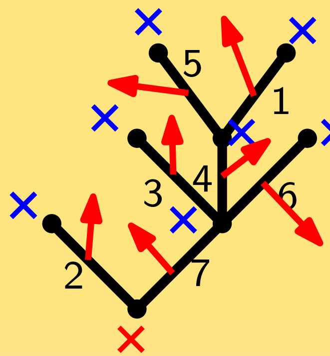


Décorer l'arbre en ajoutant un bourgeon sur chaque arête



$$2^n(n+1)^{n-1}$$

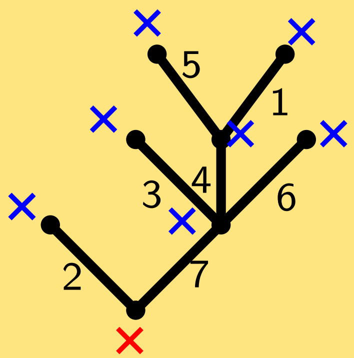
arbres décorés



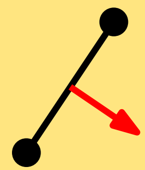
n bourgeons, $n+1$ coins spéciaux $\Rightarrow$ 1 coin équilibré

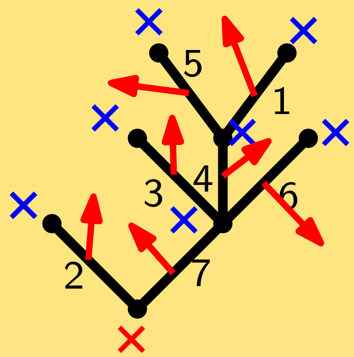
Des arbres de Cayley équilibrés ?

$(n+1)^{n-1}$ compte des arbres de Cayley bien plongés enracinés sur un coin spécial



Décorer l'arbre en ajoutant un bourgeon sur chaque arête





$2^n(n+1)^{n-1}$

arbres décorés

n bourgeons, $n+1$ coins spéciaux $\Rightarrow$ 1 coin équilibré

$\frac{1}{n+1}2^n(n+1)^{n-1} = 2^n(n+1)^{n-2} =$ arbres de Cayley équilibrés.

Lien avec les intervalles de Tamari étiquetés ?