Constructions géométriques

Vincent Pilaud

Octobre 2004

1 Définitions et constructions classiques

Dès l'antiquité et jusqu'à très récemment, les constructions géométriques à la règle et au compas ont motivés des recherches mathématiques importantes. Des problèmes célèbres de constructions ont émergés de ces interrogations et restent très intéressants, même si ils ont été résolu au XIXème siècle par les avancées de l'algèbre et leurs applications à la géométrie. On a retenu ici les problèmes de duplication du cube et de quadrature du cercle mais surtout celui de la construction des polygones réguliers. Mais rappelons dans un premier temps les définitions essentielles de constructibilité et les constructions classiques.

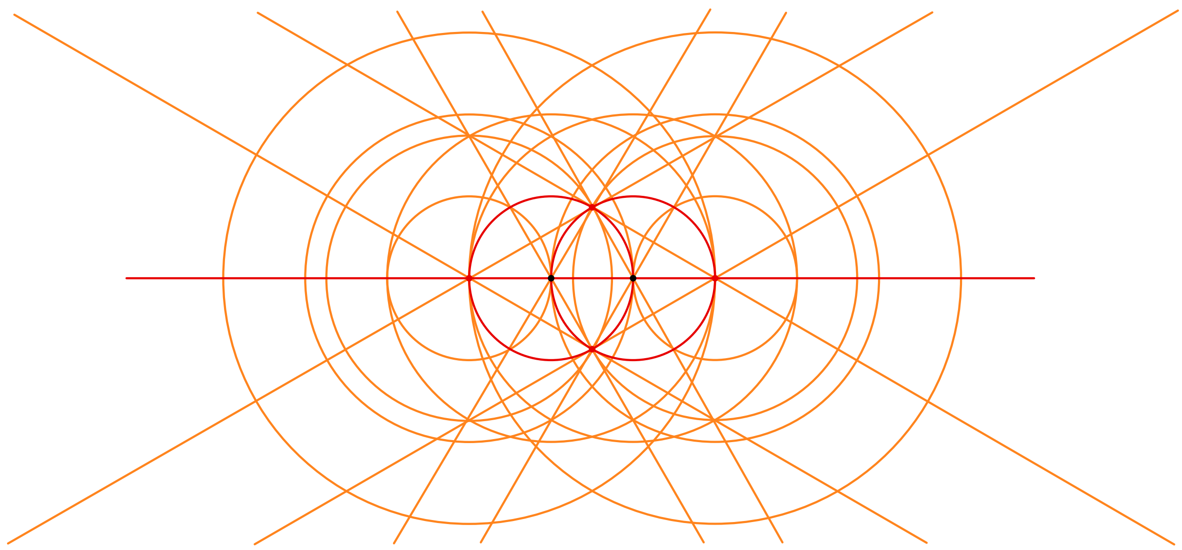
On se place dans le plan $\mathbb{R}^2$.
On définit l'ensemble $\mathcal{CONS}_n$ des points constructibles en n étapes par l'induction suivante :

- $\mathcal{CONS}_0 = \{(0,0); (1,0)\}$,
- Supposons défini les ensembles $\mathcal{CONS}_k$ pour $k < n$.
  On dit qu'une droite est constructible en n étapes si elle passe par deux points constructibles en strictement moins de n étapes,
  On dit qu'un cercle est constructible en n étapes si son centre est constructible en strictement moins de n étapes et qu'il passe par un point constructible en strictement moins de n étapes,
  On dit qu'un point est constructible en n étapes (donc qu'il est dans $\mathcal{CONS}_n$), si il est l'intersection de deux droites, ou d'une droite et d'un cercle, ou de deux cercles constructibles en n étapes.

On définit l'ensemble $\mathcal{CONS}$ des points constructibles par :

$$\mathcal{CONS} = \mathcal{CONS}_0 \cup \mathcal{CONS}_1 \cup \ldots = \bigcup_{n \in \mathbb{N}} \mathcal{CONS}_n$$

On dit qu'un réel x est constructible si $(x, 0) \in \mathcal{CONS}$.



Rappelons quelques résultats importants :

1. Equation de droite :

   On cherche l'équation de la droite Δ passant par deux points $A(x_A, y_A)$ et $B(x_B, y_B)$ distincts (avec par exemple $x_A \neq x_B$).

$$\begin{aligned} P(x,y) \in \Delta \quad & \Leftrightarrow \quad \overrightarrow{AP} \textit{ et } \overrightarrow{AB} \textit{ sont colinéaires} \\ & \Leftrightarrow \quad \exists \lambda \in \mathbb{R}, \overrightarrow{AP} = \lambda.\overrightarrow{AB} \\ & \Leftrightarrow \quad \left\{ \begin{array}{l} x - x_A = \lambda.(x_B - x_A) \\ y - y_A = \lambda.(y_B - y_A) \end{array} \right. \\ & \Leftrightarrow \quad \left\{ \begin{array}{l} \lambda = \frac{x - x_A}{x_B - x_A} \\ y - y_A = \frac{x - x_A}{x_B - x_A}.(y_B - y_A) \end{array} \right. \\ & \Leftrightarrow \quad \boxed{y = x.\frac{y_B - y_A}{x_B - x_A} + (y_A - x_A.\frac{y_B - y_A}{x_B - x_A})} \end{aligned}$$

   Remarque 1. *On suppose ici que $x_A - x_B \neq 0$ pour pouvoir diviser par $x_A - x_B$. Si ce n'est pas le cas, on ne peut pas paramétrer y en fonction de x, mais comme A et B sont distincts, $x_A - x_B = 0 \Rightarrow y_A - y_B \neq 0$ et on peut donc paramétrer x par y.*

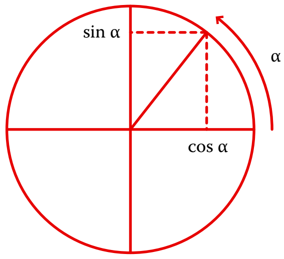
2. Equation de cercle :

   On cherche l'équation du cercle Ω de centre $A(x_A, y_A)$ et de rayon R.

$$\begin{aligned} P(x,y) \in \Omega \quad & \Leftrightarrow \quad AP = R \Leftrightarrow AP^2 = R^2 \\ & \Leftrightarrow \quad \overrightarrow{AP}.\overrightarrow{AP} = R^2 \\ & \Leftrightarrow \quad \left(\begin{array}{c} x - x_A \\ y - y_A \end{array} \right) . \left(\begin{array}{c} x - x_A \\ y - y_A \end{array} \right) = R^2 \\ & \Leftrightarrow \quad \boxed{(x - x_A)^2 + (y - y_A)^2 = R^2} \end{aligned}$$

3. Formules trigonométriques :

   On rappelle que le cosinus et le sinus d'un angle se lisent sur le cercle trigonométrique.



   On en déduit immédiatement certaines formules simples (la première formule correspond à l'équation du cercle, les autres reviennent simplement à regarder sur la figure les angles correspondants) :

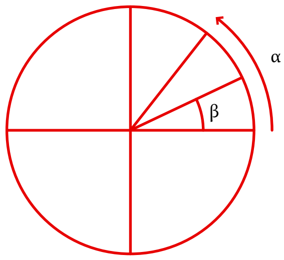
$$(\sin x)^2 + (\cos x)^2 = 1$$

$$\cos(-x) = \cos x \textit{ et } \sin(-x) = -\sin x$$

$$\cos(\pi - x) = -\cos x \textit{ et } \sin(\pi - x) = \sin x$$

$$\sin(\frac{\pi}{2} - x) = \cos x \textit{ et } \cos(\frac{\pi}{2} - x) = \sin x$$

   On a d'autre part :



$$
\begin{array}{rcl}
\cos(a-b) & = & \|\overrightarrow{OP}\|.\|\overrightarrow{OQ}\|.\cos(\overrightarrow{OP},\overrightarrow{OQ}) \\
& = & \overrightarrow{OP}.\overrightarrow{OQ} \\
& = & \begin{pmatrix} \cos b \\ \sin b \end{pmatrix} . \begin{pmatrix} \cos a \\ \sin a \end{pmatrix} \\
& = & \cos a.\cos b + \sin a.\sin b
\end{array}
$$

Par les formules précédentes, on peut alors en déduire :

$$\cos(a+b) = \cos a.\cos b - \sin a.\sin b$$

$$\sin(a+b) = \sin a.\cos b + \cos a.\sin b$$

$$\sin(a-b) = \sin a.\cos b - \cos a.\sin b$$

En sommant puis en soustrayant les deux premières entre elles et les deux suivantes entre elles, on obtient

$$\cos(a-b) + \cos(a+b) = 2\cos a \cos b$$

$$\cos(a-b) - \cos(a+b) = 2\sin a \sin b$$

$$\sin(a-b) + \sin(a+b) = 2\sin a \cos b$$

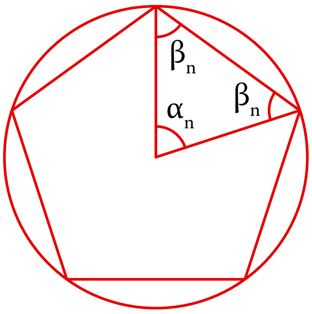
En remplaçant b par a, on obtient :

$$1 + \cos(2a) = 2(\cos a)^2$$

$$1 - \cos(2a) = 2(\sin a)^2$$

$$\sin(2a) = 2\sin a \cos a$$

4. Polygônes réguliers :



On rappelle juste que l'angle au centre d'un polygône régulier à n côtés est donné par $\boxed{\alpha_n = \frac{2\pi}{n}}$ et qu'un angle extérieur est donné par $\boxed{\beta_n = \pi(\frac{1}{2} - \frac{1}{n})}$.

5. Barycentres :

Soit $n \in \mathbb{N} \setminus \{0\}$.
Soient $A_1, A_2, \ldots, A_n$ n points du plan et $\alpha_1, \alpha_2, \ldots, \alpha_n$ n réels tels que $\sum_{k=1}^{n} \alpha_k \neq 0$. Le barycentre G de $A_1, A_2, \ldots, A_n$ pour les coefficients $\alpha_1, \alpha_2, \ldots, \alpha_n$ est défini par $\sum_{k=1}^{n} \alpha_k.\overrightarrow{GA_k} = \overrightarrow{0}$.
On dit que G est l'isobarycentre des points $A_1, A_2, \ldots, A_n$ si G est le barycentre de $A_1, A_2, \ldots, A_n$ pour les coefficients $1, 1, \ldots, 1$.

Remarque 2. *La définition du barycentre est équivalente à :* $\overrightarrow{OG} = \frac{\sum_{k=1}^{n} \alpha_k \overrightarrow{OA_k}}{\sum_{k=1}^{n} \alpha_k}$.
En effet,

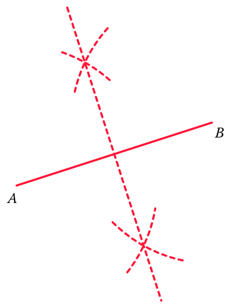
$$
\begin{array}{rcl}
\sum_{k=1}^{n} \alpha_k.\overrightarrow{GA_k} = \overrightarrow{0} & \Leftrightarrow & \sum_{k=1}^{n} \alpha_k.(\overrightarrow{GO} + \overrightarrow{OA_k}) = \overrightarrow{0} \\
& \Leftrightarrow & \sum_{k=1}^{n} \alpha_k \overrightarrow{OG} = \sum_{k=1}^{n} \alpha_k \overrightarrow{OA_k} \\
& \Leftrightarrow & \overrightarrow{OG} = \frac{\sum_{k=1}^{n} \alpha_k \overrightarrow{OA_k}}{\sum_{k=1}^{n} \alpha_k}
\end{array}
$$

Pour utiliser ces rappels, on calcule les coordonnées des points constructibles à la première étape (et on pourra se dispenser de calculer les coordonnées des points de la deuxième étape)...

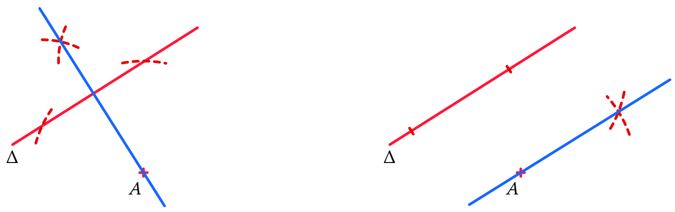
- $\mathcal{CONS}_0 = \{(0,0); (1,0)\}$,
- $\mathcal{CONS}_1 = \{(0,0); (1,0); (-1,0); (2,0); (\frac{1}{2}, \frac{\sqrt{3}}{2}); (\frac{1}{2}, -\frac{\sqrt{3}}{2})\}$,
- $\mathcal{CONS}_2 = \dots$

On va à présent s'intéresser aux constructions classiques qui sont indispensables pour savoir réaliser des constructions plus complexes :

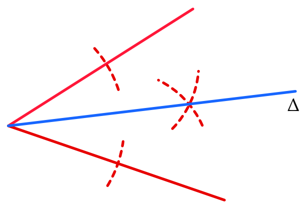
1. Si A et B sont deux points constructibles, alors le milieu du segment $[AB]$ est constructible.



2. Si Δ est une droite constructible et P est un point constructible, la droite passant par P et perpendiculaire (resp. : parallèle) à Δ est constructible.



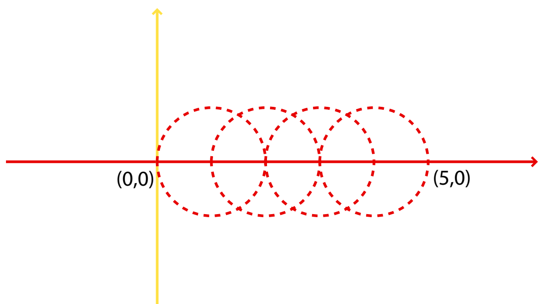
3. On en déduit que $x \in \mathbb{R}$ est constructible $\Leftrightarrow \exists y \in \mathbb{R}, (x,y) \in \mathcal{CONS}$.
   En effet, si $(x,y) \in \mathcal{CONS}$, il suffit de construire la parallèle à l'axe des ordonnées (qui est constructible) passant par le point (x,y).
4. La bissectrice d'un angle est constructible.



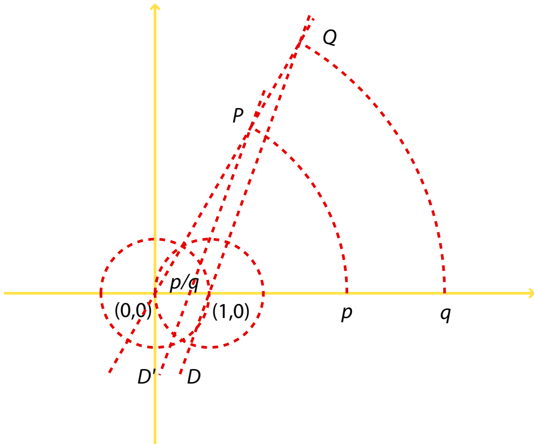
Ces constructions simples nous donnent déjà des propriétés de constructibilité intéressants :

1. Tout entier relatif est constructible.
   Montrons par récurrence que $\forall n \in \mathbb{N} \setminus \{0\}, n-1$ *et* n sont constructibles.
   - 0 et 1 sont constructibles car $(0,0) \in \mathcal{CONS}$ et $(1,0) \in \mathcal{CONS}$,
   - supposons que $n-1$ et n soient constructibles. Alors on trace le cercle de centre $(n,0)$ et passant par $(n-1,0)$. Il est constructible et coupe l'axe des abscisses (constructible) en $(n+1,0)$. Donc $n+1$ est constructible.

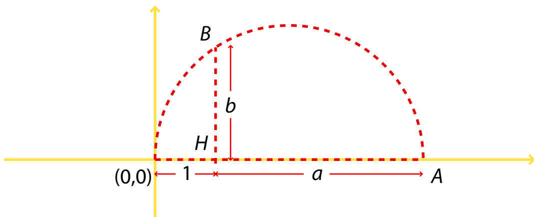
   Pour construire un entier négatif, on fait le même travail dans les négatifs.



2. Tout rationnel est constructible.
   On utilise le théorème de Thalès : Si $(p,q) \in \mathbb{N} \times (\mathbb{N} \setminus \{0\})$, on reporte p en P et q en Q sur une droite déjà construite passant par 0. On trace ensuite la droite D passant par Q et $(1,0)$, puis la droite D' passant P et parallèle à D. D' coupe l'axe des abscisses (constructible) en $\frac{p}{q}$.



3. Si $x \geq 0$ est constructible, $\sqrt{x}$ est constructible.
   On utilise la construction suivante :



   (a) Méthode 1 : On a l'équation :

$$(\frac{a-1}{2})^2 + b^2 = (\frac{a+1}{2})^2$$
$$b^2 = (\frac{a+1}{2})^2 - (\frac{a-1}{2})^2 = a$$
$$b = \sqrt{a}$$

   (b) Méthode 2 : les triangles OHB et BHA sont semblables, donc on a égalité des rapports :

$$\frac{a}{b} = \frac{b}{1} \Rightarrow a = b^2$$

2 Polygones réguliers

On va maintenant s'intéresser à la construction des polygones réguliers. Le but est de placer à la règle et au compas n points régulièrement espacés sur le cercle de centre O et de rayon 1.

Commençons par exemple par la construction du pentagone régulier.
L'angle au centre d'un pentagone régulier étant $\frac{2\pi}{5}$, nous allons construire le réel $\cos(\frac{2\pi}{5})$ et nous obtiendrons ainsi le pentagone.
Calculons tout d'abord ce réel

1. On calcule la somme de vecteurs :

$$\begin{aligned}
\overrightarrow{OA}+\overrightarrow{OB}+\overrightarrow{OC}+\overrightarrow{OD}+\overrightarrow{OE} &= \overrightarrow{OA}+(\cos(\frac{2\pi}{5})\overrightarrow{OA}+\sin(\frac{2\pi}{5})\overrightarrow{OA'})+(\cos(\frac{4\pi}{5})\overrightarrow{OA}+\sin(\frac{4\pi}{5})\overrightarrow{OA'})\\
&\quad+(\cos(\frac{6\pi}{5})\overrightarrow{OA}+\sin(\frac{6\pi}{5})\overrightarrow{OA'})+(\cos(\frac{8\pi}{5})\overrightarrow{OA}+\sin(\frac{8\pi}{5})\overrightarrow{OA'})\\
&= (1+\cos(\frac{2\pi}{5})+\cos(\frac{4\pi}{5})+\cos(\frac{6\pi}{5})+\cos(\frac{8\pi}{5}))\overrightarrow{OA}\\
&\quad+(\sin(\frac{2\pi}{5})+\sin(\frac{4\pi}{5})+\sin(\frac{6\pi}{5})+\sin(\frac{8\pi}{5}))\overrightarrow{OA'}\\
&= (1-2\cos(\frac{\pi}{5})+2\cos(\frac{2\pi}{5}))\overrightarrow{OA}
\end{aligned}$$

On peut faire le même calcul avec le point B et on trouve :

$$(1-2\cos(\frac{\pi}{5})+2\cos(\frac{2\pi}{5}))\overrightarrow{OA}=(1-2\cos(\frac{\pi}{5})+2\cos(\frac{2\pi}{5}))\overrightarrow{OB}$$

Comme $\overrightarrow{OA}$ et $\overrightarrow{OB}$ ne sont pas colinéaires, on en déduit :

$$1-2\cos(\frac{\pi}{5})+2\cos(\frac{2\pi}{5})=0$$

Remarque 3. *O est donc l'isobarycentre des points A, B, C, D, E.*

2. On a donc :

$$2\cos(\frac{2\pi}{5})=4(\cos(\frac{\pi}{5}))^2-2=2\cos(\frac{\pi}{5})-1$$

$$4(\cos(\frac{\pi}{5}))^2-2\cos(\frac{\pi}{5})-1=0$$

$$\Delta=4+16=20=(2\sqrt{5})^2$$

$$\cos(\frac{\pi}{5})=\frac{2\pm2\sqrt{5}}{8}=\frac{1\pm\sqrt{5}}{4}$$

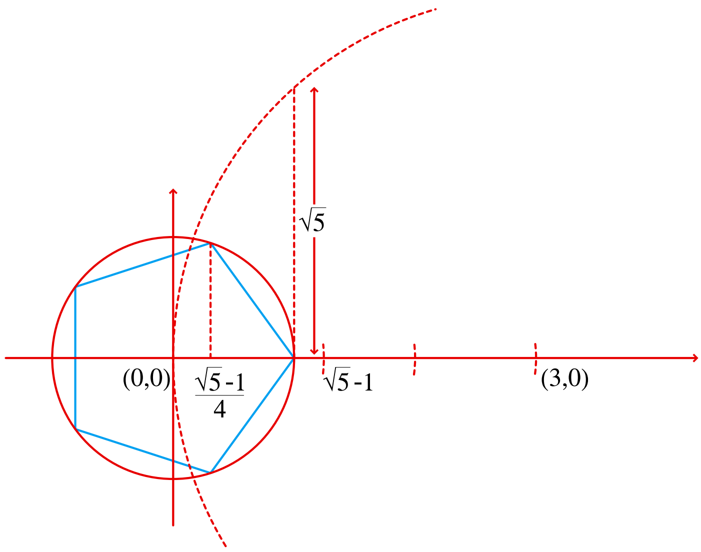
Comme $\cos(\frac{\pi}{5})$ est positif, on trouve le résultat :

$$\boxed{\cos(\frac{\pi}{5})=\frac{1+\sqrt{5}}{4}}$$

On en déduit,

$$\boxed{\cos(\frac{2\pi}{5})=2(\cos(\frac{\pi}{5}))^2-1=\frac{\sqrt{5}-1}{4}}$$

Par conséquent, on sait construire $\cos(\frac{2\pi}{5})$ et il ne reste plus qu'à reconstruire le pentagone :



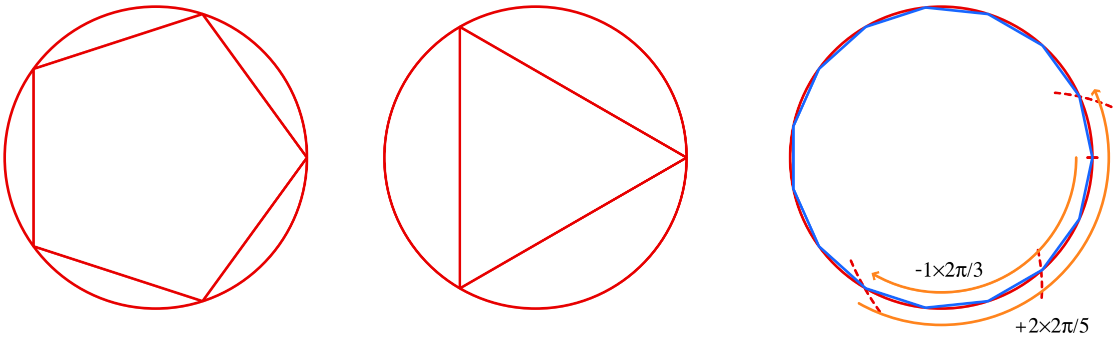
On va maintenant essayer de trouver une condition nécessaire et suffisante sur n pour que le polygone à n côtés soit constructible.

Commençons par un résultat simple qui nous permettra de nous ramener à l'étude des cas où n est une puissance d'un nombre premier.

Rappelons tout d'abord le théorème de Bezout qui affirme que si n et m sont deux entiers et si d est le pgcd (plus grand diviseur commun) de n et de m, alors il existe deux entiers relatifs p et q tels que $np + mq = d$. Par ailleurs, on se souvient de la relation $nm = pgcd(n, m).ppcm(n, m)$.

On voit alors clairement que si l'on sait construire le polygone régulier à n côtés et celui à m côtés, alors on saura construire celui à $ppcm(n, m)$ côtés en reportant q fois l'angle $\frac{2\pi}{n}$ et p fois l'angle $\frac{2\pi}{m}$ (en tenant compte des signes) pour obtenir l'angle $\frac{2\pi}{nm}(mq + np) = \frac{2\pi}{ppcm(n,m)}$.

Appliquons cette méthode à la construction du polygone à 15 côtés :



Ainsi, il ne nous reste à traiter que le cas des entiers de la forme $n = p^\alpha$ où p est un nombre premier et α est un entier.

1. En construisant des bissectrices successives, il est clair que pour tout α, le polygone à 2^α côtés est constructible.
2. On admet par ailleurs que si p est un nombre premier impair et α un entier, alors le polygone à p^α côtés est constructible si et seulement si $\alpha = 1$ et p est de la forme $2^{2^\beta} + 1$.

Remarque 4. *Un nombre de la forme* $2^{2^\beta} + 1$ *est appelé nombre de Fermat. Un tel nombre n'est pas nécessairement premier (par exemple,* $2^{2^5} + 1$ *ne l'est pas). On appelle nombre premier de Fermat un nombre de Fermat qui est premier.*

Le résultat définitif est donc le suivant : le polygone régulier à n côtés est constructible si et seulement si il existe un entier k (positif ou nul), un entier l (positif ou nul) et l nombres premiers de Fermat $f_1, f_2, \ldots, f_l$ tels que $n = 2^k f_1 f_2 \ldots f_l$.

Remarque 5. *Ainsi par exemple, le polygone à 68 côtés est constructible car* $68 = 2^2 17 = 2^2(2^{2^2} + 1)$ *tandis que l'heptagone ne l'est pas.*

Pour plus d'informations, on pourra consulter le livre de Jean-Claude Carrega