Théorème de Pick

Vincent Pilaud

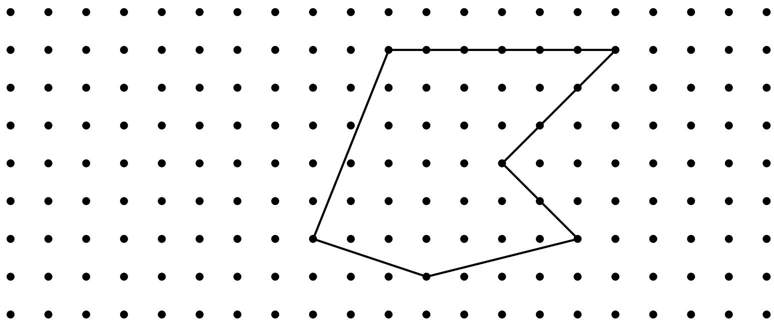
Mars 2004

1 Position du problème

Soit R un réseau de points à maille carrée dont le côté est l'unité de longueur. Soit P un polygône dont les sommets sont les points du réseau R. On note $F(P)$ le nombre de points de R se trouvant sur la frontière de P, $I(P)$ le nombre de points de R se trouvant à l'intérieur de P et $A(P)$ l'aire de P.

Le but du problème est de trouver une formule donnant $A(P)$ en fonction de $F(P)$ et $I(P)$.

Exemple 1. *Sur la figure suivante,* $F(P) = 14$*,* $I(P) = 24$ *et* $A(P) = 30$



2 Intuition de la formule

Question 1. *En choisissant correctement une suite de polygônes, intuiter la dépendance de* $A(P)$ *en* $F(P)$*, puis en* $I(P)$*.*

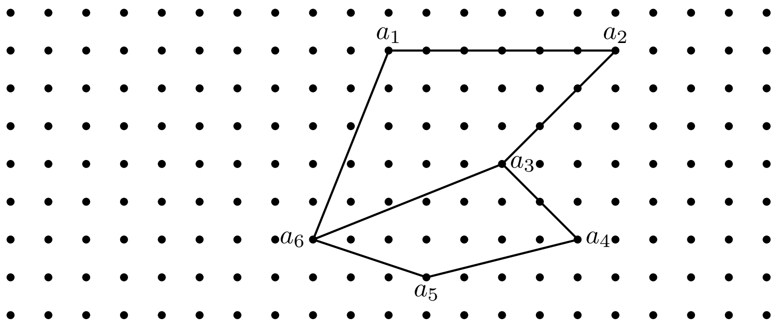
Question 2. *En déduire une formule possible de* $A(P)$ *en fonction de* $F(P)$ *et* $I(P)$*.*

Cette formule (si elle est juste) est appelée formule de Pick et nous allons la démontrer dans le paragraphe suivant.

3 Démonstration

On note $Q(P) = I(P) + F(P)/2 - 1$ et on veut montrer que $A(P) = Q(P)$.

Question 3. *Montrer que la formule de Pick est additive, c'est-à-dire que si* P *est un polygône, de sommets (dans l'ordre)* $a_1, a_2, \ldots, a_n$*, si* $i \in \{1, \ldots, n\}$ *et* $j \in \{i+2, \ldots, n\}$*, et si* P_1 *est le polygône de sommets (dans l'ordre)* $a_1, a_2, \ldots, a_{i-1}, a_i, a_j, a_{j+1}, \ldots, a_n$ *et* P_2 *le polygône de sommets (dans l'ordre)* $a_i, a_{i+1}, \ldots, a_{j-1}, a_j$ *alors* $Q(P) = Q(P_1) + Q(P_2)$*.*



En déduire qu'il suffit de prouver la formule pour les triangles (penser à découper le polygône P en triangles).

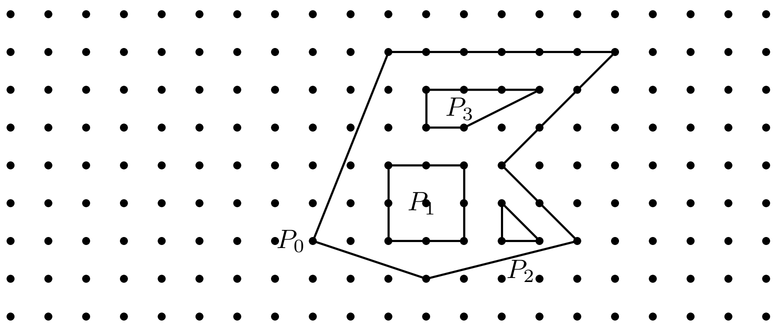
Question 4. *Montrer qu'un triangle quelconque peut être obtenu à partir d'un rectangle dont les côtés sont parallèles aux axes auquel on retire au plus trois triangles rectangles dont les côtés de l'angle droit sont parallèles aux axes et éventuellement un rectangle dont les côtés sont parallèles aux axes.*

En déduire qu'il suffit de prouver la formule pour les triangles rectangles dont les côtés de l'angle droit sont parallèles aux axes et les rectangles dont les côtés sont parallèles aux axes.

Question 5. *Montrer la formule pour les triangles rectangles dont les côtés de l'angle droit sont parallèles aux axes et les rectangles dont les côtés sont parallèles aux axes.*

4 Généralisations

Question 6. *Généraliser cette formule au cas où on a une figure P constituée d'un polygône P_0 avec des trous $P_1, \ldots, P_m$.*



Remarque 1. *On peut aussi généraliser cette formule à la dimension 3. C'est le travail de Reeve.*

5 Correction

Question 1. *Pour la dépendence en $F(P)$, on considére une suite de rectangles U_n de côtés parallèles aux axes, de longueur n et de largeur 1. Alors $F(U_n) = 2(n+1), I(U_n) = 0$ et $A(U_n) = n$.*

Pour la dépendence en $I(P)$, on considére une suite de triangles V_n de sommets $(0,0), (2n+1,1)$ et $(2n+1,2)$. Alors $F(V_n) = 3, I(V_n) = n$ et $A(V_n) = (2n+1)/2$.

Remarque 2. *Tout autre exemple permattant de trouver la formule est aussi bon que celui-ci.*

Question 2. *On en déduit une formule possible : $A(P) = I(P) + F(P)/2 - 1$.*

Question 3. *Soit P est un polygône, de sommets (dans l'ordre) $a_1, a_2, \ldots, a_n$, $i \in \{1, \ldots, n\}$ et $j \in \{i+2, \ldots, n\}$, et P_1 est le polygône de sommets (dans l'ordre) $a_1, a_2, \ldots, a_{i-1}, a_i, a_j, a_{j+1}, \ldots, a_n$ et P_2 le polygône de sommets (dans l'ordre) $a_i, a_{i+1}, \ldots, a_{j-1}, a_j$ alors $Q(P) = Q(P_1) + Q(P_2)$.*

Soit J le nombre de points de R sur $]a_i; a_j[$.

Alors $I(P) = I(P_1) + I(P_2) + J$ et $F(P) = F(P_1) + F(P_2) - 2J - 2$.

$$\begin{aligned} Q(P) &= I(P) + F(P)/2 - 1 = I(P_1) + I(P_2) + J + (F(P_1) + F(P_2) - 2J - 2)/2 - 1 \\ &= (I(P_1) + F(P_1)/2 - 1) + (I(P_2) + F(P_2)/2 - 1) = Q(P_1) + Q(P_2) \end{aligned}$$

Par conséquent, en découpant le polygône de départ en triangles, il suffit de prouver le résultat pour les triangles.

Question 4. *Soit abc un triangle. On note :*

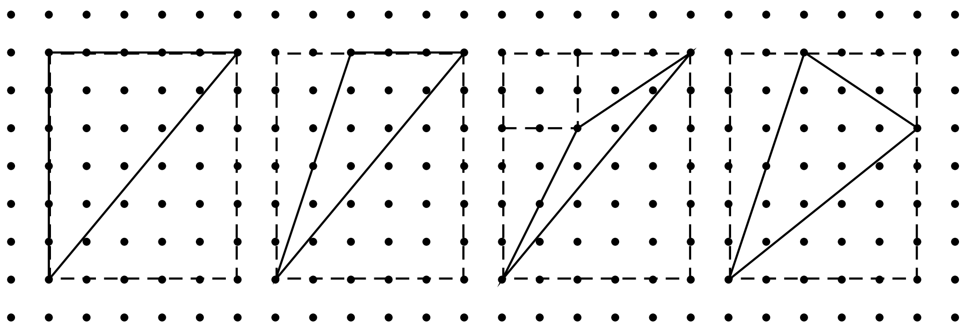
$$a = (x_a, y_a), \quad b = (x_b, y_b), \quad c = (x_c, y_c)$$

$$mx = min(x_a, x_b, x_c), \quad Mx = max(x_a, x_b, x_c), \quad my = min(y_a, y_b, y_c), \quad My = max(y_a, y_b, y_c)$$

et U le rectangle de sommets $(mx, my), (mx, My), (Mx, My), (Mx, my)$.

Il y a alors quatre cas :

1. *Si $a, b,$ et c sont sur trois sommets du rectangle, alors il suffit de retirer un triangle rectangle.*
2. *Si deux sommets du triangle sont des sommets du rectangle et le dernier point est sur le bord du rectangle, alors il suffit de retirer deux triangles.*
3. *Si deux sommets du triangle sont des sommets du rectangle et le dernier point n'est pas sur le bord du rectangle, alors il faut retirer un rectangle et trois triangles.*
4. *Si un sommet du triangle est un sommet du rectangle, alors les deux autres points sont sur le bord du rectangle, et il suffit de retirer trois triangles.*



Question 5. *Pour un rectangle U dont les côtés sont parallèles aux axes, en notant L sa longueur et l sa largeur, $F(U) = 2(L+l)$ et $I(U) = (L-1)(l-1)$. Donc $A(U) = L.l = (L-1)(l-1) + (L+l) - 1 = I(U) + F(U)/2 - 1 = Q(U)$.*

Pour un triangle rectangle V dont les côtés de l'angle droit sont parallèles aux axes, on recole un autre triangle V', identique à V, pour obtenir un rectangle U. On a alors $2A(V) = A(U) = Q(U) = 2Q(V)$ donc $A(V) = Q(V)$.

Question 6. *Soit P un polygône avec m trous qui sont des polygônes $P_1, \ldots, P_m$. Alors,*

$$F(P) = \sum_{i=0}^{m} F(P_i) \text{ et } I(P) = I(P_0) - \sum_{i=1}^{m} (I(P_i) + F(P_i))$$

$$A(P) = A(P_0) - \sum_{i=1}^{m} A(P_i) = I(P_0) + F(P_0)/2 - 1 - \sum_{i=1}^{m} (I(P_i) + F(P_i)/2 - 1) = I(P) + F(P)/2 + m - 1$$