Polynômes de Tchébytchev

Vincent Pilaud

Mars 2004

Le but du problème est de montrer que :

$$\forall n \in \mathbb{N}, \exists! T_n \in \mathbb{Z} \textit{ tel que} \begin{cases} d(T_n) \leq n \\ \forall \theta \in \mathbb{R}, T_n(\cos\theta) = \cos(n\theta) \end{cases}$$

Ces polynômes sont appelés polynômes de Tchébytchev.
On étudira ensuite une propriété de dérivation de ces polynômes.

1 Existence

Question 1 *Calculer T_0, T_1, T_2 et T_3 en linéarisant les cosinus correspondants. (indication : on se rappellera des formules $\cos(a+b) = \cos a \cos b - \sin a \sin b$ et $\sin(a+b) = \cos a \sin b + \sin a \cos b$).*

Question 2 *Montrer que :*

$$\sin(n\theta)\sin\theta = \cos(n\theta)\cos\theta - \cos((n+1)\theta)$$

$$\cos((n+2)\theta) = \cos(n\theta)(2\cos^2\theta - 1) - 2\sin(n\theta)\sin(\theta)\cos\theta$$

En déduire que la suite de polynôme définie par :

$$\boxed{\begin{array}{c} T_0(X) = 1, T_1(X) = X \\ T_{n+2}(X) = 2XT_{n+1}(X) - T_n(X) \end{array}}$$

satisfait le problème posé.

2 Unicité

Soient R_n et S_n deux polynômes satisfaisant le problème posé.

Question 3 *Montrer que : $\forall r \in [0;1], (R_n - S_n)(r) = 0$ et en déduire que $R_n = S_n$.*

3 Une formule de dérivation

Question 4 *Montrer que :*

$$\boxed{(1-X^2)T_n''(X) - XT_n'(X) + n^2 T_n(X) = 0}$$

4 Correction

Question 1 *Il est clair que* $T_0(X) = 1$ *et* $T_1(X) = X$.

On sait que $\cos(2a) = 2\cos^2 a - 1$, *donc* $T_2(X) = 2X^2 - 1$.

Pour le dernier, on écrit :

$$\begin{aligned}
\cos(3a) &= \cos(2a)\cos a - \sin(2a)\sin a = (2\cos a - 1)\cos a - 2\cos a \sin^2 a \\
&= (2\cos^2 a - 1)\cos a - 2\cos a(1-\cos^2 a) = 4\cos^3 a - 3\cos a
\end{aligned}$$

et donc $T_3(X) = 4X^3 - 3X$.

Question 2 *On a la formule :*

$$\cos((n+1)\theta) = \cos(n\theta + \theta) = \cos(n\theta)\cos\theta - \sin(n\theta)\sin\theta$$

d'où le premier résultat.

$$\begin{aligned}
\cos((n+2)\theta) &= \cos(n\theta + 2\theta) = \cos(n\theta)\cos(2\theta) - \sin(n\theta)\sin(2\theta) \\
&= \cos(n\theta)(2\cos^2\theta - 1) - 2\sin(n\theta)\sin(\theta)\cos\theta \\
&= \cos(n\theta)(2\cos^2\theta - 1) - 2(\cos(n\theta)\cos\theta - \cos((n+1)\theta))\cos\theta \\
&= 2\cos\theta\cos((n+1)\theta) - \cos(n\theta)
\end{aligned}$$

et donc en posant par récurrence : $T_{n+2}(X) = 2XT_{n+1}(X) - T_n(X)$, *on a bien le résultat demandé.*

Question 3 $\forall r \in [0;1], \exists \theta \in [0;2\pi]$ *tel que* $\cos\theta = r$ *et donc* $(R_n - S_n)(r) = (R_n - S_n)(\cos\theta) = R_n(\cos\theta) - S_n(\cos\theta) = \cos(n\theta) - \cos(n\theta) = 0$.

Par conséquent, $(R_n - S_n)$ *a une infinité de racines, donc c'est le polynôme nul et* $R_n = S_n$.

Question 4 *Il suffit de dériver terme à terme :* $T_n(\cos\theta) = \cos(n\theta)$

$$T_n'(\cos\theta)(-\sin\theta) = -n\sin(n\theta)$$

$$T_n''(\cos\theta)(\sin^2\theta) - T_n'(\cos\theta)\cos\theta = -n^2\cos(n\theta)$$

$$T_n''(\cos\theta)(1-\cos^2\theta) - T_n'(\cos\theta)\cos\theta + n^2\cos(n\theta) = 0$$

$(1-X^2)T_n''(X) - XT_n'(X) + n^2T_n(X)$ *admet donc une infinité de racines, donc* $(1-X^2)T_n''(X) - XT_n'(X) + n^2T_n(X) = 0$.