Polynômes

Vincent Pilaud

Mars 2004

1 Définitions

1.1 Polynôme, racine d'un polynôme

Définition 1 *Soit $\mathbb{A}$ un anneau (du type $\mathbb{Z}$, $\mathbb{Q}$ ou $\mathbb{R}$).*

Soient $n \in \mathbb{N}$ et $a_0, \ldots, a_n \in \mathbb{A}$, avec $a_n \neq 0$. Alors $P(X) = a_n X^n + \ldots + a_1 X + a_0$ est appelé polynôme à coefficients dans $\mathbb{A}$.

On appelle degré de P l'entier $d(P) = n$ et k-ième coefficient de P l'élément $c_k(P) = a_k$ pour $k = 0, \ldots, n$.

0 est aussi un polynôme, appelé polynôme nul. Par convention, on dit que son degré est $-\infty$.

L'ensemble des polynômes à coefficients dans $\mathbb{A}$ est noté $\mathbb{A}[X]$.

On dit que deux polynômes sont égaux si ils ont exactement les mêmes coefficients.

Si $P(X) = a_n X^n + \ldots + a_1 X + a_0$ est un polynôme à coefficients dans $\mathbb{A}$, et si $\lambda \in \mathbb{A}$, alors on note $P(\lambda) = a_n \lambda^n + \ldots + a_1 \lambda + a_0$.

Si $\lambda \in \mathbb{A}$, on dit que λ est une racine de P dans $\mathbb{A}$ si $P(\lambda) = 0$.

Exemple 1
1. *$P_1(X) = \frac{3}{5}X - 1$ est un polynôme de degré 1 à coefficients dans $\mathbb{Q}$ (ou dans $\mathbb{R}$). Il admet une unique racine $\frac{5}{3}$ dans $\mathbb{Q}$ (ou dans $\mathbb{R}$).*
2. *$P_2(X) = X^2 + 3X + 1$ est un polynôme de degré 2 dans $\mathbb{Z}$ (ou dans $\mathbb{Q}$, ou dans $\mathbb{R}$).*
   Dans $\mathbb{R}$, ses racines sont $\frac{-3+\sqrt{5}}{2}$ et $\frac{-3-\sqrt{5}}{2}$. On voit donc qu'il n'a aucune racine ni dans $\mathbb{Z}$, ni dans $\mathbb{Q}$.

Proposition 1
1. *Le polynome nul admet tout nombre pour racine.*
2. *Si $a \in \mathbb{R} \setminus \{0\}$, le polynome $P(X) = a$ n'admet aucune racine.*
3. *Si $a, b \in \mathbb{R}$, avec $a \neq 0$, le polynome $P(X) = aX + b$ admet une unique racine $\frac{-b}{a}$.*
4. *Si $a, b, c \in \mathbb{R}$, avec $a \neq 0$, le polynome $P(X) = aX^2 + bX + c$ admet :*
   - *deux racines $\frac{-b+\sqrt{\Delta}}{2a}$ et $\frac{-b-\sqrt{\Delta}}{2a}$ si $\Delta = b^2 - 4ac > 0$,*
   - *une racine $\frac{-b}{2a}$ si $\Delta = 0$,*
   - *aucune racine si $\Delta < 0$.*
5. *On sait aussi trouver les racines d'un polynôme de degré 3 (cf suite du cours).*

Démonstration 1 *On ne démontre ici que le quatrième point :*

On se rappelle de l'identité remarquable : $(x + y)^2 = x^2 + 2xy + y^2$.

On fait le calcul :

$$\begin{aligned} aX^2 + bX + c &= a[X^2 + 2\frac{b}{2a}X + (\frac{b}{2a})^2] - \frac{b^2}{4a} + c \\ &= a[X + \frac{b}{2a}]^2 - \frac{b^2 - 4ac}{4a} \end{aligned}$$

On pose donc : $Y = X + \frac{b}{2a}$ et $\Delta = b^2 - 4ac$, et on doit résoudre $aY^2 - \frac{\Delta}{4a} = 0$, ce qui est équivalent (puisqu'on a supposé que $a \neq 0$) à : $Y^2 = \frac{\Delta}{4a^2}$.
- *Si $\Delta < 0$, on n'a pas de solution car un carré est toujours positif,*
- *Si $\Delta = 0$, $Y = 0$ et on a une racine double : $x = \frac{-b}{2a}$,*
- *Si $\Delta > 0$, $Y = \pm\sqrt{\Delta}$ et on a deux racines : $x_1 = \frac{-b+\sqrt{\Delta}}{2a}$ et $x_2 = \frac{-b-\sqrt{\Delta}}{2a}$.*

$\square$

1.2 Opérations usuelles

Définition 2 *Soient $m, n \in \mathbb{N}$, avec par exemple $m \geq n$.*

Soient $P(X) = a_m X^m + \ldots + a_1 X + a_0$ et $Q(X) = b_n X^n + \ldots + b_1 X + b_0$ deux polynômes à coefficients dans $\mathbb{A}$, et $\lambda \in \mathbb{A}$. On définit alors les polynômes $P+Q, \lambda P$ et $P \times Q$ par :

$$(P+Q)(X) = a_m X^m + \ldots + a_{n+1} X^{n+1} + (a_n + b_n) X^n + \ldots + (a_1 + b_1) X + (a_0 + b_0)$$

$$(\lambda P)(X) = \lambda a_m X^m + \ldots + \lambda a_1 X + \lambda a_0$$

$$(P \times Q)(X) = c_{m+n} X^{m+n} + \ldots + c_1 X + c_0 \text{ avec } c_i = a_0 b_i + a_1 b_{i-1} + \ldots + a_i b_0$$

Remarque 1 *On rappelle une notation fort utile. Pour $n \in \mathbb{N}$ et $x_0, x_1, \ldots, x_n \in \mathbb{A}$, on note :*

$$x_0 + x_1 + \ldots + x_n = \sum_{k=0}^{n} x_k \text{ et } x_0 \times x_1 \times \ldots \times x_n = \prod_{k=0}^{n} x_k$$

On a avec cette notation :

$$P(X) = \sum_{k=0}^{m} a_k X^k \text{ et } Q(X) = \sum_{k=0}^{n} b_k X^k$$

$$(P+Q)(X) = \sum_{k=0}^{\max(m,n)} (a_k + b_k) X^k, \text{ avec } a_k = 0 \text{ si } k > m \text{ et } b_k = 0 \text{ si } k > n$$

$$(\lambda P)(X) = \sum_{k=0}^{m} \lambda a_k X^k$$

$$(P \times Q)(X) = \sum_{k=0}^{m+n} (\sum_{j=0}^{k} a_j b_{k-j}) X^k$$

Proposition 2 *Si P et Q sont deux polynômes non nuls à coefficients dans $\mathbb{A}$, alors :*

$$d(P+Q) \leq d(P) + d(Q) \text{ et } d(P \times Q) = d(P)d(Q)$$

$$\text{si } d(P) > d(Q), d(P+Q) = d(P)$$

1.3 Dérivation formelle

Définition 3 *La dérivée du polynôme $P = \sum_{k=0}^{n} a_k X^k$ est le polynôme :*

$$D(P)(X) = P'(X) = \sum_{k=0}^{n-1} (k+1) a_{k+1} X^k$$

On définit par récurrence : $D^{m+1}(P)(X) = P^{(m+1)}(X) = D(D^m(P))(X)$.

Proposition 3 *Soient $P(X) = a_m X^m + \ldots + a_1 X + a_0$ et $Q(X) = b_n X^n + \ldots + b_1 X + b_0$ deux polynômes à coefficients dans $\mathbb{A}$, et $\lambda \in \mathbb{A}$.*

$$(P+Q)'(X) = P'(X) + Q'(X)$$

$$(\lambda P)'(X) = \lambda P'(X)$$

$$(P \times Q)'(X) = P'(X)Q(X) + P(X)Q'(X)$$

Démonstration 2 *On écrit : $P(X) = \sum_{k=0}^{m} a_k X^k$ et $Q(X) = \sum_{k=0}^{n} b_k X^k$.*

1. *$(P+Q)(X) = \sum_{k=0}^{\max(m,n)} (a_k + b_k) X^k$, avec $a_k = 0$ si $k > m$ et $b_k = 0$ si $k > n$. Par conséquent,*

$$(P+Q)'(X) = \sum_{k=0}^{\max(m,n)-1} (k+1)(a_{k+1} + b_{k+1}) X^k = \sum_{k=0}^{m-1} (k+1) a_{k+1} X^k + \sum_{k=0}^{n-1} (k+1) b_{k+1} X^k = P'(X) + Q'(X)$$

2. $\lambda P(X) = \sum_{k=0}^{m} \lambda a_k X^k$, *et donc,*

$$(\lambda P)'(X) = \sum_{k=0}^{m-1}(k+1)\lambda a_{k+1}X^k = \lambda \sum_{k=0}^{m-1}(k+1)a_{k+1}X^k = \lambda P'(X)$$

3. $P \times Q(X) = \sum_{k=0}^{m+n}(\sum_{j=0}^{k} a_j b_{k-j})X^k$, *et donc,*

$$\begin{aligned} P'(X)Q(X) + P(X)Q'(X) &= \sum_{k=0}^{m-1+n}(\sum_{j=0}^{k}(j+1)a_{j+1}b_{k-j})X^k + \sum_{k=0}^{m+n-1}(\sum_{j=0}^{k} a_j(k-j+1)b_{k-j+1})X^k \\ &= \sum_{k=0}^{m+n-1}(\sum_{j=0}^{k+1}(j+k-j+1)a_j b_{k+1-j})X^k \\ &= \sum_{k=0}^{m+n-1}(k+1)(\sum_{j=0}^{k+1} a_j b_{k+1-j})X^k = (P \times Q)'(X) \end{aligned}$$

□

Proposition 4 *Formule de Leibniz :*

$$(P \times Q)^{(n)}(X) = \sum_{k=0}^{n} C_n^k P^{(k)}(X) Q^{(n-k)}(X)$$

Démonstration 3 *Par récurrence sur n :*

- *le résultat est vrai pour* $n = 0$
- *supposons le résultat vrai pour* n *et montrons qu'alors il est vrai pour* $n+1$ *:*

$$\begin{aligned} (P \times Q)^{(n+1)}(X) &= D^{n+1}(P \times Q)(X) = D(D^n(P \times Q))(X) \\ &= D(\sum_{k=0}^{n} C_n^k P^{(k)}(X)Q^{(n-k)}(X)) = \sum_{k=0}^{n} C_n^k D(P^{(k)}(X)Q^{(n-k)}(X)) \\ &= \sum_{k=0}^{n} C_n^k (P^{(k+1)}(X)Q^{(n-k)}(X) + P^{(k)}(X)Q^{(n-k+1)}(X)) \\ &= \sum_{k=0}^{n+1}(C_n^{k-1} + C_n^k)P^{(k)}(X)Q^{(n+1-k)}(X) = \sum_{k=0}^{n+1} C_{n+1}^k P^{(k)}(X)Q^{(n+1-k)}(X) \end{aligned}$$

□

1.4 Relations racines coefficients

Proposition 5 *Soit* P *un polynôme de degré* n*. Alors* $P(X)$ *admet au plus* n *racines.*

Démonstration 4 *Par contraposée : supposons que* $\lambda_1, \ldots, \lambda_{n+1}$ *soient* $n+1$ *nombres distincts qui annulent* $P(X)$*. Alors pour chaque* $i \in \{1; \ldots; n+1\}$*, on peut factoriser* $P(X)$ *par* $(X - \lambda_i)$*, ce qui donne :* $P(X) = \prod_{i=1}^{n+1}(X - \lambda_i).Q(X)$ *et donc* P *est de degré supérieur ou égal à* $n+1$*.*

□

Corollaire 1 *Un polynôme qui a plus de racines que son degré (resp. une infinité de racines) est le polynôme nul.*

Définition 4 *Un polynôme qui a autant de racines que son degré est dit scindé.*

Proposition 6 *Soit* $P(X) = \sum_{k=0}^{n} a_k X^k$ *un polynôme scindé de racines* $\lambda_1, \ldots, \lambda_n$*. On a alors :*

$$\forall k \in \{1; \ldots; n\}, \sigma_k = \sum_{(i_1;i_2;\ldots;i_k) \in \{1;\ldots;n\}^k} \lambda_{i_1}\lambda_{i_2}\ldots\lambda_{i_k} = (-1)^k \frac{a_{n-k}}{a_n}$$

Démonstration 5 *Il suffit d'écrire :*

$$P(X) = a_n \prod_{k=1}^{n}(X - \lambda_k) = a_n \sum_{k=0}^{n}(-1)^k \sigma_{n-k} X^k$$

Mais $P(X) = \sum_{k=0}^{n} a_k X^k$ *et donc en identifiant les cn-oefficients,* $a_k = a_n(-1)^{n-k}\sigma_{n-k}$ *et donc* $\sigma_k = (-1)^k \frac{a_{n-k}}{a_n}$*.*

□

2 Arithmétique sur les polynômes

On peut étudier l'arithmétique sur les polynômes avec les mêmes notions que l'arithmétique sur les entiers. On attendra donc le cours de l'année prochaine.

3 Problèmes classiques

3.1 Interpolation

On se donne $n \in \mathbb{N}$, $x_0, \dots, x_n \in \mathbb{A}$ distincts et $a_0, \dots, a_n \in \mathbb{A}$.
La question est de savoir si il existe un polynôme $P(X)$ de degré au plus n tel que $\forall i \in \{0; \dots; n\}, P(x_i) = a_i$.

Proposition 7 *1. Pour tout $n \in \mathbb{N}$, $x_0, \dots, x_n \in \mathbb{A}$ distincts, le polynôme :*

$$\mathcal{L}_k(X) = \frac{\prod_{l=0, l\neq k}^{n}(X - x_l)}{\prod_{l=0, l\neq k}^{n}(x_k - x_l)}$$

est l'unique polynôme tel que :

$$\begin{cases} d(\mathcal{L}_k) = n \\ \mathcal{L}_k(x_k) = 1 \\ \forall i \in \{0; 2; \dots; k-1; k+1; \dots; n\}, \mathcal{L}_k(x_i) = 0 \end{cases}$$

2. Par conséquent, le polynôme :

$$P(X) = \sum_{k=0}^{n} a_k \mathcal{L}_k(X)$$

est l'unique polynôme tel que : $d(P) = n$ et $\forall i \in \{0; \dots; n\}, P(x_i) = a_i$.

Démonstration 6 *1. Montrons tout d'abord l'unicité dans les deux cas :*
Soient $P(X)$ et $Q(X)$ deux polynômes tels que $d(P) = d(Q) = n$ et $\forall i \in \{0; \dots; n\}, P(x_i) = Q(x_i) = a_i$. Alors le polynôme $P - Q$ est de degré inférieur ou égal à n est admet x_i pour racine pour $i \in \{0; \dots; n\}$. Il a donc plus de racines que son degré, donc c'est le polynôme nul, et donc $P(X) = Q(X)$.

2. D'autre part,

$$\mathcal{L}_k(x_k) = \frac{\prod_{l=0, l\neq k}^{n}(x_k - x_l)}{\prod_{l=0, l\neq k}^{n}(x_k - x_l)} = 1$$

$$\forall i \in \{0; 2; \dots; k-1; k+1; \dots; n\}, \mathcal{L}_k(x_i) = \frac{(x_i - x_i)\prod_{l=0, l\notin\{k;i\}}^{n}(x_i - x_l)}{\prod_{l=0, l\neq k}^{n}(x_k - x_l)} = 0$$

3. Enfin,

$$\forall i \in \{0; \dots; n\}, P(x_i) = \sum_{k=0}^{n} a_k \mathcal{L}_k(x_i) = a_i \mathcal{L}_i(x_i) + \sum_{k=0, k\neq i}^{n} a_k \mathcal{L}_k(x_i) = a_i$$

□

3.2 Racines d'un polynôme du troisième degré

On considère un polynôme du troisième degré : $P(X) = aX^3 + bX^2 + cX + d$, avec $a \neq 0$. Le but est de trouver sous quelles condition(s) sur a, b, c et d ce polynôme admet une ou plusieurs racines et de les trouver en fonction de a, b, c, d.

Remarque 2 *Notons déjà que $P(X)$ a au moins une racine. En effet :*

$$\lim_{x \to \infty} P(x) = sgn(a)\infty, \lim_{x \to -\infty} P(x) = -sgn(a)\infty, \text{ et } P(X) \text{ est continue,}$$

donc par le théoème des valeurs intermédiaires, P(X) s'annule sur $\mathbb{R}$.

3.2.1 Première étape

Le but de la première étape est de se ramener à un polynôme de la forme : $Q(X) = X^3 + pX + q$.
Pour cela, on rappelle l'identité remarquable : $(x + y)^3 = x^3 + 3x^2y + 3xy^2 + y^3$.
On écrit alors :

$$\begin{aligned}
P(X) &= aX^3 + bX^2 + cX + d \\
&= a[X^3 + 3X^2(\frac{b}{3a}) + 3X(\frac{b}{3a})^2 + (\frac{b}{3a})^3] - \frac{b^2}{3a}X - \frac{b^3}{27a^2} + cX + d \\
&= a[X + \frac{b}{3a}]^3 + (c - \frac{b^2}{3a})X + (d - \frac{b^3}{27a^2}) \\
&= a[X + \frac{b}{3a}]^3 + (c - \frac{b^2}{3a})[X + \frac{b}{3a}] - (c - \frac{b^2}{3a})\frac{b}{3a} + (d - \frac{b^3}{27a^2}) \\
&= a[X + \frac{b}{3a}]^3 + (c - \frac{b^2}{3a})[X + \frac{b}{3a}] + (d - \frac{bc}{3a} + \frac{2b^3}{27a^2})
\end{aligned}$$

Donc on pose :

$$Y = X + (\frac{b}{3a}), p = \frac{(c - \frac{b^2}{3a})}{a} \text{ et } q = \frac{(d - \frac{bc}{3a} + \frac{2b^3}{27a^2})}{a}$$

et on doit résoudre : $aY^3 + apY + aq = 0$, ce qui revient (puisque $a \neq 0$) à résoudre $Y^3 + pY + q = 0$.

3.2.2 Seconde étape

On cherche une racine de $Q(X) = X^3 + pX + q$. On pose $X = u + v$ en imposant $3uv = -p$, et on a donc :

$$\begin{aligned}
\begin{cases} (u+v)^3 + p(u+v) + q = 0 \\ 3uv = -p \end{cases} &\Leftrightarrow \left\{ (u^3 + 3u^2v + 3uv^2 + v^3) + p(u+v) + q = 0 \right. \\
&\Leftrightarrow \begin{cases} (u^3 + v^3) + (u+v)(3uv - p) + q = 0 \\ 3uv = -p \end{cases} \\
&\Leftrightarrow \begin{cases} u^3 + v^3 = -q \\ 3uv = -p \end{cases}
\end{aligned}$$

En posant $U = u^3$ et $V = v^3$, on a donc :

$$\begin{cases} U + V = -q \\ UV = \frac{-p^3}{27} \end{cases}$$

Par conséquent, U et V sont les racines du trinôme du second degré : $X^2 + qX - \frac{p^3}{27}$. On calcule son discriminant :

$$\Delta = q^2 + 4\frac{p^3}{27}$$

On a alors deux cas en fonction du signe du discriminant :

1. Si $\Delta \geq 0$, alors

$$U = \frac{-q + \sqrt{\Delta}}{2} \text{ et } V = \frac{-q - \sqrt{\Delta}}{2} \text{ et } x_1 = \sqrt[3]{\frac{-q + \sqrt{\Delta}}{2}} + \sqrt[3]{\frac{-q - \sqrt{\Delta}}{2}} \text{ est une racine de } Q(X)$$

2. Si $\Delta < 0$, on ne trouve pas de racine de cette manière. On attend le cours de l'année prochaine.

3.2.3 Troisième étape

On connaît une racine x_1 de $Q(X) = X^3 + pX + q$ et on cherche si il en existe d'autres.
On factorise alors : $Q(X) = X^3 + pX + q = (X - x_1)(X^2 + x_1X + p + x_1^2)$.
Il reste donc à trouver les racines de : $R(X) = (X^2 + x_1X + p + x_1^2)$, dont le discriminant est : $\delta = x_1^2 - 4(p + x_1^2) = -4p - 3x_1^2$, donc on a à nouveau trois cas :

1. Si $\delta = 0$, on a une racine simple x_1 et une racine double $\frac{-x_1}{2}$,
2. Si $\delta > 0$, on a trois racines rélles distinctes : x_1, $\frac{-x_1+\sqrt{\delta}}{2}$ *et* $\frac{-x_1-\sqrt{\delta}}{2}$
3. Si $\delta < 0$, on a une seule racine réelle : x_1,

3.2.4 Quatrième étape

On peut relier les étapes 2 et 3 en montrant que $sgn(\Delta) = -sgn(\delta)$.

3.2.5 Conclusion

Méthode générale pour trouver les racines de $P(X) = aX^3 + bX^2 + cX + d$:

1. On se ramène à $Q(X) = X^3 + pX + q$,
2. On calcule $\widetilde{\Delta} = 4p^3 + 27q^2$
3. On a suivant les cas :
   - $\widetilde{\Delta} = 0$: 1 racine simple $(2\sqrt[3]{\frac{-q}{2}})$ et 1 racine double$(-\sqrt[3]{\frac{-q}{2}})$
   - $\widetilde{\Delta} > 0$: 1 racine simple $(\sqrt[3]{\frac{-q}{2} + \sqrt{\frac{q^2}{4} + \frac{p^3}{27}}} + \sqrt[3]{\frac{-q}{2} - \sqrt{\frac{q^2}{4} + \frac{p^3}{27}}})$
   - $\widetilde{\Delta} < 0$: 3 racine simples (On ne les connaît pas pour l'instant)

3.2.6 Exemples

Exemple 2 *On cherche les racines de* $P_1(X) = X^3 - 3X^2 + X - 3$.

1. *On écrit :*
$$X^3 - 3X^2 + X - 3 = [X^3 + 3X^2(-1) + 3X(-1)^2 + (-1)^3] - 3X + 1 + X - 3 = [X - 1]^3 - 2[X - 1] - 4$$
On pose $Y = X - 1$ *et on doit résoudre* $Y^3 - 2Y - 4 = 0$.
2. *On calcule :* $\Delta = 4(-2)^3 + 27(-4)^2 = 400 > 0$.
3. *Par conséquent, on a une seule racine :*
$$\sqrt[3]{\frac{-(-4)}{2} + \sqrt{\frac{(-4)^2}{4} + \frac{(-2)^3}{27}}} + \sqrt[3]{\frac{-(-4)}{2} - \sqrt{\frac{(-4)^2}{4} + \frac{(-2)^3}{27}}} = 2$$
4. *Donc la seule racine de* $P_1(X)$ *est* 3.

Remarque 3 *Cette dernière expression est horrible. On peut tout de suite voir que* 3 *est racine de l'équation.*

Exemple 3 *On cherche les racines de* $P_2(X) = X^3 - 12X^2 + 41X - 42$.

1. *On écrit :*
$$X^3-3X^2+X-3 = [X^3+3X^2(-4)+3X(-4)^2+(-4)^3]-48X+64+41X-42 = [X-4]^3-7X+22 = [X-4]^3-7[X-4]-6$$
On pose $Y = X - 4$ *et on doit résoudre* $Y^3 - 7Y - 6 = 0$.
2. *On calcule :* $\Delta = 4(-7)^3 + 27(-6)^2 = -400 < 0$.
3. *Par conséquent, on a trois racine mais on ne sait à priori pas les trouver.*
4. *Cependant,* -2 *est racine évidente de* $Y^3 - 7Y - 6 = 0$. *On calcule alors* $\delta = -4(-7) - 3(-2)^2 = 16$ *et on a les solutions :*
$$-2, \frac{2 + \sqrt{16}}{2} = 3 \textit{ et } \frac{2 - \sqrt{16}}{2} = -1$$
5. *donc les racines de* $P_2(X)$ *sont* 2, 3 *et* 7.

3.3 Polynômes de Tchébytchev

Proposition 8

$$\forall n \in \mathbb{N}, \exists! T_n \in \mathbb{Z} \text{ tel que} \begin{cases} d(T_n) \leq n \\ \forall \theta \in \mathbb{R}, T_n(\cos\theta) = \cos(n\theta) \end{cases}$$

Ces polynômes sont appelés polynômes de Tchébytchev.

Démonstration 7 1. ***Existence***

On a la formule :

$$\cos((n+1)\theta) = \cos(n\theta + \theta) = \cos(n\theta)\cos\theta - \sin(n\theta)\sin\theta$$

$$d'où\ \sin(n\theta)\sin\theta = \cos(n\theta)\cos\theta - \cos((n+1)\theta)$$

$$\begin{aligned}
\cos((n+2)\theta) &= \cos(n\theta + 2\theta) = \cos(n\theta)\cos(2\theta) - \sin(n\theta)\sin(2\theta) \\
&= \cos(n\theta)(2\cos^2\theta - 1) - 2\sin(n\theta)\sin(\theta)\cos\theta \\
&= \cos(n\theta)(2\cos^2\theta - 1) - 2(\cos(n\theta)\cos\theta - \cos((n+1)\theta))\cos\theta \\
&= 2\cos\theta\cos((n+1)\theta) - \cos(n\theta)
\end{aligned}$$

et donc en posant par récurrence :

$$\boxed{\begin{array}{c} T_0(X) = 1, T_1(X) = X \\ T_{n+2}(X) = 2XT_{n+1}(X) - T_n(X) \end{array}}$$

on a bien la propriété demandée.

2. ***Unicité***

Soient R_n et S_n deux polynômes satisfaisant le problème posé. Alors $\forall r \in [0;1], \exists \theta \in [0;2\pi[$ tel que $\cos\theta = r$ et donc $(R_n - S_n)(r) = (R_n - S_n)(\cos\theta) = R_n(\cos\theta) - S_n(\cos\theta) = \cos(n\theta) - \cos(n\theta) = 0$.
Par conséquent, $(R_n - S_n)$ a une infinité de racines, donc c'est le polynôme nul et $R_n = S_n$.

3. ***Dérivation***

On dérive terme à terme : $T_n(\cos\theta) = \cos(n\theta)$

$$T_n'(\cos\theta)(-\sin\theta) = -n\sin(n\theta)$$

$$T_n''(\cos\theta)(\sin^2\theta) - T_n'(\cos\theta)\cos\theta = -n^2\cos(n\theta)$$

$$T_n''(\cos\theta)(1 - \cos^2\theta) - T_n'(\cos\theta)\cos\theta + n^2\cos(n\theta) = 0$$

$(1 - X^2)T_n''(X) - XT_n'(X) + n^2T_n(X)$ *admet donc une infinité de racines, donc :*

$$\boxed{(1 - X^2)T_n''(X) - XT_n'(X) + n^2T_n(X) = 0}$$