Empilements compacts

Vincent Pilaud

Mars 2004

1 Exercice

Montrer que si l'on place cinq points dans un carré de côté $1m$, alors il existe deux points à moins de $75cm$ l'un de l'autre.

2 Problème

Question 1. *Soit un carré de côté* $n \in \mathbb{N}$*. Etudier la question du nombre maximum de disques de diamètre* 1 *que l'on peut placer dans ce carré.*

Remarque 1. *On considérera en particulier les empilements en alignement et en quinconce.*

On pourra commencer par étudier les petits ordres, puis on remarquera le changement de comportement pour $n = 8$*, et on généralisera le résultat par récurrence.*

Les plus courageux trouveront une formule explicite du nombre de disques pour l'empilement en quinconce.

Question 2. *Soit un carré de côté* $x \in \mathbb{R}^+$*. Etudier la question du nombre maximum de disques de rayon* 1 *que l'on peut placer dans ce carré.*

Remarque 2. *On fera le même travail que précédement et on pourra tracer la courbe de la différence entre l'empilement en quinconce et l'empilement en alignement en fonction de* x*.*

Question 3. *Que peut-on dire pour le problème d'empilement de sphères dans un cube de côté* n *?*

3 Correction

3.1 Exercice

On découpe le carré en quatre petits carré de côté $\frac{1}{2}$ dans lesquels la distance minimale entre deux points est celle de la diagonale, donc $\frac{\sqrt{2}}{2}$. Si on place cinq points dans le carré, deux d'entre eux sont dans un même petit carré, donc à distance inférieure ou égale à $\frac{\sqrt{2}}{2} < \frac{3}{4}$.

Remarque 3. *De la même façon, si on place* 9 *points dans un cube de côté* $1m$*, alors il existe deux points à moins de* $\frac{\sqrt{3}}{2}m$ *l'un de l'autre.*

3.2 Problème

Remarque 4. *On rappelle la définition de la partie entière :*

pour tout réel x *la partie entière de* x*, notée* $E[x]$*, est l'entier précédent* x*. (on a donc la caractérisation :* $E[x] \in \mathbb{N}$ *et* $E[x] \leq x < E[x] + 1$*).*

Dans cette correction, on compare les empilements en alignement et en quinconce dans un carré de coté réel.

Soit donc $x \in \mathbb{R}$ et un carré de côté x.

On appelle $u(x)$ (resp. $v(x)$) le nombre maximum de disques de diamètre 1 que l'on peut mettre dans le carré par l'empilement en alignement (resp. en quinconce).

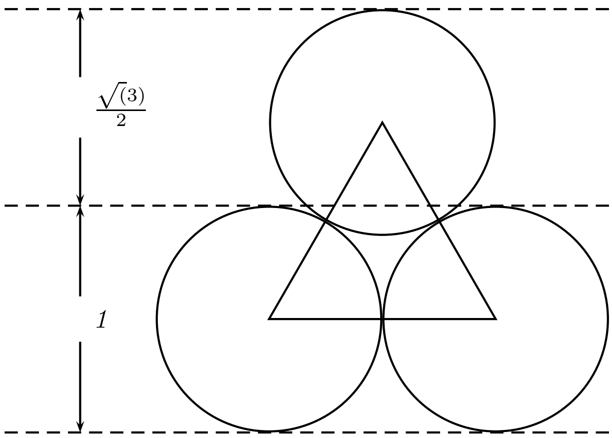
1. Il est clair que :

$$\boxed{u(x) = E[x]^2}$$

2. Pour calculer $v(x)$, on procède en quatre étapes :

   (a) On calcule le nombre $r(x)$ de rangées que l'on peut placer en quinconce dans le carré :

   Remarque 5. *On rappelle le schéma suivant :*



   Lorsque la première ligne est posée, il reste donc $x - 1$ unités de longueur et chaque ligne est de hauteur $\frac{\sqrt{3}}{2}$, donc on obtient :

$$\boxed{r(x) = 1 + E[\frac{2(x-1)}{\sqrt{3}}]}$$

   (b) On calcule le nombre $r_2(x)$ de rangées comme la seconde (et on en déduit le nombre $r_1(x)$ de rangées comme la première) : il y en a autant que de paires de rangées, ie

$$\boxed{r_2(x) = E[\frac{r(x)}{2}] \ et \ r_1(x) = r(x) - r_2(x)}$$

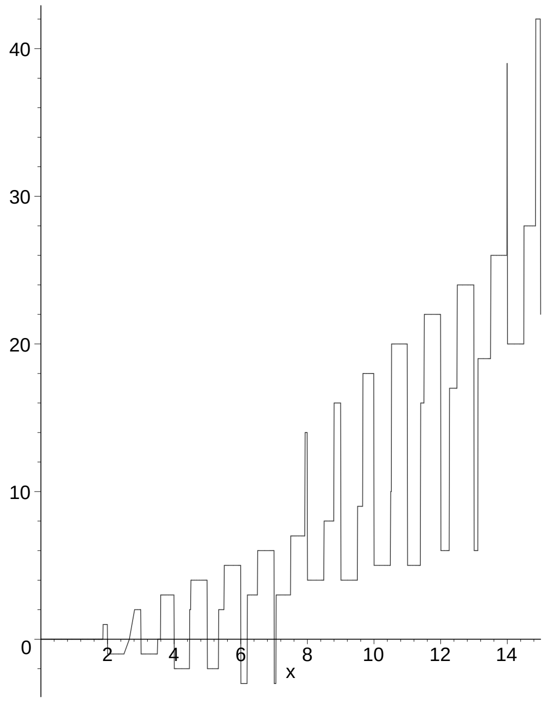
   (c) Pour les rangées comme la première, il y a $n_1(x) = E[x]$ disques par rangée. Pour celles comme la seconde, il y a $n_2(x) = E[x - \frac{1}{2}]$ disques par rangée.

(d) On conclut :

$$v(x) = r_1(x).n_1(x) + r_2(x).n_2(x) = (r(x) - E[\frac{r(x)}{2}]).E[x] + E[\frac{r(x)}{2}].E[x - \frac{1}{2}]$$

$$\boxed{v(x) = (1 + E[\frac{2(x-1)}{\sqrt{3}}] - E[\frac{1 + E[\frac{2(x-1)}{\sqrt{3}}]}{2}]).E[x] + E[\frac{1 + E[\frac{2(x-1)}{\sqrt{3}}]}{2}].E[x - \frac{1}{2}]}$$

3. On trace la courbe de $f(x) = v(x) - u(x)$ en fonction de x.



Remarque 6. *On constate les résultats suivants :*

- *on remarque graphiquement qu'à partir d'un réel x_0 voisin de $7,1$, l'empilement en quinconce est toujours meilleur que celui en alignement. On peut déterminer précisément cette borne (pour ceux qui voudraient la chercher, il faut trouver $x_0 = \frac{7\sqrt{3}}{2} + 1$).*
- *le résultat trouvé permet de régler le cas des entiers : on a le tableau*

n	*1*	*2*	*3*	*4*	*5*	*6*	*7*	*8*	*9*	*10*	...
u(n)	*1*	*4*	*9*	*16*	*25*	*36*	*49*	***64***	*81*	*100*	...
v(n)	*1*	*3*	*8*	*14*	*23*	*33*	*46*	***68***	*85*	*105*	...

Remarque 7. *Ce qui a motivé cette recherche d'empilements compacts, c'est la structure interne des cristaux étudiés en chimie. Cette étude de la dimension 3 est similaire, et on peut encore montrer que c'est l'empilement en hexagonal compact (on forme des plans de boules disposées en hexagone autour d'une boule centrale, puis on empile nos plans en quinconce) qui est le meilleur empilement (ce résultat a éte démontré en 1998 ! ! !).*