Vincent Pilaud
Kholles de mathématiques
MP* - Lycée Charlemagne - Paris
21 mars 2006

Inversion locale et fonctions implicites

1 Exponentielle de matrices

Exercice. [$x \mapsto x^2$]

Soit n un entier et $\mathcal{S}_n$ (resp. $\mathcal{S}_n^{++}$) l'ensemble des matrices réelles symétriques (resp. symétriques définies positives) de taille n.

1. Montrer que $\mathcal{S}_n$ est un $\mathbb{R}$-espace vectoriel de dimension finie dont S_n^{++} est un ouvert.
2. Montrer que l'application $\mathcal{S}_n^{++} \to \mathcal{S}_n^{++}$, $A \mapsto A^2$ est un C^∞-difféomorphisme.

Exercice. [Différentielle d'une limite]

1. Soient E et F deux espaces vectoriels normés de dimension finie et U un ouvert convexe de E. Soient $(f_k)_{k\in\mathbb{N}}$ une suite d'application différentiables de U dans F. On suppose de plus que

(i) il existe un point $a \in U$ tel que la suite $(f_k(a))_{k\in\mathbb{N}}$ ait une limite,

(ii) La suite des différentielles $(df_k)_{k\in\mathbb{N}}$ converge uniformément sur U.

Montrer que la suite $(f_k)_{k\in\mathbb{N}}$ converge simplement sur U, uniformément sur toute partie bornée de U, vers une application différentiable et que

$$d(\lim_{k\to\infty} f_k) = \lim_{k\to\infty} df_k.$$

2. Montrer que si les fonctions sont de classe C^1 sur U, alors la limite est aussi de classe C^1 sur U.
3. Donner des contre-exemples lorsque l'on retire l'une des deux hypothèses.

Exercice. [Exponentielle de matrices symétriques]

1. Montrer que la fonction exponentielle réalise une bijection de $\mathcal{S}_n$ dans $\mathcal{S}_n^{++}$.
2. En utilisant l'exercice précédent, montrer que l'exponentielle est de classe C^1.
3. Montrer que la différentielle de l'exponentielle en 0 est inversible et en déduire qu'il existe un voisinage de 0 sur lequel la différentielle de l'exponentielle est toujours inversible. En utilisant les C^1-difféomorphismes $x \mapsto 2x$ et $x \mapsto x^2$, en déduire que l'exponentielle est un C^1-difféomorphisme de $\mathcal{S}_n$ dans $\mathcal{S}_n^{++}$.

Exercice. [Différentielle l'exponentielle de matrices]

A. Les représentations Ad et ad

Soit $A \in GL_n(\mathbb{R})$. On définit l'automorphisme intérieur correspondant

$$\phi_A : \begin{cases} GL_n(\mathbb{R}) & \to & GL_n(\mathbb{R}) \\ M & \mapsto & AMA^{-1} \end{cases}.$$

La différentielle de cette application est

$$AdA : \begin{cases} M_n(\mathbb{R}) & \to & M_n(\mathbb{R}) \\ M & \mapsto & AMA^{-1} \end{cases}.$$

Ceci définit l'application $Ad : GL_n(\mathbb{R}) \to L(M_n(\mathbb{R}))$.

Pour $A \in M_n(\mathbb{R})$, on définit l'endomorphisme $adA \in L(M_n(\mathbb{R}))$ par

$$adA : \left\{ \begin{array}{ccc} M_n(\mathbb{R}) & \to & M_n(\mathbb{R}) \\ M & \mapsto & AM - MA \end{array} \right. .$$

Ceci définit l'application linéaire $ad : M_n(\mathbb{R}) \to L(M_n(\mathbb{R}))$.

1. Montrer que la différentielle de l'application Ad en l'identité est l'application ad.

2. Montrer que pour tout $A \in M_n(\mathbb{R})$, $Ad(\exp A) = \exp(adA)$.

B. Différentielle de l'exponentielle

Soit $M, X \in M_n(\mathbb{R})$. Soit $\psi : \mathbb{R} \to M_n(\mathbb{R})$ définie par $\psi(\alpha) = \alpha . d\exp_{\alpha M}(X)$.

1. Montrer que ψ vérifie l'équation fonctionnelle

$$\forall r, s \in \mathbb{R}, \quad \psi(r+s) = \psi(r)\exp(sM) + \exp(rM)\psi(s).$$

2. En déduire que ψ vérifie l'équation différentielle

$$\psi'(s) = \psi'(0)\exp(sM) + M\psi(s),$$

avec de plus $\psi(0) = 0$ et $\psi'(0) = X$.

3. En utilisant la méthode de variation de la constante, montrer que

$$\exp(-M).d\exp_M : X \mapsto \frac{\mathrm{Id} - \exp(-adM)}{adM}(X).$$

2 Théorème des extréma liés

Exercice. [Théorème des extréma liés]

Soient E un espace vectoriel de dimension finie et O un ouvert de E. Soient f, g deux fonctions C^1 de O dans $\mathbb{R}$. On note $\Gamma = \{x \in O \mid g(x) = 0\}$. Soit enfin $x_0 \in \Gamma$ tel que $dg_{x_0} \neq 0$. Montrer que $f_{|\Gamma}$ admet un extremum relatif en x_0 si et seulement si il existe $\lambda \in \mathbb{R}$ tel que $df_{x_0} = \lambda . dg_{x_0}$.

Exercice. [Maximum du quotient de Rayleigh]

Soit A un endomorphisme symétrique d'un $\mathbb{R}$-espace vectoriel euclidien V de dimension n. On appelle quotient de Rayleigh de l'endomorphisme A l'application

$$R_A : \left\{ \begin{array}{ccc} V \setminus \{0\} & \to & \mathbb{R} \\ x & \mapsto & \frac{\langle Ax|x\rangle}{\langle x|x\rangle} \end{array} \right.$$

1. Montrer que R_A atteind ses bornes sur la sphère unité de V.

2. En utilisant l'exercice précédent, montrer que tout extremum local de R_A sur la sphère unité est un vecteur propre de A.

3. En déduire une démonstration du théorème de diagonalisation des endomorphismes symétriques d'un espace vectoriel euclidien de dimension finie.

Exercice. [Projecteurs et extréma liés]

Soient E un espace euclidien de dimension finie, p et q deux projecteurs orthogonaux de E et x un vecteur qui réalise le minimum de $d(x, \mathrm{Im}(q))$ sur $\mathrm{Im}(p) \cap S(0,1)$. Montrer que x est un vecteur propre de $p \circ q$.

3 Différentiabilité et convexité

Exercice. [Convexité et dérivabilité première]

Soient E un espace vectoriel de dimension finie, U un ouvert de E et $f : U \to \mathbb{R}$ une fonction différentiable. Soit V une partie convexe de U. Montrer que f est convexe sur V si et seulement si pour tout $v, w \in V$,

$$f(v) \geq f(w) + df_w(v - w).$$

Donner une condition nécessaire et suffisante de stricte convexité de f.

Exercice. [Convexité et dérivabilité seconde]

Soient E un espace vectoriel de dimension finie, U un ouvert de E et $f : U \to \mathbb{R}$ une fonction deux fois différentiable. Soit V une partie convexe de U. Montrer que f est convexe sur V si et seulement si pour tout $v, w \in V$,

$$d^2 f_w(v - w, v - w) \geq 0.$$

Donner une condition nécessaire et suffisante de stricte convexité de f.

Exercice. [Extréma d'une fonction convexe]

1. Soient E un espace vectoriel de dimension finie, V une partie convexe de E et $f : V \to \mathbb{R}$ convexe. Montrer que si f admet un minimum local sur V, alors ce minimum est global. Montrer que si la convexité de f est stricte, alors f admet au plus un minimum.

2. Soient E un espace vectoriel de dimension finie, U un ouvert de E, V une partie convexe de U et $v \in V$. Soit $f : U \to \mathbb{R}$ convexe et différentiable en v. Montrer que f admet un minimum en v relativement à V si et seulement si pour tout $w \in V$,

$$df_v(w - v) \geq 0.$$

3. Montrer que si V est ouvert, cette dernière condition équivaut à $df_v = 0$.