Vincent Pilaud
Kholles de mathématiques
MP* - Lycée Charlemagne - Paris
28 février 2006

Algèbre bilinéaire

1 Groupe orthogonal d'une forme quadratique

Exercice. [Centre du groupe orthogonal]

1. On considère un espace euclidien E de dimension n.

a. Montrer que le centre de $O(E)$ est réduit à $\{\pm\mathrm{Id}\}$. En déduire que $O(E)$ n'est pas commutatif dès que $n \geq 2$.

b. On suppose $n \geq 3$. Montrer que le centre de $O^+(E)$ est réduit à $\{\mathrm{Id}\}$ si n est impair et $\{\pm\mathrm{Id}\}$ si n est pair. Montrer que si $n = 2$, $O^+(E)$ est abélien.

2. On considère un espace vectoriel E de dimension $n \geq 3$ muni d'une forme quadratique non dégénérée q (mais que l'on ne suppose plus euclidienne).

a. Montrer que tout élément du centre de $O(q)$ stabilise toutes les droites non isotropes, et donc les plans hyperboliques. Montrer que toute droite isotrope est l'intersection de deux plans hyperboliques. En déduire que le centre de $O(q)$ est réduit à $\{\pm\mathrm{Id}\}$.

b. Montrer que tout élément du centre de $O^+(q)$ stabilise tous les plans hyperboliques. Montrer que toute droite est l'intersection de deux plans hyperboliques. En déduire que le centre de $O^+(q)$ est réduit à $\{\mathrm{Id}\}$ si n est impair et $\{\pm\mathrm{Id}\}$ si n est pair.

Exercice. [Caractérisation des isométries]

Soit q une forme quadratique non dégénérée sur un espace vectoriel E de dimension finie, B la forme bilinéaire associée et u une application de E dans E. Montrer que les conditions suivantes sont équivalentes :

(i) $\forall x, y \in E,\ u(x+y) = u(x) + u(y)$ et $q(u(x)) = q(x)$,

(ii) $\forall x, y \in E,\ q(u(x) - u(y)) = q(x-y)$ et $u(0) = 0$,

(iii) $\forall x, y \in E, B(u(x), u(y)) = B(x, y)$.

Exercice. [Caractérisations des similitudes]

Soit B une forme bilinéaire symétrique non dégénérée sur un espace vectoriel E. On dit qu'une application $u \in GL(E)$ est une similitude de multiplicateur $\mu \in \mathbb{R}$ si $\forall x, y \in E$, $B(u(x), u(y)) = \mu B(x, y)$. On note $GO(E)$ le groupe des similitudes de E.

1. Soit $u \in GL(E)$. Montrer que

$$u \in GO(E) \Leftrightarrow (\forall x, y \in E, x \perp y \Rightarrow u(x) \perp u(y)).$$

2. Montrer que si B est définie positive, alors

$$GO(E) = \{h_\lambda \circ v \mid \lambda \in \mathbb{R}^{+*} \text{ et } v \in O(E)\}.$$

3. Montrer que

$$GO(\mathbb{R}^2) = \left\{ \begin{pmatrix} a & -b \\ b & a \end{pmatrix} \mid a, b \in \mathbb{R}, a^2 + b^2 > 0 \right\} \cup \left\{ \begin{pmatrix} a & b \\ b & -a \end{pmatrix} \mid a, b \in \mathbb{R}, a^2 + b^2 > 0 \right\}.$$

2 Endomorphismes symétriques

Exercice. [Matrices de Gram]

Soit E un espace préhilbertien et $x_1, \ldots, x_n$ des vecteurs de E. On appelle matrice de Gram de $x_1, \ldots, x_n$ la matrice carrée de taille n dont les coefficients sont les $\langle x_i | x_j \rangle$. Le déterminant de cette matrice est appelé déterminant de Gram de $x_1, \ldots, x_n$ et noté $G(x_1, \ldots, x_n)$.

1. Montrer que toute matrice de Gram est symétrique (resp. hermitienne) positive et qu'elle est définie si et seulement si la famille correspondante est libre. Réciproquement, montrer que toute matrice symétrique (resp. hermitienne) positive est une matrice de Gram.

2. Montrer que pour toute famille libre $x_1, \ldots, x_n$, et tout vecteur y, la distance d de y au sous-espace vectoriel engendré par $x_1, \ldots, x_n$ est donnée par

$$d^2 = d(y, \mathrm{vect}(x_1, \ldots, x_n))^2 = \frac{G(y, x_1, \ldots, x_n)}{G(x_1, \ldots, x_n)}.$$

3. Application à la minimisation d'intégrales : calculer

$$\inf_{a_1, \ldots, a_n \in \mathbb{R}} \int_0^{+\infty} (1 + a_1 x + \ldots + a_n x^n)^2 dx.$$

$$\inf_{a_1, \ldots, a_n \in \mathbb{R}} \int_0^{+\infty} (1 + a_1 x + \ldots + a_n x^n)^2 e^{-x} dx.$$

Exercice. [Théorème de Müntz]

On note $\mathcal{C}$ l'espace des fonctions continues de $[0, 1]$ dans $\mathbb{R}$ que l'on munit du produit scalaire $\langle f | g \rangle = \int_0^1 f(t) g(t) dt$. Soit $(\alpha_n)_{n \in \mathbb{N}}$ une suite à termes strictement positifs et strictement croissante. Le but de ce qui suit est de donner une condition nécessaire et suffisante pour que le sous-espace vectoriel $\mathrm{vect}_{n \in \mathbb{N}}(x^{\alpha_n})$ engendré par les fonctions $x \mapsto x^{\alpha_n}$ soit dense dans $\mathcal{C}$ (au sens de la norme associée au produit scalaire $\langle . | . \rangle$).

1. Montrer que le déterminant de Cauchy est donné par

$$\det \left(\left(\frac{1}{a_i + b_j} \right)_{i,j \leq n} \right) = \frac{\prod_{1 \leq i < j \leq n} (a_j - a_i) \prod_{1 \leq i < j \leq n} (b_j - b_i)}{\prod_{1 \leq i,j \leq n} (a_i + b_j)}.$$

2. Soit $m \in \mathbb{R}^{+*}$ et $N \in \mathbb{N}$. Montrer que

$$d(x^m, \mathrm{vect}_{n \leq N}(x^{\alpha_n})) = \frac{1}{\sqrt{2m+1}} \prod_{i=1}^{N} \left| \frac{\alpha_i - m}{\alpha_i + m + 1} \right|.$$

3. En déduire que $\mathrm{vect}_{n \in \mathbb{N}}(x^{\alpha_n})$ est dense dans $\mathcal{C}$ si et seulement si la série $\sum 1/\alpha_n$ diverge.

4. Donner des exemples.

Exercice. [Quotient de Rayleigh]

Soit A un endomorphisme symétrique d'un $\mathbb{R}$-espace vectoriel euclidien V de dimension n dont on note $\lambda_1 \leq \lambda_2 \leq \ldots \leq \lambda_n$ les valeurs propres. On appelle quotient de Rayleigh de l'endomorphisme A l'application

$$R_A : \left\{ \begin{array}{ccc} V \setminus \{0\} & \to & \mathbb{R} \\ x & \mapsto & \frac{\langle Ax | x \rangle}{\langle x | x \rangle} \end{array} \right.$$

Pour tout $0 \leq k \leq n$, on note $\mathcal{V}_k$ l'ensemble des sous-espaces vectoriels de dimension k de V. Montrer que

(i) pour tout $1 \leq k \leq n$, on a

$$\lambda_k = \min_{W \in \mathcal{V}_k} \max_{x \in W} R_A(x) = \max_{W \in \mathcal{V}_{k-1}} \min_{x \in W^\perp} R_A(x).$$

(ii) $R_A(V) = [\lambda_1, \lambda_n]$.

Exercice. [Convexité du déterminant]

Le but de cet exercice est de montrer que pour deux matrices A et B hermitiennes positives de taille n, on a

$$(\det(A+B))^{\frac{1}{n}} \geq (\det(A))^{\frac{1}{n}} + (\det(B))^{\frac{1}{n}}.$$

On propose deux méthodes

1. Montrer que qu'il existe une matrice $P \in GL_n(\mathbb{C})$ telle que $A = P^*P$ et $B = P^*DP$ où D est diagonale. En déduire le résultat.

2. Soit $H \in \mathcal{H}_n^+$. On note Γ l'ensemble des matrices hermitiennes positives dont le déterminant est supérieur ou égal à 1. Montrer que

$$\inf_{L \in \Gamma} \operatorname{tr}(LH) = n\,(\det(H))^{\frac{1}{n}}.$$

En déduire le résultat.

Exercice. [Ellipsoide de John]

1. Montrer que l'application $\mu : \mathcal{S}_n^{++} \to \mathbb{R}$, $S \mapsto \frac{1}{\sqrt{\det(S)}}$ est strictement convexe (on utilisera la convexité de exp dans l'intégrale $\int \exp^{-\langle Ax|x\rangle} dx$).

2. Montrer que tout compact de $\mathbb{R}^n$ contenant 0 dans son intérieur est contenu dans un unique ellipsoïde de rayon minimal.

3. En déduire que pour tout sous-groupe compact G de $GL_n(\mathbb{R})$, il existe un produit scalaire qui rend les éléments de G orthogonaux.

Exercice. [Décomposition polaire et applications]

1. Soit $A \in \mathcal{S}_n^{++}$. Montrer qu'il existe une unique matrice $S \in \mathbb{S}_n^{++}$ telle que $S^2 = A$. Montrer que l'application $\mathcal{S}_n \to \mathcal{S}_n$, $A \mapsto A^2$ induit un C^∞-difféomorphisme de $\mathcal{S}_n^{++}$ dans $\mathcal{S}_n^{++}$.

2. Soit $A \in \mathcal{M}_n(\mathbb{R})$. Montrer qu'il existe un couple $(O, S) \in \mathcal{O}_n \times \mathcal{S}_n^+$ tel que $A = OS$ et que ce couple est unique si on suppose de plus que A est inversible. Montrer que l'application $\mathcal{O}_n \times \mathcal{S}_n^{++} \to GL_n(\mathbb{R})$, $(O, S) \mapsto OS$ est un homéomorphisme.

3. Montrer que les composantes connexes de $O_n(\mathbb{R})$ sont $O_n^+(\mathbb{R})$ et $O_n^-(\mathbb{R})$ et en déduire les composantes connexes de $GL_n(\mathbb{R})$.

Exercice. [Décomposition d'Iwasawa]

1. Soit $A \in \mathcal{S}_n^{++}$. Montrer qu'il existe une unique matrice T triangulaire supérieure à coefficients diagonaux positifs telle que $A = T^*T$.

2. Soit $A \in GL_n(\mathbb{R})$. Montrer qu'il existe un unique couple de matrices (O, T) avec O orthogonale et T triangulaire supérieure à coefficients diagonaux positifs telle que $A = OT$.

Exercice. [Exponentielle de matrices]

1. On munit l'espace vectoriel des matrices réelles de taille n de la norme $\|.\|_2$ subordonée à la norme euclidienne sur $\mathbb{R}^n$. On définit par ailleurs le rayon spectral d'une matrice A par $\rho(A) = \max\{|\lambda| \mid \lambda \in \operatorname{Sp}(A)\}$. Montrer que pour toute matrice $A \in \mathcal{M}_n(\mathbb{R})$, $\|A\|_2 = \sqrt{\rho(A^*A)}$.

2. Montrer que l'exponentielle réalise un homéomorphisme de $\mathcal{S}_n$ dans $\mathcal{S}_n^{++}$.

3. Montrer que la différentielle de l'exponentielle en 0 est inversible et en déduire qu'il existe un voisinage de 0 sur lequel la différentielle de l'exponentielle est toujours inversible. En utilisant les C^1-difféomorphismes $x \mapsto 2x$ et $x \mapsto x^2$, en déduire que l'exponentielle est un C^1-difféomorphisme de $\mathcal{S}_n$ dans $\mathcal{S}_n^{++}$.