Vincent Pilaud
Kholles de mathématiques
MP* - Lycée Charlemagne - Paris

29 novembre 2005

Topologie

1 Théorèmes de point fixe

Exercice. [Point fixe de Banach]
Soient (E,d) un espace métrique complet et $f : E \to E$ une application contractante,

$$\exists k \in [0,1[, \forall x,y \in E,\ d(f(x),f(y)) \leq kd(x,y).$$

Montrer qu'il existe un unique point fixe e de f. Montrer de plus que pour tout $x_0 \in E$, la suite des itérés de x_0 par f (ie. la suite définie par la récurrence $x_{n+1} = f(x_n)$) converge géométriquement vers e, c'est-à-dire que

$$d(x_n, e) \leq k^n d(x_0, e).$$

Exercice. [Contre-exemples]
Donner des contre-exemples à l'exercice précédent lorsque

(i) E n'est pas complet,

(ii) f n'est pas contractante, bien qu'elle vérifie $d(f(x),f(y)) < d(x,y)$ pour tout $x,y \in E$ (on pourra donner un contre-exemple à l'existence, puis à l'unicité du point fixe).

Exercice. [Itérée contractante] Soient (E,d) un espace métrique complet et $f : E \to E$ telle qu'il existe $p \in \mathbb{N}^*$ tel que f^p est contractante. Montrer que f admet un unique point fixe e. Montrer de plus que pour tout $x_0 \in E$, la suite des itérés de x_0 par f converge vers e.

Exercice. [Point fixe et compacité]
Soient (E,d) un espace métrique compact et $f : E \to E$ telle que $\forall x \neq y \in E,\ d(f(x),f(y)) < d(x,y)$. Montrer que f admet un unique point fixe e et que pour tout $x_0 \in E$, la suite des itérés de x_0 par f converge vers e.

Exercice. [Point fixe et compacité+convexité]
Soient $(E, \|.\|)$ un espace vectoriel normé et X une partie compacte convexe non vide de E. Soit $f : X \to X$ telle que $\forall x,y \in E, \|f(x) - f(y)\| \leq \|x - y\|$. Montrer que f admet au moins un point fixe dans X.

Exercice. [Point fixe à paramètre]
Soient (E,d) un espace métrique complet non vide, (Λ, δ) un espace métrique et $F : E \times \Lambda \to E$ continue, contractante en la première variable uniformément par rapport à la deuxième. Montrer que pour tout $\lambda \in \Lambda$, l'équation $F(x,\lambda) = x$ admet une unique solution x_λ qui varie continuement par rapport à λ.

Exercice. [Convergence locale de la méthode de Newton]
Soient $[a,b]$ un intervalle borné de $\mathbb{R}$ et $f \in C^2([a,b],\mathbb{R})$. On suppose qu'il existe $\tilde{x} \in [a,b]$ tel que $f(\tilde{x}) = 0$ et que pour tout $x \in [a,b], f'(x) \neq 0$. Pour tout $x_0 \in [a,b]$, on définit la suite $(x_n)_{n\in\mathbb{N}}$ par réccurence en posant

$$x_{n+1} = x_n - \frac{f(x_n)}{f'(x_n)}.$$

Montrer qu'il existe $\varepsilon > 0$ tel que pour tout $x_0 \in [\tilde{x} - \varepsilon, \tilde{x} + \varepsilon]$, la suite x_n converge vers $\tilde{x}$ de manière quadratique, c'est-à-dire qu'il existe une constante $C \in \mathbb{R}$ telle que

$$\forall n \in \mathbb{N},\ |x_{n+1} - \tilde{x}| \leq C|x_n - \tilde{x}|^2.$$

Exercice. [Points fixes et connexité]

Soit (E, d) un espace métrique.

1. On suppose que toute application continue de E dans E admet un point fixe. Montrer que E est connexe.

2. On suppose que E est connexe et compact. Peut-on affirmer que toute application continue de E dans E admet un point fixe ?

Exercice. [Unique valeur d'adhérence]

Soit $f : \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}^n$ une application continue. Soit $x_0 \in \mathbb{R}^n$ et $(x_n)_{n\in\mathbb{N}}$ la suite des itérés de x_0 par f. On suppose que la suite (x_n) admet une et une seule valeur d'adhérence. Montrer qu'elle converge et en déduire que f admet un point fixe.

2 Théorèmes d'intersection

Exercice. [Suites décroissantes de fermés non vides]

Soient (E, d) un espace métrique et $(F_n)_{n\in\mathbb{N}}$ une suite décroissante de fermés non vides de E. Montrer que l'intersection $\bigcap_{n\in\mathbb{N}} F_n$ est non vide lorsque

(i) E est supposé compact,

(ii) E est supposé complet et le diamètre des fermés F_n tend vers 0.

Exercice. [Image d'une intersection de fermés]

Soient (E, d) et (E', d') deux espaces métriques, E étant supposé complet. Soit $f : E \to E'$ continue et $(F_n)_{n\in\mathbb{N}}$ une suite décroissante de fermés non vides dont le diamètre tend vers 0. Montrer que

$$f\left(\bigcap_{n\in\mathbb{N}} F_n\right) = \bigcap_{n\in\mathbb{N}} f(F_n).$$

Exercice. [Intersection de fermés connexes dans un compact]

Soient (E, d) un espace métrique compact et $(F_n)_{n\in\mathbb{N}}$ une suite décroissante de fermés connexes de E. Montrer que $\bigcap_{n\in\mathbb{N}} F_n$ est connexe.

Exercice. [Théorème de Baire]

Soient (E, d) un espace métrique complet et $(U_n)_{n\in\mathbb{N}}$ une suite d'ouverts denses de E. Montrer que $\bigcap_{n\in\mathbb{N}} U_n$ est dense.

3 Continuité et dérivabilité

Dans toute la suite, les fonctions sont réelles à variable réelle, les ouverts sont ceux de $\mathbb{R}$, etc. Tout se généralise facilement dans des espaces plus généraux, mais ces généralisations n'apportent rien à la compréhension du problème.

Exercice. [Ensemble des points de continuité d'une fonction]

1. Donner un exemple de fonction continue sur $\mathbb{R} \setminus \mathbb{Q}$ et discontinue sur $\mathbb{Q}$.

2. On veut montrer qu'il n'existe aucune fonction continue sur $\mathbb{Q}$ et discontinue sur $\mathbb{R} \setminus \mathbb{Q}$.

(i) Montrer que l'ensemble des points de continuité d'une fonction est une intersection dénombrable d'ouverts (on pourra poser pour tout $n \in \mathbb{N}$,

$$\Omega_n = \{x \in \mathbb{R} \mid \exists r > 0, \forall y, z \in]x-r, x+r[, |f(y) - f(z)| < \frac{1}{n}\}).$$

(ii) Montrer que si $\mathbb{Q}$ est une intersection dénombrable d'ouverts, alors $\mathbb{R}$ est une union dénombrable de fermés. Montrer par le théorème de Baire que l'un de ces fermés est d'intérieur non vide, et en déduire une absurdité.

(iii) Conclure.

Exercice. [Ensemble des points de continuité d'une dérivée]

1. On veut montrer que l'ensemble des points de continuité d'une fonction dérivée est dense.

(i) Soit $(f_n)_{n\in\mathbb{N}}$ une suite de fonctions continues qui converge simplement vers une fonction f. Pour tout $\varepsilon > 0$ et tout $n \in \mathbb{N}$, on pose

$$F_{\varepsilon,n} = \{x \in \mathbb{R} \mid \forall m \geq n, |f_n(x) - f_m(x)| \leq \varepsilon\}, \quad \Omega_\varepsilon = \bigcup_{n\in\mathbb{N}} \overset{\circ}{F}_{\varepsilon,n} \quad \text{et} \quad \Omega = \bigcap_{n\in\mathbb{N}} \Omega_{\frac{1}{n}}.$$

Montrer que pour tout $\varepsilon > 0$, Ω_ε est un ouvert dense. En déduire que Ω est dense. Montrer enfin que Ω est contenu dans l'ensemble des points de continuité de f.

(ii) Montrer que l'ensemble des points de continuité d'une fonction dérivée est dense.

2. On veut maintenant montrer qu'il existe des fonctions dérivées dont l'ensemble des points de discontinuité est dense.

(i) Montrer qu'il existe une fonction ψ dérivable sur $[-1,1]$ dont la dérivée est continue et bornée sur $[-1,1] \smallsetminus \{0\}$ et discontinue en 0.

(ii) Soit $\phi : \mathbb{N} \to \mathbb{Q} \cup [0,1]$ une bijection. On définit pour $n \in \mathbb{N}$ et $x \in [0,1]$:

$$\Psi_n(x) = \frac{\psi(x - \phi(n))}{n^2}.$$

Montrer que $\sum \Psi_n'$ converge uniformément sur $[0,1]$ et qu'il existe $x_0 \in [0,1]$ tel que $\Psi_n(x_0)$ converge. Ainsi (admis provisoirement), $\sum \Psi_n$ converge uniformément sur $[0,1]$ vers une fonction dont la dérivée est $\sum \Psi_n'$.

(iii) Montrer que cette dérivée est continue en tout point irrationnel et discontinue en tout point rationnel.

Exercice. [Fonctions continues nulle part dérivables]

1. Soit Δ la fonction 1-périodique paire définie sur $[0, \frac{1}{2}]$ par $\Delta(x) = |x|$. Montrer que la fonction $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ définie par

$$f(x) = \sum_{n\in\mathbb{N}} \frac{\Delta(2^n x)}{2^n}$$

est continue et nulle par dérivable sur $\mathbb{R}$.

2. Soit $\mathcal{C}$ l'ensemble des fonctions continues de $[0,1]$ dans $\mathbb{R}$. Pour tout $\varepsilon, A > 0$, on pose

$$U_{\varepsilon,A} = \{f \in \mathcal{C} \mid \forall x \in [0,1], \exists y \in [0,1],\ |y - x| < \varepsilon \text{ et } \left|\frac{f(y) - f(x)}{y - x}\right| > A\}.$$

Montrer que $U_{\varepsilon,A}$ est un ouvert (on montrera que le complémentaire est fermé) dense (pour $f \in \mathcal{C}$ et $\delta > 0$, on considèrera la fonction $x \mapsto f(x) + \delta \sin(Nx)$ avec N bien choisi). Conclure en considérant $(U_{\frac{1}{n},n})_{n\in\mathbb{N}}$.

4 Algèbre et topologie

Exercice. [Groupes topologiques]

On dit qu'un groupe G est un groupe topologique si c'est un espace topologique dans lequel le produit et l'inverse sont continues, ou de manière équivalente dans lequel

$$\phi : \begin{array}{ccc} G^2 & \to & G \\ (x,y) & \mapsto & xy^{-1} \end{array}$$

est continue.

1. Montrer que la composante connexe de l'élément neutre est un sous-groupe distingué H de G.

2. Montrer que tout sous-groupe ouvert de H est égal à H.

3. Montrer que les translations à gauche et à droite sont des homomorphismes de groupes topologiques (isomorphismes de groupes qui sont des homéomorphismes) qui commutent. Montrer qu'un morphisme de groupe f est continu sur G si et seulement si il est continu en l'élément neutre de G.

Exercice. [Continuité des racines d'un polynôme]

Soit $\mathbb{C}[X]$ l'ensemble des polynômes à une indéterminée sur $\mathbb{C}$ que l'on norme avec $\| \sum_{i\in\mathbb{N}} a_i X^i\| = \sum_{i\in\mathbb{N}} |a_i|$. Le but de ce qui suit est de montrer la continuité des racines d'un polynôme au regard de cette norme.

(i) Soit $\lambda \in \mathbb{C}$ une racine d'un polynôme unitaire $P \in \mathbb{C}[X]$. Montrer que $|\lambda| \leq \|P\|$.

(ii) Soient $n \in \mathbb{N}$, $\lambda_1, \ldots, \lambda_n \in \mathbb{C}$ et $P = \prod_{i=1}^n (X-\lambda_i)$. Soit $(P_m)_{m\in\mathbb{N}}$ une suite de polynômes qui convergent vers P. Montrer que pour toute racine λ de P, il existe une suite $(\mu_m)_{m\in\mathbb{N}}$ qui tend vers λ et telle que pour tout $m \in \mathbb{N}$, $P_m(\mu_m) = 0$. Montrer que l'on peut écrire $P_m = \prod_{i=1}^n (X - \mu_{i,m})$ avec pour tout $i \in \{1, \ldots, n\}$, $\lim_{m\to\infty} \mu_{i,m} = \lambda_i$.

Exercice. [Idéaux maximaux de $C(E,\mathbb{R})$]

Soient (E,d) un espace métrique compact et $C(E,\mathbb{R})$ la $\mathbb{R}$-algèbre des applications continues de E dans $\mathbb{R}$.

(i) Soit $I \neq C(E,\mathbb{R})$ un idéal de $C(E,\mathbb{R})$. Montrer qu'il existe $s \in E$ tel que pour tout $f \in I$, $f(s) = 0$.

(ii) Quels sont les idéaux maximaux de $C(E,\mathbb{R})$?

(iii) Quels sont les morphismes d'algèbre de $C(E,\mathbb{R})$ dans $\mathbb{R}$?

Remarque. Voir aussi la topologie des espaces de matrices.