

Diagrammes de Voronoi

Vincent Pilaud

2006

1 Introduction

Soit n un entier, E un espace euclidien de dimension n , S un ensemble fini de points de E et $P \in S$. On appelle *cellule de Voronoi* de P (dans S) l'ensemble des points de E situés plus près de P que de tous les autres points de S :

$$\text{Vor}_S(P) = \{M \in E \mid \forall Q \in S, MP \leq MQ\}.$$

On appelle *diagramme de Voronoi* de S le diagramme formé de l'ensemble des cellules de Voronoi des points de S :

$$\text{Vor}(S) = \{\text{Vor}_S(P) \mid P \in S\}.$$

Les diagrammes de Voronoi apparaissent naturellement dans différentes situations :

- problèmes de répartition : les habitants d'une ville se rendant toujours au bureau de poste le plus proche de chez eux, la répartition des utilisateurs des bureaux de poste suit un diagramme de Voronoi. Il est par conséquent intéressant d'étudier de tels diagrammes lorsque l'on veut choisir l'emplacement d'un nouveau bureau.

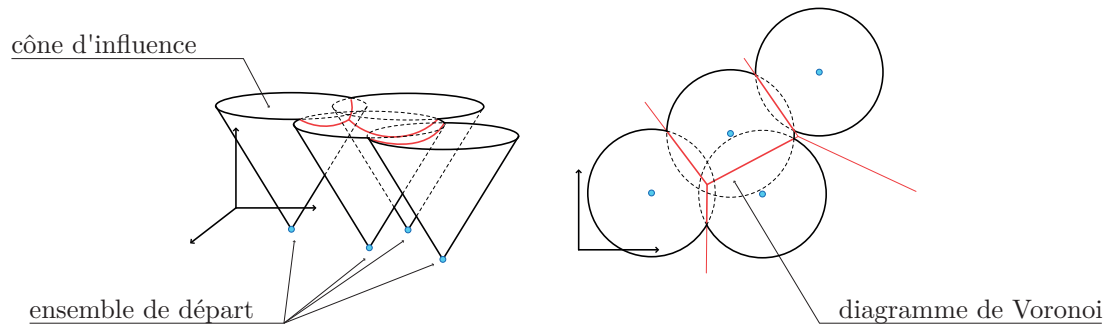


FIG. 1 – Diagramme de Voronoi et cônes d'influence

- problèmes de croissance : lorsqu'on dispose des échantillons de bactéries sur une planche nutritive, on observe une croissance centrifuge qui s'arrête lorsque deux échantillons se rejoignent. Si toutes les bactéries se développent à la même vitesse, on obtient ainsi le diagramme de Voronoi des points correspondant à l'emplacement initial des échantillons (fig. 1). On observe le même phénomène sur la carapace des tortues ou dans le cou des girafes réticulés (fig. 2).



FIG. 2 – Girafe réticulée et tortue

Dans ce texte, on présente plusieurs aspects des diagrammes de Voronoi. On étudie d'abord l'espace des sphères de E , les faisceaux de sphères et la représentation d'un diagramme de Voronoi comme projection de l'intersection de certains demi-espaces de l'espace des sphères (théorème 1). On propose ensuite un algorithme de calcul de diagrammes de Voronoi plans par une technique de balayage. On présente enfin un résultat de projection pour les diagrammes de Voronoi de l'espace hyperbolique (théorème 2), analogue au résultat du cadre euclidien de la partie 2.

2 L'espace des sphères

2.1 Définitions

Soient $P \in E$ et $R \in \mathbb{R}^+$. On appelle *puissance* de la sphère de centre P et de rayon R l'application $\Sigma_{P,R}$ de E dans \mathbb{R} qui à un point M associe $\Sigma_{P,R}(M) = MP^2 - R^2$. La puissance d'une sphère est clairement nulle sur cette sphère, positive à l'extérieur et négative à l'intérieur. Elle atteint son minimum au centre de la sphère. Le centre et le rayon de la sphère sont donc déterminés par la puissance de la sphère. Dans la suite, on confond une sphère et sa puissance.

À la sphère $\Sigma_{P,R}$ de E de centre P et de rayon R , on fait correspondre le point $\Psi(\Sigma_{P,R}) = (P, P^2 - R^2) \in E \times \mathbb{R}$. L'ensemble $\tilde{E} = E \times \mathbb{R}$ est appelé *espace des sphères*. On notera x la première coordonnée des points de cet espace ($x \in E$) et t la deuxième ($t \in \mathbb{R}$); on parlera d'*abscisse* et d'*ordonnée*. Le paraboloidé \mathbb{P} de \tilde{E} d'équation $t = x^2$ représente les sphères de rayon nul. Tous les points de \tilde{E} situés au-dessous de \mathbb{P} correspondent aux sphères réelles de E tandis que les points de \tilde{E} au-dessus de \mathbb{P} sont des sphères imaginaires.

Nous allons voir dans ce qui suit que les problèmes relatifs aux sphères dans l'espace E peuvent se voir comme des problèmes linéaires dans l'espace des sphères \tilde{E} . On a ainsi linéarisé ces problèmes en augmentant la dimension de l'espace. Pour illustrer ceci, on commence par étudier les faisceaux de sphères de E , puis on applique cette linéarisation aux diagrammes de Voronoi.

2.2 Faisceaux de sphères

Un *faisceau de sphères* est l'ensemble $\mathcal{F}_{\Sigma_1, \Sigma_2}$ des sphères combinaisons linéaires affines de deux sphères données Σ_1 et Σ_2 :

$$\mathcal{F}_{\Sigma_1, \Sigma_2} = \{\lambda \Sigma_1 + (1 - \lambda) \Sigma_2 \mid \lambda \in \mathbb{R}\},$$

(où $\lambda \Sigma_1 + (1 - \lambda) \Sigma_2$ désigne la sphère de puissance $M \mapsto \lambda \Sigma_1(M) + (1 - \lambda) \Sigma_2(M)$).

On vérifie que le faisceau de sphères $\mathcal{F}_{\Sigma_1, \Sigma_2}$ est envoyé par Ψ dans l'espace des sphères sur une droite passant par les points de $\Psi(\Sigma_1)$ et $\Psi(\Sigma_2)$. Les faisceaux de sphères peuvent donc se classer suivant le nombre d'intersections de leur image par Ψ avec le paraboloidé \mathbb{P} . On a ainsi les quatre situations suivantes (fig. 3) :

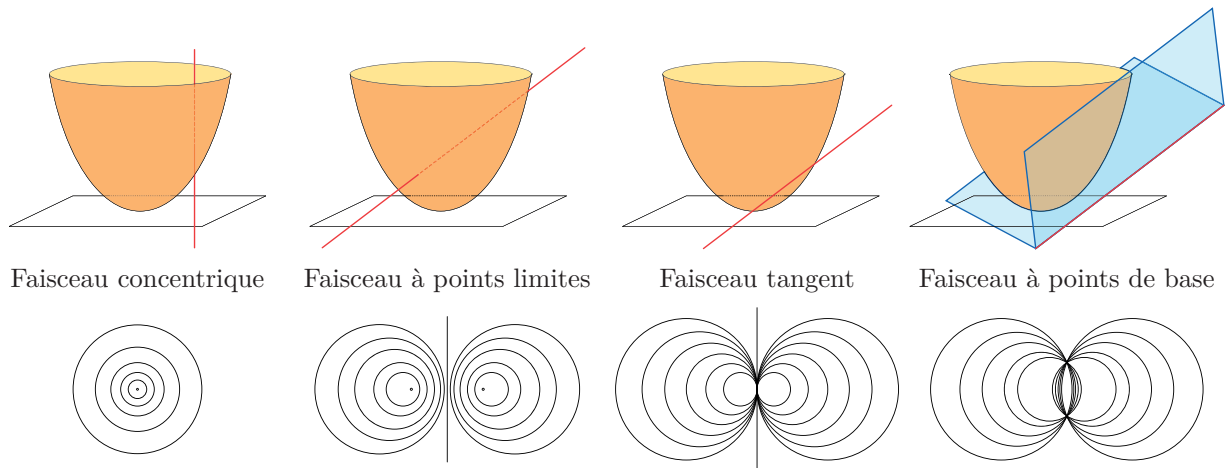


FIG. 3 – Les quatre types de faisceaux de sphères

1. Si la droite $\Psi(\mathcal{F})$ rencontre \mathbb{P} en deux points, \mathcal{F} contient deux sphères de rayon nul que l'on appelle *points limites* du faisceau \mathcal{F} .
2. Si la droite $\Psi(\mathcal{F})$ rencontre \mathbb{P} transversalement en un point, elle est nécessairement verticale (puisque le paraboloidé est dirigé par la verticale). \mathcal{F} est donc un faisceau de *sphères concentriques*.

3. Si la droite $\Psi(\mathcal{F})$ ne rencontre pas \mathbb{P} , il existe une famille d'hyperplans tangents au paraboloid \mathbb{P} qui contiennent $\Psi(\mathcal{F})$. On note $\Sigma_{\mathcal{F}}$ l'ensemble des points de E (considérés comme des sphères de rayon nul) qui appartiennent à toutes les sphères du faisceau \mathcal{F} . L'image par Ψ de $\Sigma_{\mathcal{F}}$ correspond aux points de contact avec \mathbb{P} des hyperplans tangents à \mathbb{P} et contenant $\Psi(\mathcal{F})$. Ainsi, $\Sigma_{\mathcal{F}}$ est non vide, et on vérifie que c'est une sphère de dimension $n - 1$ que l'on appelle *sphère de base* du faisceau \mathcal{F} .
4. Si la droite $\Psi(\mathcal{F})$ est tangente à \mathbb{P} , on se trouve dans la situation d'un faisceau à points limites dont les deux points limites sont confondus, ou dans celle d'un faisceau à sphère de base dont la sphère de base est réduite à un point. On parle de *faisceau tangent*.

2.3 Diagramme de Voronoi et projection

Considérons un point P de E (encore une fois confondu avec la sphère de rayon nulle correspondante), et notons H_P l'hyperplan tangent au paraboloid \mathbb{P} au point $\Psi(P)$. L'équation de H_P est donné par :

$$t = 2\langle x | P \rangle - P^2.$$

Par conséquent, si P et Q sont deux points fixés de E , un point M de E est plus proche de P que de Q si et seulement si au point d'abscisse M , l'hyperplan H_P est au-dessus de l'hyperplan H_Q . On en déduit le théorème suivant (fig. 4) :

Théorème 1. *Le diagramme de Voronoi d'un ensemble fini S de points de E est obtenu par projection verticale sur E de l'intersection des demi-espaces supérieurs de \tilde{E} délimités par les hyperplans H_P , $P \in S$.*

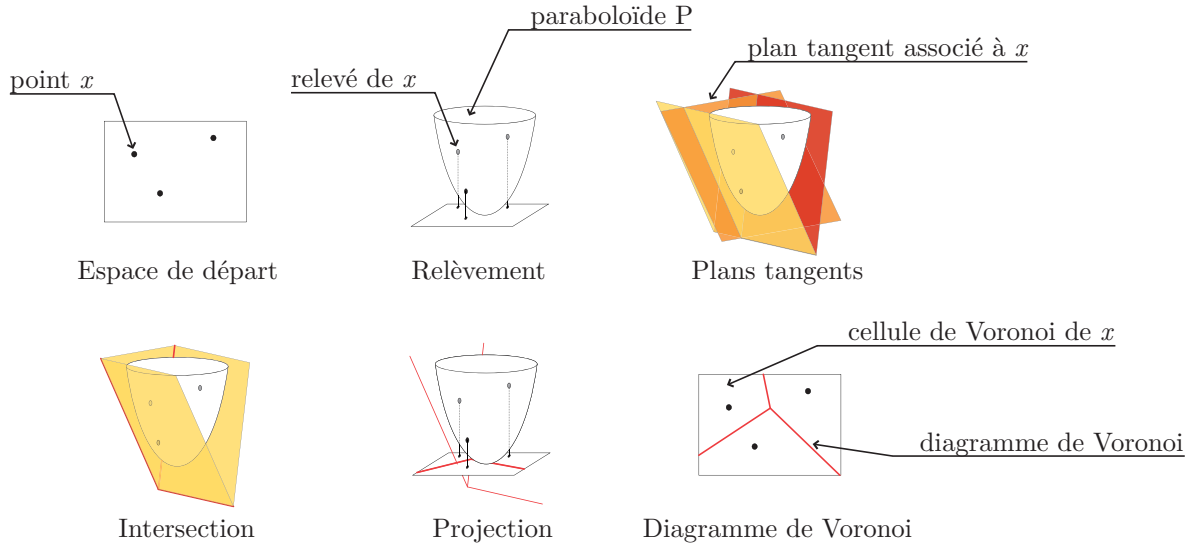


FIG. 4 – Diagramme de Voronoi par projection

3 Algorithme de calcul par balayage

Dans ce paragraphe, on présente un algorithme qui calcule le diagramme de Voronoi d'un ensemble $S = \{P_1, \dots, P_k\}$ de k points du plan en temps $O(k \ln k)$ par une méthode de balayage.

Le plan étant le plan horizontal de l'espace, on a vu (fig. 1 et problèmes de croissance) que le diagramme de Voronoi de S est la projection verticale sur le plan $t = 0$ de l'enveloppe convexe inférieure de $\bigcup_{i=1..k} C_i$, où C_i est le cône d'angle $\pi/4$, d'axe vertical et de sommet P_i (donc d'équation $t = \|XP_i\|$). L'algorithme de balayage va calculer une projection sur le plan $t = 0$ de cette enveloppe convexe inférieure, mais au lieu de calculer la projection verticale, ce sera la projection parallèlement à la direction $(0, 1, -1)$ (fig. 5). Cette dernière projection va pouvoir être calculée par balayage, et on pourra déduire du diagramme $\text{Vor}'(S)$ ainsi obtenu le diagramme de Voronoi $\text{Vor}(S)$.

On définit donc l'application

$$\alpha : \mathbb{R}^2 \longrightarrow \mathbb{R}^2$$

$$M = \begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix} \longmapsto \begin{pmatrix} x \\ y + \min_{i=1..k} \|MP_i\| \end{pmatrix}.$$

Cette application est continue. De plus, si D est une droite parallèle à l'axe (Oy) , alors

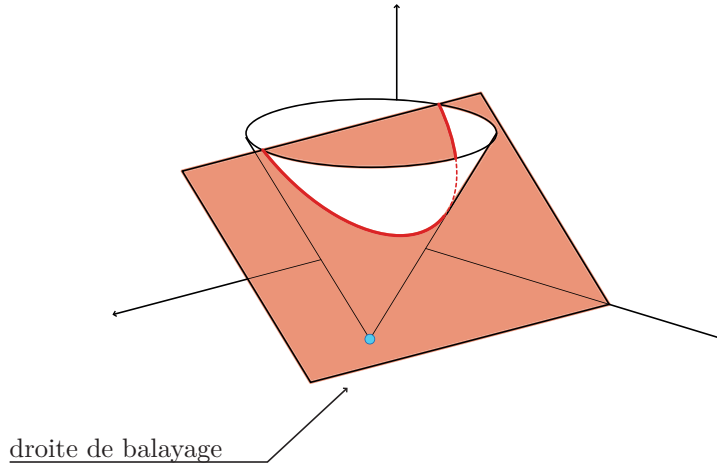


FIG. 5 – Projection parallèlement à une génératrice des cônes

- si $D \cap S = \emptyset$, alors pour tout $i \in \{1..k\}$, et tous points $M_1 = (x, y_1)$ et $M_2 = (x, y_2)$ de D , avec $y_1 < y_2$, l'inégalité triangulaire donne

$$\|M_1 P_i\| < \|M_1 M_2\| + \|M_2 P_i\|.$$

Ainsi, les applications $y \mapsto y + \left\| \begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix} P_i \right\|$ sont toutes strictement croissantes, donc par passage au minimum, α est strictement croissante sur D , donc injective.

- si $P_i \in D \cap S$, α prend la même valeur sur tous les points de D situés avant P_i , mais reste injective après P_i .

On en déduit que α est injective et continue sur les arêtes du diagramme de Voronoi de S . Ainsi, α transforme le diagramme $\text{Vor}(S)$ en un diagramme $\text{Vor}'(S)$ ayant la même structure combinatoire :

1. la cellule $\text{Vor}_S(P_i)$ de $\text{Vor}(S)$ est envoyée sur une cellule $\text{Vor}'_S(P_i)$ de $\text{Vor}'(S)$,
2. l'arête $V(P_i, P_j)$ séparant deux cellules adjacentes $\text{Vor}_S(P_i)$ et $\text{Vor}_S(P_j)$, et portée par la médiatrice de P_i et P_j est envoyée sur une arête $V'(P_i, P_j)$ qui sépare les deux cellules $\text{Vor}'_S(P_i)$ et $\text{Vor}'_S(P_j)$, et est portée par l'hyperbole projection (parallèlement à la direction $(0, 1, -1)$) de l'intersection des deux cônes C_i et C_j .
3. le sommet $M_{ij\ell}$ à l'intersection des trois cellules $\text{Vor}_S(P_i)$, $\text{Vor}_S(P_j)$ et $\text{Vor}_S(P_\ell)$ est envoyé sur le sommet $M'_{ij\ell}$ intersection de $\text{Vor}'_S(P_i)$, $\text{Vor}'_S(P_j)$ et $\text{Vor}'_S(P_\ell)$.

Pour retrouver le diagramme $\text{Vor}(S)$ à partir du diagramme $\text{Vor}'(S)$, il suffit donc de suivre la structure combinatoire du second et de calculer les coordonnées des points $M_{ij\ell}$.

On s'intéresse donc maintenant au calcul effectif de $\text{Vor}'(S)$. Le balayage est effectué par une droite Δ parallèle à l'axe (Ox) , qui se déplace dans le sens des ordonnées croissantes. à chaque instant, on garde en mémoire deux structures fondamentales :

1. un dictionnaire D qui représente les arêtes de $\text{Vor}'(S)$ qui intersectent Δ , triées par abscisses croissantes, et les cellules que ces arêtes séparent.
2. une queue de priorité qui représente les événements qui nécessitent une mise à jour, triés par ordonnées croissantes. Ces événements sont de deux types :
 - (a) lorsque Δ atteint un point P_i de S . Dans ce cas, une nouvelle région $\text{Vor}_S(P_i)$ est créée et deux arcs sont insérés dans D .
 - (b) lorsque Δ atteint un point d'intersection de deux arcs. Dans ce cas, les deux arcs $V'(P_i, P_j)$ et $V'(P_j, P_\ell)$ sont remplacés par un unique arc $V'(P_i, P_\ell)$ et la région $\text{Vor}_S(P_j)$ est supprimée de D .

Dans ces deux cas, chaque fois que deux arcs deviennent consécutifs, on teste s'ils se rencontrent, et si tel est le cas, on insère l'ordonnée de leur intersection dans la queue de priorité.

On parcourt ainsi toute la queue de priorité, et on a construit le diagramme $\text{Vor}'(S)$.

4 Diagrammes de Voronoi hyperboliques

4.1 Présentation de l'espace hyperbolique

On considère simultanément deux modèles du plan hyperbolique, le *demi-plan de Poincaré* et le *disque de Poincaré* :

$$\mathbb{H} = \{z \in \mathbb{C} \mid \Im(z) > 0\}, \quad \mathbb{D} = \{z \in \mathbb{C} \mid |z| < 1\},$$

que l'on munit des *éléments de distance hyperboliques* respectifs

$$ds_{\text{hyp}}(z) = \frac{ds_{\text{euc}}}{\Im(z)}, \quad ds_{\text{hyp}}(z) = \frac{2ds_{\text{euc}}}{1 + |z|^2},$$

(où ds_{euc} désigne un élément de distance euclidienne).

On définit la *distance hyperbolique* $d_{\text{hyp}}(x, y)$ entre deux points x et y comme étant la borne inférieure, sur l'ensemble des chemins γ de classe C^1 par morceaux reliant x à y , de l'intégrale

$$\int_0^1 ds_{\text{hyp}}(\gamma(t)) dt$$

Cette borne inférieure est atteinte par un unique chemin (à reparamétrage près), appelé *géodésique* entre x et y . Dans \mathbb{H} , les géodésiques sont les droites perpendiculaires à l'axe réel et les demi-cercles centrés sur cet axe (fig. 6). Dans \mathbb{D} , les géodésiques sont les diamètres du disque et les arcs de cercles perpendiculaires au bord (fig. 6).

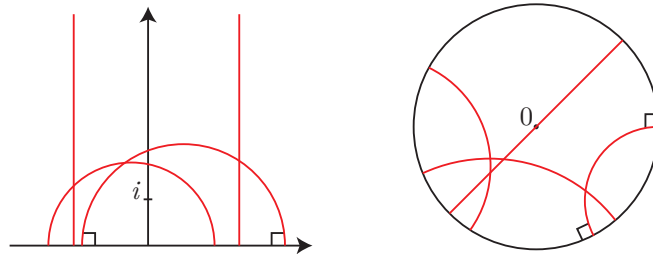


FIG. 6 – Géodésiques des deux modèles du plan hyperbolique

On dit que deux géodésiques sont *parallèles* si elles ne se coupent pas. On note qu'il existe une infinité de géodésiques parallèles à une géodésique D et passant par un point P donnés. Ceci exprime le caractère non euclidien de la géométrie hyperbolique (fig. 7).

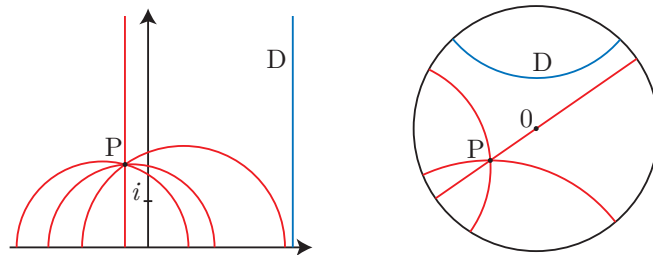


FIG. 7 – Caractère non euclidien de la géométrie hyperbolique

On relie ces deux modèles par les homographies réciproques

$$\alpha : \begin{array}{ccc} \mathbb{H} & \longrightarrow & \mathbb{D} \\ z & \longmapsto & \frac{iz+1}{z+i} \end{array}, \quad \beta : \begin{array}{ccc} \mathbb{D} & \longrightarrow & \mathbb{H} \\ z & \longmapsto & \frac{-iz+1}{z-i} \end{array},$$

qui sont des isométries pour les distances considérées.

4.2 Faisceaux concentriques de cercles hyperboliques

On considère un point P de \mathbb{H} et $R \in \mathbb{R}^+$. On appelle *cercle hyperbolique* de centre P et de rayon R l'ensemble $\Sigma_{P,R}^{\text{hyp}}$ des points de \mathbb{H} dont la distance hyperbolique à P est R . On s'intéresse ici au *faisceau concentrique de cercles hyperboliques* de centre P , c'est-à-dire à l'ensemble des cercles hyperboliques de \mathbb{H} de centre P

Quitte à appliquer une homographie bien choisie, on peut se restreindre à étudier le cas $P = i$. Or l'homographie α envoie i sur 0 , et conserve les distances hyperboliques. Elle envoie donc le faisceau concentrique de cercles hyperboliques de centre i dans \mathbb{H} sur le faisceau concentrique de centre 0 dans \mathbb{D} . La distance hyperbolique sur le disque de Poincaré étant isotrope en 0 , ce dernier faisceau est confondu avec le faisceau de cercles euclidiens de centre 0 . Le faisceau concentrique de centre i dans \mathbb{H} est donc l'image par β du faisceau concentrique euclidien de centre 0 .

Soit $R \in \mathbb{R}$. Alors

$$\begin{aligned} \beta(\Sigma_{0,R}) &= \{z \in \mathbb{H} \mid \alpha(z) \in \Sigma_{0,R}\} \\ &= \{z \in \mathbb{H} \mid |\alpha(z)|^2 = R^2\} \\ &= \{z \in \mathbb{H} \mid (iz + 1)(-i\bar{z} + 1) = R^2(z + i)(\bar{z} - i)\} \\ &= \left\{ z \in \mathbb{H} \mid \left| z - i \cdot \frac{1 + R^2}{1 - R^2} \right| = \left(\frac{2R}{1 - R^2} \right)^2 \right\} \end{aligned}$$

On en déduit que le faisceau concentrique de cercles hyperboliques de centre i dans \mathbb{H} est confondu avec le faisceau à points limites de cercles euclidiens dont les points limites sont $i \cdot \frac{1+R^2}{1-R^2}$ et son conjugué. Notons que la droite image par Ψ de ce faisceau de cercles est une droite dirigée par l'axe (Ox) .

4.3 Diagrammes de Voronoi hyperboliques

On définit les diagrammes de Voronoi hyperboliques de la même manière que leurs analogues euclidiens : soit S ensemble fini de points de \mathbb{H} et $P \in S$. On appelle *cellule de Voronoi hyperbolique* de P (dans S) l'ensemble des points de \mathbb{H} situés plus près (au sens de la distance hyperbolique) de P que de tous les autres points de S :

$$\text{Vor}_S(P) = \{M \in E \mid \forall Q \in S, d_{\text{hyp}}(M, P) \leq d_{\text{hyp}}(M, Q)\}.$$

On appelle *diagramme de Voronoi hyperbolique* de S le diagramme formé de l'ensemble des cellules de Voronoi hyperboliques des points de S :

$$\text{Vor}(S) = \{\text{Vor}_S(P) \mid P \in S\}.$$

L'étude précédente sur les faisceaux de cercles hyperboliques permet d'affirmer le théorème de projection suivant (fig. 8) :

Théorème 2. *Le diagramme de Voronoi hyperbolique d'un ensemble fini S de points de \mathbb{H} s'obtient en considérant le polytope intersection des demi-espaces supérieurs de \tilde{E} délimités par les hyperplans H_P ($P \in S$), en le projetant sur le paraboloïde \mathbb{P} parallèlement à l'axe (Ox) , puis en projetant verticalement le résultat sur \mathbb{H} .*

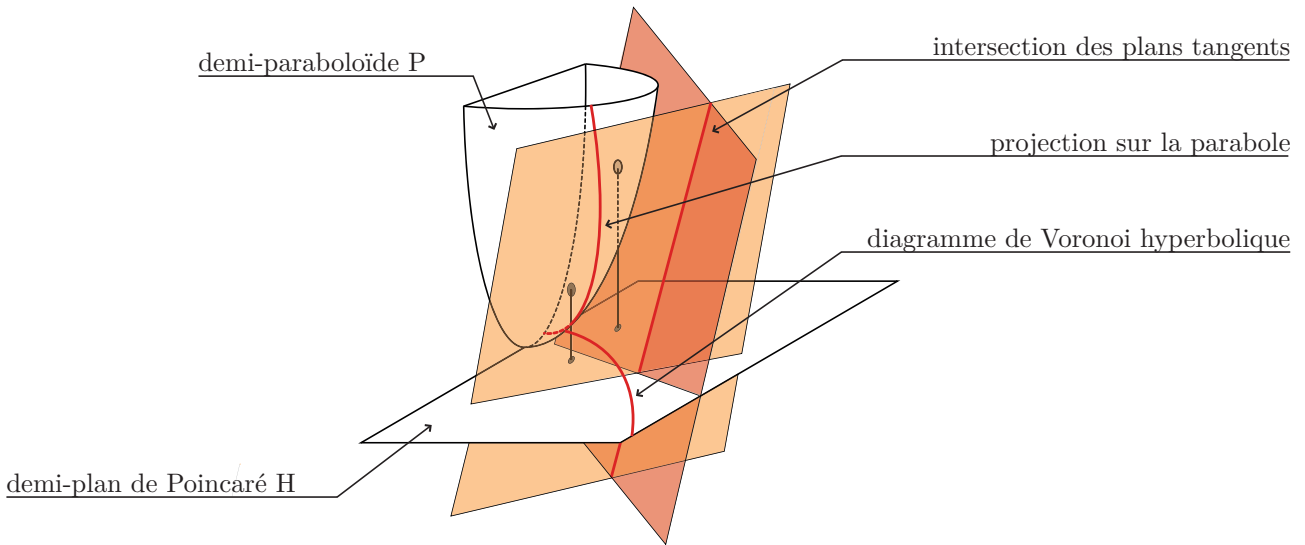


FIG. 8 – Diagramme de Voronoi hyperbolique et projections

5 Questions et remarques

5.1 Questions

On pourra traiter les problèmes suivants :

1. sur la géométrie euclidienne :
 - (a) étant données deux sphères, déterminer l'ensemble des points qui ont la même puissance par rapport à ces deux sphères. On pourra donner des exemples dans les cas où
 - i. les deux sphères s'intersectent,
 - ii. l'une des sphères englobe l'autre,
 - iii. les deux sphères sont séparées.
 - (b) démontrer le théorème 1.
 - (c) écrire une procédure Maple prenant en entrée une liste de points du plan et permettant de visualiser son diagramme de Voronoi. On pourra utiliser pour cela une projection de cônes ou d'hyperplans.
 - (d) utiliser l'espace des sphères pour montrer que l'union (ou l'intersection) de boules est la projection verticale de l'intersection du parabolôïde \mathbb{P} avec un certain polytope de \tilde{E} .
2. sur la combinatoire en dimension 3 :
 - (a) montrer qu'un polyèdre de dimension 3 avec f faces a au plus $3f - 6$ arêtes et $2f - 4$ sommets (on utilisera la formule d'Euler et les relations d'incidence sommets-arêtes : une arête est incidente à deux sommets tandis qu'un sommet est incident à au moins trois arêtes).
 - (b) en déduire que la complexité totale (ie. nombre de faces + nombre d'arêtes + nombre de sommets) d'un diagramme de Voronoi de k points du plan est bornée par $6k - 11$.
 - (c) que peut-on dire en dimension supérieure ?
3. sur le calcul du diagramme de Voronoi dans le plan :
 - (a) présenter des méthodes de tri de listes et d'insertion dans une liste triée. Discuter la complexité de tels algorithmes.
 - (b) implémenter les deux mises à jour de l'algorithme de balayage (rencontre d'un nouveau point et fermeture d'une cellule).
 - (c) implémenter l'algorithme de calcul du diagramme de Voronoi par balayage.
 - (d) justifier la complexité de l'algorithme de balayage. Cette complexité est-elle optimale ?
4. sur la géométrie hyperbolique :
 - (a) montrer qu'un cercle hyperbolique est toujours confondu avec un cercle euclidien, et préciser le centre et le rayon euclidiens en fonction du centre et du rayon hyperboliques.
 - (b) préciser l'étude des faisceaux concentriques de cercles hyperboliques.
 - (c) discuter l'étude générale des faisceaux de cercles hyperboliques.
 - (d) démontrer le théorème 2.

5.2 Remarques et références

Ce texte est essentiellement tiré du livre *Géométrie Algorithmique* écrit par M. YVINEC & J.D. BOISSONAT. Ce livre présente en particulier l'espace des sphères et la représentation du diagramme de Voronoi comme projection de l'intersection des demi-espaces limités par les hyperplans tangents au parabolôïde. Cette linéarisation a pour conséquence importante le contrôle de la complexité du diagramme de Voronoi. En effet, le *théorème de la borne supérieure* assure que la complexité d'un polytope obtenu comme intersection de k demi-espaces dans l'espace \mathbb{R}^{n+1} est un $O(m^{\lceil \frac{n}{2} \rceil})$. Par projection, la complexité d'un diagramme de Voronoi de k points de \mathbb{R}^m est donc en $O(k^{\lceil \frac{m}{2} \rceil})$. On utilise implicitement ce résultat dans ce texte en affirmant que la complexité du calcul du diagramme de Voronoi dans le plan est essentiellement celle du tri initial des points, le nombre d'objets étudiés (sommets, arêtes et cellules des diagrammes $\text{Vor}(S)$ et $\text{Vor}'(S)$) étant linéaire.

Deux présentations intéressantes et très différentes de la géométrie hyperbolique peuvent être trouvées dans *Fuchsian Groups* de S. KATOK et dans *Hyperbolic Geometry* de J. ANDERSON. Ils traitent de manière assez complémentaire divers aspects de l'espace hyperbolique : la construction de la distance hyperbolique, l'étude des géodésiques, l'étude

des isométries de l'espace hyperbolique et la trigonométrie hyperbolique. La représentation du diagramme de Voronoi hyperbolique comme double projection de l'intersection des demi-espaces limités par les hyperplans tangents au parabolöide est traitée dans *Géométrie Algorithmique*, de M. YVINEC & J.D. BOISSONAT.

La notion de diagramme de Voronoi, l'utilisation des hyperplans tangents au parabolöide et l'aspect hyperbolique peuvent constituer des exemples intéressants dans les leçons d'agrégation suivantes :

– PROBLÈMES D'ANGLES ET DE DISTANCE EN DIMENSION 2 ET 3

Il est alors important de faire le lien entre le diagramme de Voronoi d'un ensemble S de points en position générale et la triangulation de Delaunay de S , ces deux complexes étant des complexes duaux. Ces deux complexes présentent de réelles spécificités en dimension 2 et 3 d'un point de vue algorithmique (on a vu un algorithme de balayage spécifique à la dimension 2), théorique (en dimension 2, on peut montrer que la triangulation de Delaunay d'un ensemble de points est la triangulation qui optimise le grain et la finesse, propriétés sur les angles et les longueurs des arêtes de la triangulation), et pratique (de nombreuses applications des diagrammes de Voronoi concernent les dimensions 2 et 3 : on pense par exemple à la reconstruction de courbes et de surfaces à partir d'un échantillonnage,...).

– FORMES LINÉAIRES ET HYPERPLANS

L'utilisation géométrique des hyperplans tangents au parabolöide (équation, codage de la distance,...) peut constituer un complément à l'étude algébrique des hyperplans dans cette leçon.

– toute leçon faisant intervenir de la géométrie hyperbolique.