

Rigidité d'un assemblage de tiges métalliques

Vincent Pilaud

2007

1 Introduction

Dans ce texte, on s'intéresse aux propriétés de rigidité d'un assemblage de tiges métalliques reliées par des joints flexibles. Le cadre formel dans lequel se place ce texte est le suivant.

On considère un *graphe* $G = (S, A)$ (où S est l'ensemble des *sommets* de G et $A \subset \binom{S}{2}$ l'ensemble de ses *arêtes*) et un *plongement* $\phi : S \rightarrow \mathbb{R}^d$ de G (une arête $\{r, s\}$ est envoyée sur le segment $[\phi(r), \phi(s)] \subset \mathbb{R}^d$). On appelle *mouvement* du graphe G toute application $\Psi : S \times [0, 1] \rightarrow \mathbb{R}^d$ telle que

1. pour tout $s \in S$, $\Psi(s, 0) = \phi(s)$,
2. pour tout $s \in S$, la *trajectoire* $\psi_s : \begin{matrix} [0, 1] & \rightarrow & \mathbb{R}^d \\ x & \mapsto & \Psi(s, x) \end{matrix}$ du point s est dérivable,
3. pour tout $\{r, s\} \in A$, la distance entre les deux trajectoires de r et s reste constante, ie. pour tout $x \in [0, 1]$, $\|\Psi(r, x) - \Psi(s, x)\| = \|\phi(r) - \phi(s)\|$.

Un mouvement $\Psi : S \times [0, 1] \rightarrow \mathbb{R}^d$ est dit *rigide* s'il correspond à une isométrie de \mathbb{R}^d , ie. si pour tout $\{r, s\} \in S^2$, et tout $x \in [0, 1]$, $\|\Psi(r, x) - \Psi(s, x)\| = \|\phi(r) - \phi(s)\|$. On dit que le graphe plongé (G, ϕ) est *rigide* si tout mouvement de G est rigide.

La figure 1 présente des graphes rigides et non-rigides en dimension 2 et 3. Ces exemples posent naturellement les questions suivantes, auxquelles nous allons tenter de répondre dans ce texte :

- (i) face à un graphe plongé, quels sont les moyens de décider s'il est rigide ou pas? Existe-t-il des conditions nécessaires et/ou suffisantes de rigidité? De telles conditions sont-elles implémentables en temps raisonnable?
- (ii) le caractère de rigidité d'un graphe est-il combinatoire ou dépend-t-il significativement du plongement du graphe? Autrement dit, étant donné un graphe, existe-t-il certains plongements pour lesquels il est rigide, et d'autres pour lesquels il ne l'est pas? Un graphe a-t-il un comportement général face à la rigidité de ses plongements?

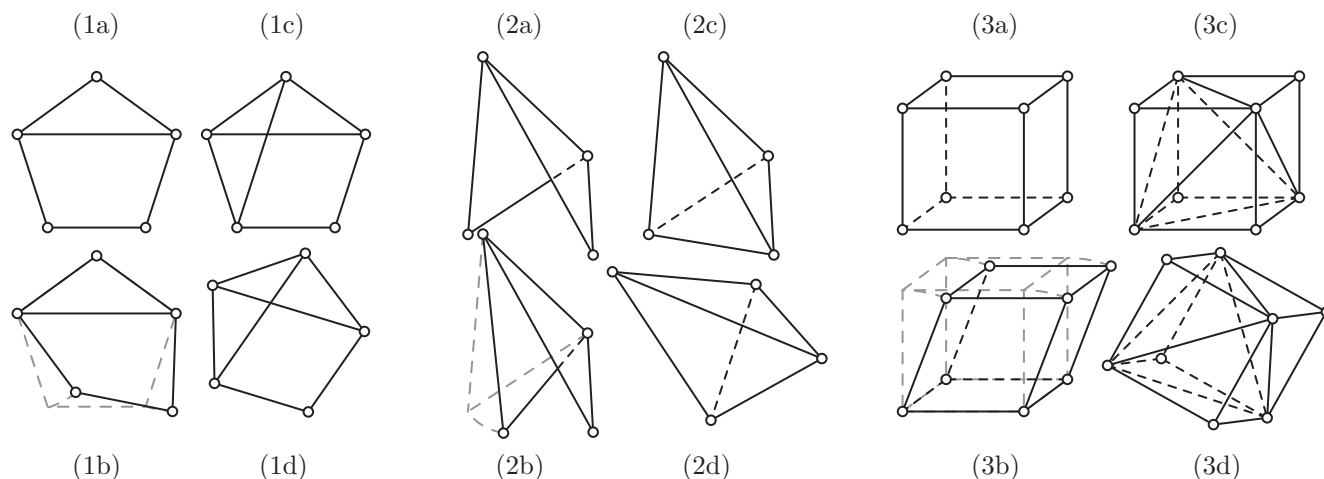


FIG. 1 – Exemples de graphes rigides et non-rigides en dimension 2 et 3 (on a présenté trois carrés de graphes (1,2,3) : dans chaque carré se trouve un graphe non rigide G (a), une transformation non rigide de G (b), un sur-graphe rigide H de G (c), et une transformation rigide de H (d))

L'utilité de la notion de rigidité et ses applications apparaissent clairement dans tout problème de construction. On peut par exemple penser à la conception d'un échafaudage, ou à la rigidité de la tour Eiffel (fig. 2).



FIG. 2 – Quelques détails de la structure de la tour Eiffel

2 Considérations élémentaires et problème de la grille

Dans cette première partie, on s'intéresse au problème de la grille. On se donne deux entiers non nuls m et n et on considère la grille de taille $m \times n$, ie. le graphe $G_{m \times n}$ dont l'ensemble des sommets est $\{(i, j) \mid 0 \leq i \leq m, 0 \leq j \leq n\} \subset \mathbb{R}^2$ et l'ensemble des arêtes $\{(i, j), (i+1, j)\} \mid 0 \leq i \leq m-1, 0 \leq j \leq n\} \cup \{(i, j), (i, j+1)\} \mid 0 \leq i \leq m, 0 \leq j \leq n-1\}$, plongé dans le plan (fig. 4). Un tel graphe n'est naturellement pas rigide : par exemple le carré, ie. la grille de taille 1×1 , est déformable en un losange (fig. 3). On peut cependant rendre rigide le carré en lui rajoutant une ou ses deux diagonales (fig. 3). De la même façon, on peut ajouter à une grille des diagonales de ses cellules, ie. des arêtes de la forme $\{(i, j), (i+1, j+1)\}$ (avec $0 \leq i \leq m-1$ et $0 \leq j \leq n-1$) ou $\{(i, j), (i-1, j+1)\}$ (avec $1 \leq i \leq m$ et $0 \leq j \leq n-1$), et la rendre ainsi rigide : il suffit par exemple d'ajouter toutes les diagonales possibles. Par ailleurs, dans le cas de la grille, comme dans celui du carré, il est clair qu'il est inutile d'ajouter toutes les diagonales : on peut par exemple se limiter aux diagonales montantes $\{(i, j), (i+1, j+1)\}$ ($0 \leq i \leq m-1$ et $0 \leq j \leq n-1$). Le but de ce qui suit est de déterminer le nombre minimal $\gamma(m, n)$ de diagonales montantes nécessaires pour rendre la grille de taille $m \times n$ rigide, et de déterminer leurs emplacements possibles. L'étude de cet exemple nous permet par ailleurs de présenter des méthodes élémentaires pour déterminer la rigidité d'un graphe.

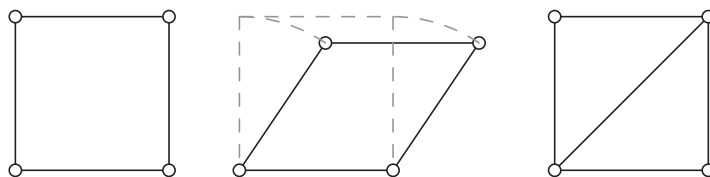


FIG. 3 – Rigidité du carré

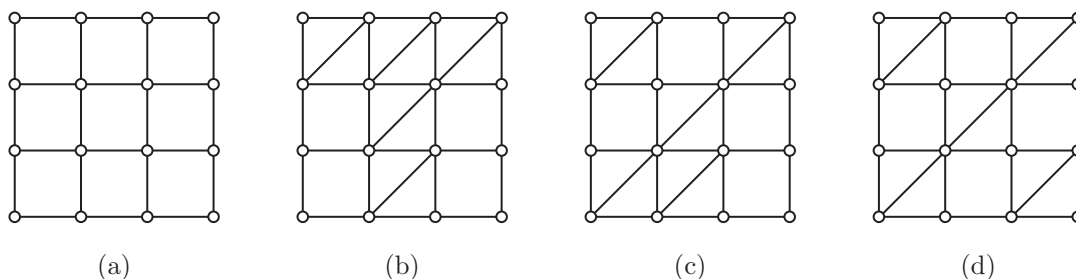


FIG. 4 – Exemples de grille de taille 3×3 complétées par des diagonales montantes

Commençons par une proposition élémentaire qui utilise uniquement la rigidité d'un triangle dans le plan.

Proposition 1. (i) *Un triangle est rigide.*

(ii) *Si $G = (S, A)$ est rigide et $r, s \in S$, alors le graphe $\tilde{G}_{r,s} = (S \cup \{t\}, A \cup \{\{r, t\}, \{s, t\}\})$ est rigide quelle que soit la position du nouveau point t .*

(iii) *Si $G = (S, A)$ est non-rigide alors le graphe $\tilde{G}_{r,s} = (S \cup \{t\}, A \cup \{\{r, t\}, \{s, t\}\})$ est non-rigide, sauf éventuellement si l'angle rts est 0 ou π .*

Cette première proposition nous permet déjà de faire un certain nombre de remarques concernant le problème de la grille :

- Proposition 2.** (i) Pour être rigide, une grille doit contenir au moins une diagonale par ligne et par colonne.
(ii) La seule grille rigide de dimension $1 \times n$ (resp. $m \times 1$) est la grille dont toutes les cases contiennent une diagonale.
(iii) La grille de dimension 2×2 est rigide si et seulement si elle contient au moins 3 diagonales.
(iv) Une grille de dimension $2 \times n$ (resp. $m \times 2$) est rigide si et seulement si toutes ses colonnes (resp. lignes) contiennent au moins une diagonale et au moins une de ses colonnes (resp. lignes) contient 2 diagonales.
(v) Les grilles (b) et (c) de la figure 4 sont rigides. La grille (d) ne l'est pas.
(vi) Une grille dont l'une des colonnes et l'une des lignes contiennent toutes les diagonales est rigide.
(vii) Une grille dont toutes les colonnes (resp. lignes) contiennent au moins une diagonale et dont au moins une des colonnes (resp. lignes) contient toutes les diagonales est rigide.

Cependant, la proposition 1 ne suffit pas à donner une condition nécessaire et suffisante de rigidité d'une grille. Nous avons besoin pour cela d'introduire l'outil suivant.

Soit $G = (S, A)$ un graphe obtenu à partir de la grille $G_{m \times n}$ en ajoutant des diagonales montantes. On appelle *graphe associé* à G le graphe R_G dont l'ensemble des sommets est $\{l_i \mid i = 1, \dots, n\} \cup \{c_j \mid j = 1, \dots, m\}$ et dont l'ensemble des arêtes est $\{\{l_i, c_j\} \mid G \text{ contient une diagonale dans la case } (i, j)\}$. On a alors le théorème :

Théorème 1. Une grille est rigide si et seulement si son graphe associé est connexe.

Commençons par remarquer que quelle que soit la déformation d'une grille, les carrés se transforment en parallélogrammes. Par conséquent, toutes les arêtes verticales (resp. horizontales) situées sur une même ligne i (resp. colonne j) ont toujours une direction commune que l'on note \underline{l}_i (resp. \underline{c}_j). Par ailleurs, si le graphe associé R_G contient l'arête $\{l_i, c_j\}$, c'est qu'il y a une diagonale dans la case (i, j) , et donc que les deux directions \underline{l}_i et \underline{c}_j sont orthogonales. Par suite, si l_i et c_j sont reliés dans R_G par un chemin $l_i = l_{i_0}, c_{j_0}, l_{i_1}, c_{j_1}, \dots, l_{i_p}, c_{j_p} = c_j$, alors $\underline{l}_{i_0} = \dots = \underline{l}_{i_p} \perp \underline{c}_{j_0} = \dots = \underline{c}_{j_p}$. On en déduit que si le graphe R_G est connexe, toutes les arêtes verticales (resp. horizontales) ont une même direction \perp (resp. \underline{c}) et $\perp \perp \underline{c}$, donc la transformation de la grille est rigide.

Réciproquement, supposons que le graphe R_G n'est pas connexe. Soit A la composante connexe de l_1 et B son complémentaire. On définit la transformation $\Psi : \{(i, j) \mid 0 \leq i \leq m, 0 \leq j \leq n\} \times [0, 1] \rightarrow \mathbb{R}^2 \simeq \mathbb{C}$ par

$$\Psi((a, b), t) = \sum_{r=1}^a e^{it\pi\chi_B(c_r)/4} + \sum_{s=1}^b e^{i\pi/2 + it\pi\chi_B(l_s)/4}$$

où χ_B désigne la fonction caractéristique de B (ie. $\chi_B(u) = 1$ si $u \in B$ et 0 sinon). La figure 5 donne un exemple de cette transformation. On vérifie facilement qu'il s'agit d'un mouvement du graphe G qui n'est pas un mouvement rigide.

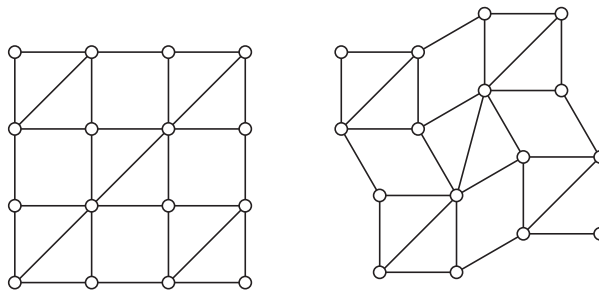


FIG. 5 – La transformation Ψ

Les propriétés usuelles sur la connexité des graphes permettent de déduire de ce théorème le corollaire :

- Corollaire 1.** 1. Le nombre minimal de diagonales montantes nécessaires pour rendre la grille $G_{m \times n}$ rigide est $\gamma(m, n) = m + n - 1$.
2. La grille $G_{m \times n}$, complétée de $m + n - 1$ diagonales montantes, est rigide si et seulement si son graphe associé R_G est un arbre.
3. Une grille rigide dont on retire une diagonale reste rigide si et seulement si la diagonale retirée correspond à un circuit dans R_G .

3 Systèmes d'équations quadratiques et linéaires : rigidité infinitésimale

Étant donné un graphe $G = (S, A)$ plongé dans \mathbb{R}^d par ϕ , une approche naturelle de la question de sa rigidité consiste à écrire le système \mathcal{S} des $|A|$ équations quadratiques (correspondantes aux arêtes de A) à $d|S|$ inconnues (correspondantes aux coordonnées des points de $\phi(S)$ dans \mathbb{R}^d). Considérons par exemple le graphe plongé suivant :

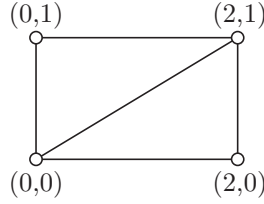


FIG. 6 – Un exemple

Le système d'équations quadratiques qui lui est associé est

$$\begin{cases} (x_1 - x_2)^2 + (y_1 - y_2)^2 = 4 \\ (x_2 - x_3)^2 + (y_2 - y_3)^2 = 1 \\ (x_3 - x_4)^2 + (y_3 - y_4)^2 = 4 \\ (x_1 - x_4)^2 + (y_1 - y_4)^2 = 1 \\ (x_1 - x_3)^2 + (y_1 - y_3)^2 = 5 \end{cases}$$

Notons \mathcal{A} l'ensemble (variété algébrique) des solutions de \mathcal{S} , et \mathcal{B} l'ensemble des solutions de \mathcal{S} qui correspondent à des transformations rigides du graphe. On a clairement

$$(\phi(s)_i)_{i=1,\dots,d} \in \mathcal{B} \subset \mathcal{A} \subset \mathbb{R}^{d|S|}.$$

Le but est de déterminer si l'inclusion $\mathcal{B} \subset \mathcal{A}$ est stricte ou pas. Dans le cas de l'exemple de la figure 6, on trouve deux solutions différentes modulo transformations rigides (fig. 7), mais la seconde ne peut pas être atteinte continuellement à partir de la première. Plus précisément, on cherche donc s'il existe des éléments d'un voisinage de $(\phi(s)_i)_{i=1,\dots,d}$ dans \mathcal{A} qui sont contenus \mathcal{B} .

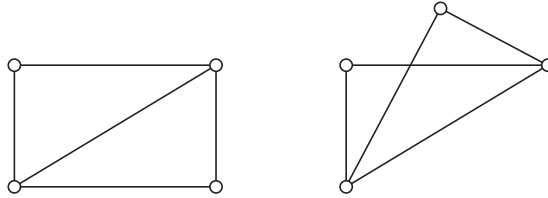


FIG. 7 – Un flip non continu

On se rend compte lorsque l'on utilise cette approche que les calculs deviennent rapidement inextricables. Par conséquent, au lieu d'étudier \mathcal{A} , on va plutôt chercher à comprendre son espace tangent. Cette nouvelle approche du problème est celle de la *rigidité infinitésimale*.

On a supposé qu'un mouvement $\Psi : S \times [0, 1] \rightarrow \mathbb{R}^d$ du graphe plongé (G, ϕ) était dérivable en la seconde variable, donc on peut s'intéresser à l'application $d\Psi : S \rightarrow \mathbb{R}^d$ qui à un sommet s de G associe le vecteur vitesse du mouvement Ψ au temps initial : (fig. 8) :

$$d\Psi(s) = \frac{d}{dx} \Psi(s, 0).$$

On dit qu'une application $v : S \rightarrow \mathbb{R}^d$ est un *mouvement infinitésimal* du graphe plongé (G, ϕ) si pour toute arête $\{r, s\}$ de G , on a $\langle \phi(r) - \phi(s) \mid v(r) - v(s) \rangle = 0$ (où $\langle \mid \rangle$ désigne le produit scalaire de \mathbb{R}^d). On dit que v est un *mouvement infinitésimal rigide* s'il correspond à une isométrie de \mathbb{R}^d , ie. si pour tout $\{r, s\} \in S^2$, $\langle \phi(r) - \phi(s) \mid v(r) - v(s) \rangle = 0$. Un graphe plongé (G, ϕ) est dit *infinitésimalement rigide* si tout mouvement infinitésimal de G est rigide.

Cette nouvelle notion de rigidité est beaucoup plus simple à utiliser que la notion initiale : elle est linéaire. Étant donné le graphe plongé (G, ϕ) , on appelle *matrice de rigidité* la matrice $A_{G,\phi} \in M_{|A|,d|S|}(\mathbb{R})$ dont chaque ligne correspond à une arête de G et chaque groupe de d colonnes à un sommet de G : à l'arête $\{s_i, s_j\}$, on fait correspondre

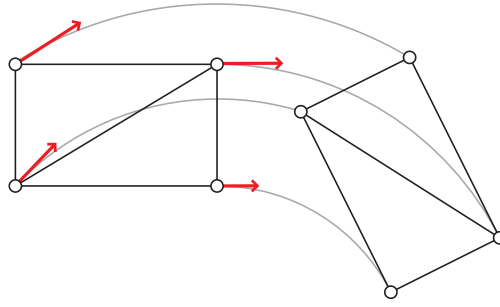


FIG. 8 – Vecteurs vitesse d'un mouvement du rectangle

une ligne dont le i -ème groupe de d colonnes (resp. le j -ème) contient les d coordonnées de $\phi(s_i) - \phi(s_j)$ (resp. de $\phi(s_j) - \phi(s_i)$). Par exemple, la matrice de rigidité du graphe de la figure 6 est :

$$\begin{pmatrix} -2 & 0 & 2 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & -1 & 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 2 & 0 & -2 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & -1 \\ -2 & -1 & 0 & 0 & 2 & 1 & 0 & 0 \end{pmatrix}$$

Il s'agit alors de déterminer si le noyau de cette matrice contient strictement ou pas le sous-espace vectoriel des mouvements infinitésimaux rigides (ie. le noyau de la matrice de rigidité du graphe complet dont l'ensemble des sommets est S). On doit donc calculer le rang de deux matrices de rigidité. Par exemple, le graphe de la figure 6 est infinitésimalement rigide car

$$\text{rg} \begin{pmatrix} -2 & 0 & 2 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & -1 & 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 2 & 0 & -2 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & -1 \\ -2 & -1 & 0 & 0 & 2 & 1 & 0 & 0 \end{pmatrix} = \text{rg} \begin{pmatrix} -2 & 0 & 2 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & -1 & 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 2 & 0 & -2 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & -1 \\ -2 & -1 & 0 & 0 & 2 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 2 & -1 & 0 & 0 & -2 & 1 \end{pmatrix} = 5$$

Reste à savoir le lien entre nos deux notions de rigidité. Considérons d'abord le graphe plongé de la figure 9. Ce graphe est rigide : en effet, les deux triangles ABC et ABF sont rigides, et la chaîne $CDEF$ est maintenue en place par l'inégalité triangulaire. Pourtant, toute application $v : \{A, B, C, D, E, F\} \rightarrow \mathbb{R}^2$ telle que $v(D) = -v(E) \perp (DE)$ et $v_{\{A, B, C, F\}} = 0$ est un mouvement infinitésimal non rigide du graphe. La rigidité n'implique donc pas l'infinitésimale rigidité. En revanche, on a le théorème :

Théorème 2. *Un graphe infinitésimalement rigide est rigide.*

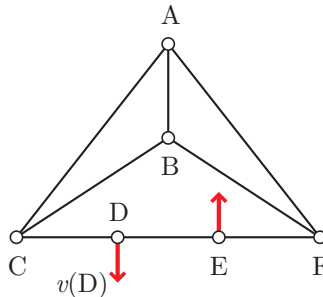


FIG. 9 – Un graphe rigide et non infinitésimalement rigide

4 Propriétés de Laman et jeu des galets : rigidité combinatoire

On s'intéresse maintenant à la notion de rigidité combinatoire : étant donné un graphe $G = (S, A)$, a-t-il un comportement générique en ce qui concerne la rigidité? Autrement dit, peut-il avoir des plongements rigides, et d'autres qui ne le sont pas?

Commençons par un exemple. On considère le graphe G dont l'ensemble des sommets est $S = \{1, 2, 3, 4, 5, 6\}$ et l'ensemble des arêtes est $A = \{\{1, 3\}, \{3, 5\}, \{5, 1\}, \{2, 4\}, \{4, 6\}, \{6, 2\}, \{1, 2\}, \{3, 4\}, \{5, 6\}\}$. On a représenté trois plongements de G sur la figure 10 : le premier est rigide et infinitésimalement rigide, le second est rigide et non infinitésimalement rigide, et le dernier est non rigide.

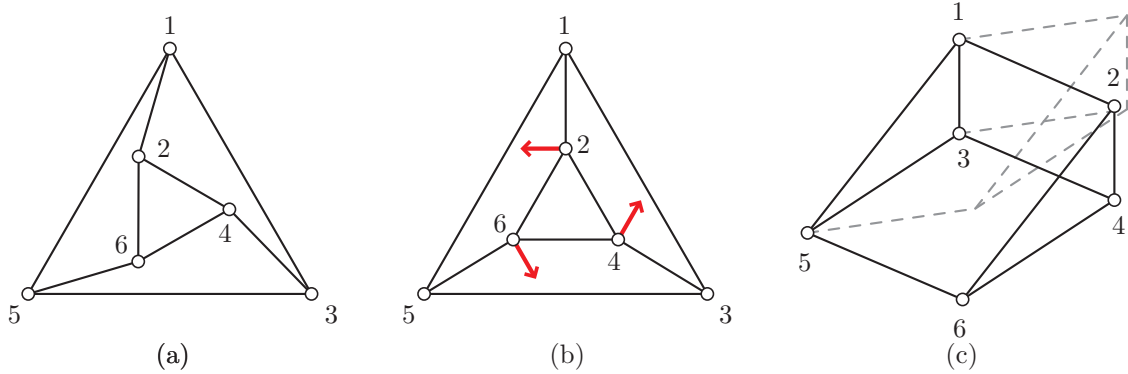


FIG. 10 – Trois plongements de G : (a) est rigide et infinitésimalement rigide, (b) est rigide et non infinitésimalement rigide, et (c) est non rigide

Ceci dit, les plongements (b) et (c) de la figure 10 sont assez particuliers dans le sens que les trois droites (12), (34) et (56) sont soit parallèles, soit concourantes. On dit qu'un plongement ϕ d'un graphe $G = (S, A)$ est *générique* si les coordonnées de $(\phi(s))_{s \in S}$ sont algébriquement indépendantes sur \mathbb{Q} . Le théorème suivant donne alors une réponse claire à notre problème

Théorème 3. 1. *Un plongement générique de G est rigide si et seulement si il est infinitésimalement rigide.*
 2. *Si G admet un plongement générique rigide, alors tous ses plongements génériques sont rigides.*

Ainsi, on dit qu'un graphe $G = (S, A)$ est *rigide* si ses plongements génériques le sont. La rigidité est alors bien combinatoire, puisqu'elle dépend uniquement du graphe et pas de la géométrie particulière d'un plongement. On peut alors se demander s'il est possible de voir combinatoirement si G est rigide. Dans le cas de la dimension 2, les propriétés de Laman permettent de caractériser la rigidité. En dimension 3 et supérieure, tout ce qui est développé dans la fin de ce texte devient faux, et on ne connaît alors pas de condition nécessaire et suffisante de rigidité.

4.1 Propriétés de Laman

Soit $G = (S, A)$ un graphe et ϕ un plongement de G dans le plan. Si G n'a aucune arête, alors la variété \mathcal{A} solution du système quadratique associé à ϕ est de dimension $2|S|$. À chaque arête que l'on rajoute, on ajoute une équation quadratique, qui est éventuellement redondante avec les précédentes, de sorte que la dimension de \mathcal{A} peut baisser au plus de 1. Comme la dimension des transformations rigides du plan est 3, il est clair que pour être rigide, G doit avoir au moins $2|S| - 3$ arêtes.

Supposons maintenant que G est rigide et a exactement $2|S| - 3$ arêtes. Dans ce cas, les $2|S| - 3$ équations quadratiques induites par les arêtes de G sont nécessairement indépendantes. En particulier, aucun sous-graphe de G ayant k sommets n'a plus de $2k - 3$ arêtes.

On appelle *graphe de Laman* tout graphe $G = (S, A)$ tel que

1. $|A| = 2|S| - 3$,
2. G a la propriété de Laman : pour tout $G' = (S', A')$ avec $S' \subset S$ et $A' \subset A$, on a $|A'| \leq 2|S'| - 3$.

La discussion précédente a montré que tout graphe rigide contient un graphe de Laman. Il se trouve que la réciproque est vraie :

Théorème 4. *Un graphe est génériquement rigide si et seulement si il contient un graphe de Laman.*

4.2 Constructions d'Henneberg

Soit $G = (S, A)$ un graphe. On appelle *construction d'Henneberg* les deux constructions suivantes (fig. 11) :

1. on attache un nouveau sommet u à deux sommets $r, s \in S$,
2. on attache un nouveau sommet u à trois sommets $r, s, t \in S$ tels que $\{r, s\} \in A$ et on supprime l'arête $\{r, s\}$.

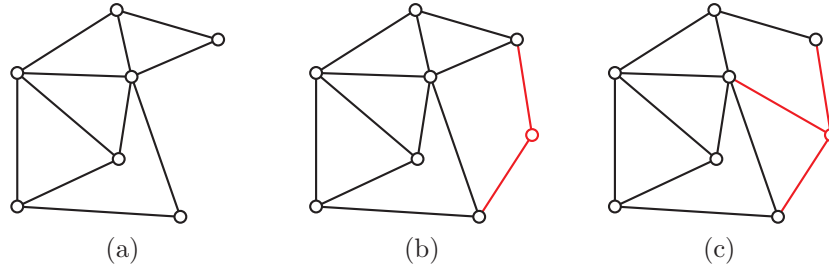


FIG. 11 – Les deux transformations d'Henneberg : (a) un graphe, (b) première transformation et (c) seconde transformation

Ces constructions conservent les graphes de Laman :

Proposition 3. *Si G est un graphe de Laman, et G' est obtenu à partir de G par une construction d'Henneberg, alors G' est un graphe de Laman.*

Montrons le pour la première construction. On note $G = (S, A)$ et $G' = (S', A')$, avec $S' = S \cup \{u\}$ et $A' = A \cup \{\{r, u\}, \{s, u\}\}$. Alors pour tout sous-graphe $G'' = (S'', A'')$ de G' ,

- soit $u \notin S''$, et $|A''| \leq 2|S''| - 3$ (puisque G'' est alors inclus dans G , qui a la propriété de Laman),
- soit $u \in S''$, et $|A''| \leq 2(|S''| - 1) - 3 + 2 \leq 2|S''| - 3$.

Ainsi, G' a la propriété de Laman. Par ailleurs, $|A'| = |A| + 2 = 2|S| - 3 + 2 = 2(|S| + 1) - 3 = 2|S'| - 3$, donc G' est un graphe de Laman. On le montre de la même manière pour la seconde construction.

Par ailleurs, les constructions d'Henneberg permettent d'obtenir n'importe quel graphe de Laman à partir d'un triangle :

Proposition 4. *Pour tout graphe de Laman G , il existe un graphe de Laman G' tel que G s'obtienne à partir de G' par une construction d'Henneberg.*

Soit $G = (S, A)$ un graphe de Laman. Comme $|A| = 2|S| - 3 < 2|S|$, il existe au moins un sommet u de degré inférieur ou égal à 3. Comme G est rigide, u est certainement de degré 2 ou 3. Alors

- (i) si u est de degré 2, on supprime simplement u et les deux arêtes adjacentes,
- (ii) si u est de degré 3, alors les trois sommets r, s et t auxquels il est relié ne peuvent pas être tous les trois reliés (sinon on violerait la propriété de Laman avec le sous-graphe complet sur les sommets r, s, t, u). On supprime donc u et les trois arêtes adjacentes, et on ajoute une arête du triangle rst .

Comme dans la preuve précédente, on vérifie que le graphe obtenu est un graphe de Laman.

4.3 Jeu de galets

On vient de voir que les conditions de Laman permettent de caractériser les graphes rigides du plan. Cependant, cette caractérisation n'est pas encore algorithmique dans le sens où la complexité d'un algorithme naïf testant la propriété de Laman reste rédhibitoire. On termine ce texte en présentant un algorithme, l'algorithme du jeu de galets (pebble game), qui permet de tester en temps polynomial la rigidité d'un graphe dans le plan.

Dans la suite, on s'intéresse à des graphes *multiples orientés* :

- chaque arête peut apparaître plusieurs fois,
- on fixe pour chaque arête une origine et un but.

Pour tout sommet s d'un tel graphe G , on appelle *degré sortant* de s le nombre $DS_G(s)$ d'arêtes de G dont l'origine est s . On dit qu'un graphe multiple $G = (S, A)$ est *acceptable* si pour tout sous-graphe $G' = (S', A')$ de G , on a $|A'| \leq 2|S'|$.

Soit $G = (S, A)$ un graphe multiple orienté de sorte que $DS_G(s) \leq 2$ pour tout $s \in S$. Il est alors clair que G est acceptable. On considère une nouvelle arête $a = \{r, s\}$ et on veut savoir si $\tilde{G} = (S, A \cup \{a\})$ reste acceptable. L'algorithme du *jeu de galets* (pebble game) fait mieux que répondre à la question :

- si \tilde{G} n'est pas acceptable, il donne un sous-graphe $G' = (S', A')$ de G tel que $r, s \in S'$ et $|A'| = 2|S'|$,
- si au contraire \tilde{G} est acceptable, il donne une orientation de \tilde{G} telle que $DS_{\tilde{G}}(s) \leq 2$ pour tout $s \in S$.

JEU DE GALETS

1. On part des ensembles $X = \{r, s\}$, $Y = \emptyset$ et $Z = \{r, s\}$;
 2. Tant que $DS_G(z) = 2$ pour tout $z \in Z$, on effectue les opérations suivantes :
 - (i) Pour tout $z \in Z$, on note $V(z)$ les voisins de z dans G qui ne sont pas dans X ;
 - (ii) X devient $X \cup \bigcup_{z \in Z} V(z)$; Y devient $Y \cup \{\{z, v\} \in A \mid z \in Z \text{ et } v \in V(z)\}$; Z devient $\bigcup_{z \in Z} V(z)$;
 - (iii) Si Z est alors vide, on note A' l'ensemble des arêtes de A dont les deux extrémités sont dans X . Le graphe $G' = (X, A')$ est alors un sous-graphe de G avec $r, s \in X$ et $DS_{G'}(x) = 2$ pour tout $x \in X$. En particulier, $|A'| = 2|X|$ et il est impossible de rajouter l'arête a à G . On arrête alors l'algorithme.
 3. Soit $z \in Z$ tel que $DS_G(z) < 2$, on effectue les opérations suivantes :
 - (i) On cherche un chemin C dans Y reliant l'un des sommets r ou s à z .
 - (ii) On change dans G l'orientation de toutes les arêtes de C et on oriente l'arête a de l'origine de C à l'autre sommet de $\{r, s\}$. On obtient alors une orientation sur $\tilde{G} = (S, A \cup \{a\})$ tel que $DS_{\tilde{G}}(s) \leq 2$ pour tout $s \in S$.
-

La correction de cet algorithme vient de ce que l'on maintient au cours du temps les trois ensembles X , Y et Z , où :

- X est l'ensemble des sommets que l'on a déjà rencontré,
- Y est un ensemble d'arêtes de G sans boucle et reliant $\{r, s\}$ à tout sommet de X ,
- Z est l'ensemble des sommets que l'on a rencontrés pour la première fois à l'étape précédente.

Par ailleurs, la complexité de l'algorithme est linéaire en le nombre de points.

On va maintenant utiliser cet algorithme pour tester si un graphe $G = (S, A)$ est rigide. L'idée essentielle est la suivante : si $G = (S, A)$ est un graphe ayant la propriété de Laman, et si a est une nouvelle arête, alors $\tilde{G} = (S, A \cup \{a\})$ a la propriété de Laman si et seulement si on peut ajouter à A quatre copies de a et obtenir un graphe multiple acceptable.

Le schéma général de l'algorithme est donc le suivant :

RIGIDITÉ

1. On part du graphe $H = (S, \emptyset)$;
 2. Tant qu'il reste une arête a dans A , on effectue les opérations suivantes :
 - (i) On effectue quatre fois l'algorithme du jeu de galets en ajoutant l'arête a .
 - (ii) Si l'algorithme échoue (ie. si le graphe multiple obtenu en ajoutant à A quatre copies de a n'est pas acceptable), alors on jette l'arête a .
 - (iii) Sinon, H devient $(S, A \cap \{a\})$ avec l'orientation fournie par l'algorithme du jeu de galets.
 3. Lorsque toutes les arêtes de A ont été traitées, on peut conclure : le graphe G est rigide si et seulement si le nombre d'arêtes de H est $2|S| - 3$.
-

La correction de l'algorithme vient de ce que le nombre final d'arêtes de H donne le nombre d'équations quadratiques indépendantes, c'est-à-dire le nombre de degrés de liberté du graphe G . Lorsque ce nombre est $2|S| - 3$, H est un sous-graphe de Laman de G . La complexité de cet algorithme est linéaire en $|S||A|$.

5 Questions et remarques

5.1 Questions

On pourra traiter les problèmes suivants :

1. quelques généralités :
 - (a) un graphe rigide en dimension 2 est-il nécessairement rigide en dimension 3 ?
 - (b) montrer que si $G = (S, A)$ est un graphe plongé dans \mathbb{R}^d et $\Psi : S \times [0, 1] \rightarrow \mathbb{R}^d$ est un mouvement rigide du graphe G , alors on peut prolonger Ψ en une application $\tilde{\Psi} : \mathbb{R}^d \times [0, 1] \rightarrow \mathbb{R}^d$ telle que pour tout $t \in [0, 1]$ l'application $\tilde{\Psi}(\cdot, t) : \mathbb{R}^d \rightarrow \mathbb{R}^d$ soit une isométrie.

- (c) démontrer la proposition 1. Généraliser à la dimension d .
 - (d) combien faut-il ajouter au minimum d'arêtes à un polygone simple pour qu'il devienne rigide. Même question pour les solides de Platon.
2. sur le problème de la grille :
- (a) démontrer la proposition 2 (sans utiliser le théorème qui suit).
 - (b) quel est le nombre de façons de compléter la grille $G_{m \times n}$ avec $m + n - 1$ diagonales pour obtenir un graphe rigide.
 - (c) discuter des généralisations suivantes du problème de la grille :
 - cas de la dimension 3,
 - au lieu de compléter certaines diagonales par des barres (de sorte que la distance entre les deux sommets correspondants est fixée), on les complète par des chaînes (de sorte que la distance entre les deux sommets correspondants est plus petite que la longueur de la chaînes).

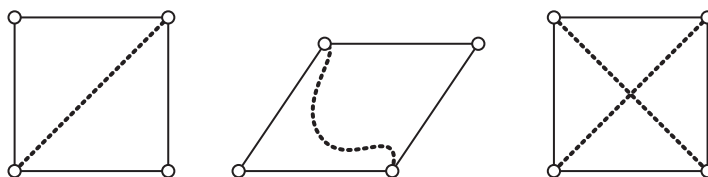


FIG. 12 – Un carré rigidifié par des chaînes

3. sur la rigidité combinatoire :
- (a) implémenter l'algorithme naïf du test de la propriété de Laman.
 - (b) implémenter l'algorithme du jeu de galets et le test de rigidité qui s'en déduit.
 - (c) comparer les deux algorithmes
4. sur la dimension 3 :
- (a) vérifier que la double-banane (fig. 13 (a)) est un contre-exemple au théorème 4 en dimension 3.

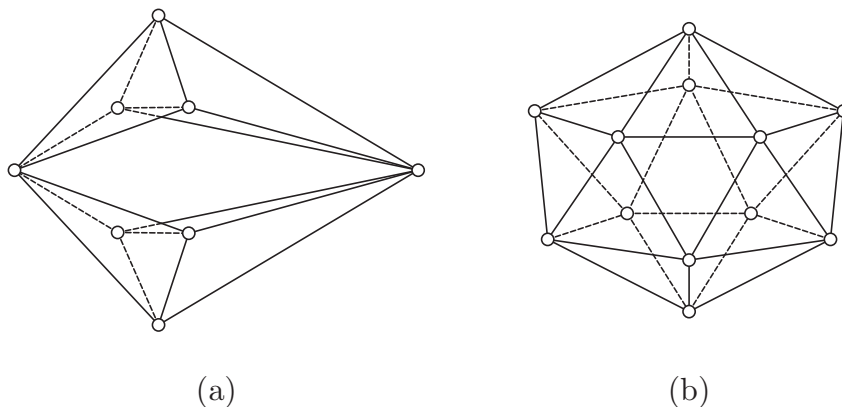


FIG. 13 – Deux contre-exemples : (a) la double-banane et (b) l'isocaèdre

- (b) montrer que l'isocaèdre (fig 13 (b)) est rigide en dimension 3, mais qu'il ne peut pas se construire avec les deux transformations de Henneberg en dimension 3.
- (c) montrer que tout graphe rigide en dimension 3 qui ne peut pas se construire avec les deux transformations de Henneberg en dimension 3 a au moins 12 sommets de degré 5 (ce qui fait de l'isocaèdre un contre-exemple minimal).

5.2 Remarques et références

Pour écrire ce texte, j'ai utilisé essentiellement le livre *Counting on frameworks* de J.E. GRAVER qui constitue une référence aussi accessible qu'intéressante. Il aurait été aussi intéressant de parler de constructions géométriques de courbes utilisant la rigidité de certains montages (par exemple l'inverseur de Paucelier, le théorème de Kempe,...).