Réduction des endomorphismes en dimension finie

Vincent Pilaud

2007

1 Généralités

Dans tout le texte, k désigne un corps (commutatif), n un entier strictement positif, E un k-espace vectoriel de dimension n. On note $\mathcal{L}(E)$ l'algèbre des endomorphismes de E et $\mathcal{GL}(E)$ le groupe des inversibles de $\mathcal{L}(E)$. On note $M_n(k)$ l'algèbre des matrices carrées de taille n à coefficients dans k et $GL_n(k)$ le groupe des inversibles de $M_n(k)$.

1.1 Éléments propres

Définition 1. *On dit que $\lambda \in k$ est une* valeur propre *de $u \in \mathcal{L}(E)$ s'il existe $x \in E \smallsetminus \{0\}$ tel que $u(x) = \lambda x$. On dit alors que x est un* vecteur propre *associé à λ. On appelle* spectre *de u l'ensemble $\mathrm{Sp}(u)$ des valeurs propres de u. Pour tout $\lambda \in \mathrm{Sp}(u)$, on appelle* sous-espace propre *associé à λ le sous-espace vectoriel $E_\lambda = \ker(u - \lambda \mathrm{I})$.*

Théorème 1. *Soient $\lambda_1, \dots, \lambda_\ell$ des valeurs propres distinctes de u. Alors les sous-espaces propres associés $E_{\lambda_1}, \dots, E_{\lambda_\ell}$ sont en somme directe.*

Définition 2. *Soit $A \in M_n(k)$. On appelle* polynôme caractéristique *de A le polynôme défini par $\chi_A(X) = \det(A - X\mathrm{I})$. C'est clairement un invariant de la classe de similitude de A. On appelle* polynôme caractéristique *de $u \in \mathcal{L}(E)$ le polynôme caractéristique χ_u de toute matrice de u.*

Exemple. Le polynôme caractéristique d'un endomorphisme nilpotent de E (ie. tel qu'il existe $p \in \mathbb{N}$ tel que $u^p = 0$) est $(-1)^n X^n$.

Proposition 1. *Pour tout $u \in \mathcal{L}(E)$, on a $\mathrm{Sp}(u) = \{\lambda \in k \mid \chi_u(\lambda) = 0\}$.*

1.2 Diagonalisation, trigonalisation

Théorème 2. *On dit que $u \in \mathcal{L}(E)$ est* diagonalisable *si les propriétés équivalentes suivantes sont vérifiées :*

1. *il existe une base de E formée de vecteurs propres de u (dans cette base, la matrice de u est diagonale),*
2. *il existe $\lambda_1, \dots, \lambda_\ell \in \mathrm{Sp}(u)$ tels que $\sum_{i=1}^{\ell} \dim(E_{\lambda_i}) = n$,*
3. *χ_u est scindé et la multiplicité de toute racine λ de χ_u vaut $\dim(E_\lambda)$.*

Théorème 3. *On dit que $u \in \mathcal{L}(E)$ est* trigonalisable *si les propriétés équivalentes suivantes sont vérifiées :*

1. *il existe un drapeau de E stable par u (la matrice de u dans une base compatible avec ce drapeau est triangulaire supérieure),*
2. *χ_u est scindé.*

1.3 Polynôme minimal

Soit $u \in \mathcal{L}(E)$. L'application

$$\begin{array}{ccc} k[X] & \longrightarrow & \mathcal{L}(E) \\ P = \sum_{i=0}^{d} a_i X^i & \longmapsto & P(u) = \sum_{i=0}^{d} a_i u^i \end{array}$$

est un morphisme de k-algèbre, dont l'image $k[u]$ est la sous-algèbre de $\mathcal{L}(E)$ engendrée par u et dont le noyau I_u est l'idéal annulateur de u.

Définition 3. *On appelle* polynôme minimal *de u le générateur unitaire π_u de l'idéal I_u.*

1.4 Matrice compagnon

Définition 4. *On appelle* matrice compagnon *d'un polynôme unitaire* $P = X^n + \sum_{i=0}^{n-1} a_i X^i$ *la matrice*

$$C_P = \begin{pmatrix} 0 & \dots & 0 & -a_{n-1} \\ 1 & \ddots & \vdots & \vdots \\ & \ddots & 0 & \vdots \\ 0 & & 1 & -a_0 \end{pmatrix}$$

Lemme 1. *Pour tout polynôme* $P \in k[X]$*, on a* $P = \pi_{C_P} = (-1)^n \chi_{C_P}$*.*

L'égalité $P = \chi_{C_P}$ est claire. L'autre se fait par calcul (dans les matrices suivantes, les espaces vides sont à remplacer par des 0) :

$$\chi_{C_P} = \left| \begin{pmatrix} -X & & & -a_{n-1} \\ 1 & \ddots & & \vdots \\ & \ddots & -X & \vdots \\ & & 1 & -X - a_0 \end{pmatrix} \right| = \frac{1}{X^{\frac{n(n-1)}{2}}} \left| \begin{pmatrix} -X & & & -a_{n-1} \\ & -X^2 & & -Xa_{n-2} - a_{n-1} \\ & & \ddots & \vdots \\ & & & -P(X) \end{pmatrix} \right| = (-1)^n P(X).$$

1.5 Sous-espaces stables, sous-espaces monogènes

Définition 5. *On dit qu'un sous-espace vectoriel* F *de* E *est* stable *par* u *si* $u(F) \subset F$*. L'endomorphisme* u *définit alors par restriction un endomorphisme* u_F *de* F*.*

Proposition 2.

1. *Si* F *est un sous-espace vectoriel de* E *stable par* u*, alors* $\chi_{u_F} | \chi_u$ *et* $\pi_{u_F} | \pi_u$*.*
2. *Si* F *et* G *sont deux sous-espaces vectoriels de* E *supplémentaires et stables par* u*, alors* $\chi_u = \chi_{u_F}\chi_{u_G}$ *et* $\pi_u = \mathrm{ppcm}(\pi_{u_F}, \pi_{u_G})$*.*

Définition 6. *Soit* $u \in \mathcal{L}(E)$ *et* $x \in E$*. On appelle* sous-espace u-monogène engendré par x *le sous-espace vectoriel*

$$\langle x \rangle_u = k[u](x) = \{P(u)(x) \mid P \in k[X]\}.$$

On note $\pi_{u,x} = \pi_{u_{\langle x \rangle_u}}$ *et* $\chi_{u,x} = \chi_{u_{\langle x \rangle_u}}$

Proposition 3.

1. *Le sous-espace* $\langle x \rangle_u$ *a pour dimension le degré* d *de* $\pi_{u,x}$ *et admet* $(x, u(x), \dots, u^{d-1}(x))$ *pour base.*
2. *La matrice de* u *dans cette base est la matrice compagnon de* $\pi_{u,x}$*.*

Théorème 4 (Cayley-Hamilton)**.** *Pour tout* $u \in \mathcal{L}(E)$*, on a* $\pi_u | \chi_u$*. Autrement dit* $\chi_u(u) = 0$*.*

En effet, pour tout $x \in E$, on sait que $\chi_{u,x} = (-1)^d \pi_{u,x}$. On a donc $\chi_{u,x}(u)(x) = 0$. Mais $\chi_{u,x} | \chi_u$, donc $\chi_u(u)(x) = 0$. Ceci étant vrai pour tout $x \in E$, on a donc $\chi_u = 0$.

Lemme 2. *Soient* $u \in \mathcal{L}(E)$ *et* $x, y \in E$ *tels que* $\pi_{u,x}$ *et* $\pi_{u,y}$ *sont premiers entre eux. Alors* $\pi_{u,x+y} = \pi_{u,x}\pi_{u,y}$*.*

On a clairement $(\pi_{u,x}\pi_{u,y})(u)(x) = (\pi_{u,x}\pi_{u,y})(u)(y) = 0$, donc par linéarité, $(\pi_{u,x}\pi_{u,y})(u)(x+y) = 0$. On en déduit que $\pi_{u,x+y} | \pi_{u,x}\pi_{u,y}$. Par ailleurs, $\pi_{u,-y}(u)(y) = -\pi_{u,-y}(u)(-y) = 0$, donc par symétrie, $\pi_{u,y} = \pi_{u,-y}$. Or $\pi_{u,x} = \pi_{u,x+y-y} | \pi_{u,x+y}\pi_{u,-y} = \pi_{u,x+y}\pi_{u,y}$. Comme $\pi_{u,x}$ et $\pi_{u,y}$ sont premiers entre eux, on en déduit que $\pi_{u,x} | \pi_{u,x+y}$. On obtient de même que $\pi_{u,y} | \pi_{u,x+y}$. En utilisant encore une fois que $\pi_{u,x}$ et $\pi_{u,y}$ sont premiers entre eux, on obtient $\pi_{u,x}\pi_{u,y} | \pi_{u,x+y}$, d'où l'égalité.

Proposition 4. *Pour tout* $u \in \mathcal{L}(E)$*, il existe* $x \in E$ *tel que* $\pi_{u,x} = \pi_u$*.*

Le lemme précédent assure qu'il suffit de le montrer pour un endomorphisme dont le polynôme caractéristique est la puissance d'un irréductible : $\pi_u = P^\alpha$. Dans ce cas, on sait que

$$\{0\} = \ker \mathrm{I} \subsetneq \ker P(u) \subsetneq \ker P^2(u) \subsetneq \dots \subsetneq P^{\alpha-1}(u) \subsetneq \ker P^\alpha(u) = E.$$

Soit $x \in E \setminus \ker P^{\alpha-1}(u)$. Alors $P^\alpha(u)(x) = 0$, donc $\pi_{u,x} | P^\alpha$, mais $P^{\alpha-1}(u)(x) \neq 0$, donc $\pi_{u,x} \nmid P^{\alpha-1}$. Comme P est irréductible, $\pi_{u,x} = P^\alpha$.

2 Réductions et applications

2.1 Réduction de Dunford et applications

Lemme 3. *Soient $q_1, \dots, q_\ell \in \mathcal{L}(E)$ tels que $\sum_{i=1}^{\ell} q_i = \mathrm{I}$ et $q_i q_j = 0$ pour tout $1 \leq i \neq j \leq \ell$. Alors $q_1, \dots, q_\ell$ sont des projecteurs, $E = \operatorname{im} q_1 \oplus \dots \oplus \operatorname{im} q_\ell$ et pour tout $1 \leq i \leq \ell$, $\ker q_i = \bigoplus_{j \neq i} \operatorname{im} q_j$.*

Notons déjà que pour tout $1 \leq i \leq \ell$ on a $q_i = \sum_{j=1}^{\ell} q_j q_i = q_i^2$, donc $q_1, \dots, q_\ell$ sont des projecteurs.

Par ailleurs, pour tout $x \in E$, on a $x = \mathrm{I}(x) = \sum_{i=1}^{\ell} q_i(x) \in \sum_{i=1}^{\ell} \operatorname{im} q_i$, donc $E = \sum_{i=1}^{\ell} \operatorname{im} q_i$. De plus, si $(x_1, \dots, x_\ell) \in \prod_{i=1}^{\ell} \operatorname{im} q_i$ vérifie $\sum_{i=1}^{\ell} x_i = 0$, alors pour tout $1 \leq j \leq \ell$, on a $0 = q_j\left(\sum_{i=1}^{\ell} x_i\right) = \sum_{i=1}^{\ell} q_j(x_i) = q_j(x_j) = x_j$. On a donc bien $E = \operatorname{im} q_1 \oplus \dots \oplus \operatorname{im} q_\ell$.

Enfin, comme $q_i q_j = 0$ pour tout $1 \leq i \neq j \leq \ell$, il est clair que $\bigoplus_{j \neq i} \operatorname{im} q_j \subset \ker q_i$. Réciproquement, soit $x \in \ker q_i$. Soient $(x_1, \dots, x_\ell) \in \prod_{i=1}^{\ell} \operatorname{im} q_i$ tels que $x = \sum_{i=1}^{\ell} x_i$. Alors $0 = q_i(x) = q_i\left(\sum_{j=1}^{\ell} q_j(x)\right) = \sum_{j=1}^{\ell} q_i(x_j) = q_i(x_i) = x_i$, donc $x \in \bigoplus_{j \neq i} \operatorname{im} q_j$.

Théorème 5 (Lemme des noyaux)**.** *Soient $u \in \mathcal{L}(E)$, $P_1, \dots, P_\ell \in k[X]$ premiers entre eux deux à deux. Alors*

$$\ker(P_1 \dots P_\ell)(u) = \ker P_1(u) \oplus \dots \oplus \ker P_\ell(u),$$

et les projecteurs associés à cette décomposition sont des polynômes en u.

Pour tout $1 \leq i \leq \ell$, on pose $Q_i = \prod_{j \neq i} P_j$. Les polynômes $Q_1, \dots, Q_\ell$ sont premiers entre eux dans leur ensemble, donc le théorème de Bezout assure l'existence de polynômes $A_1, \dots, A_\ell$ tels que $\sum_{i=1}^{\ell} A_i Q_i = 1$. Notons de plus que pour tout $1 \leq i \neq j \leq \ell$, $(A_i Q_i)(A_j Q_j) | P_1 \dots P_\ell$.

Par conséquent, en se restreignant au sous-espace $\ker(P_1 \dots P_\ell)(u)$ (ce qui est légitime puisque pour tout $1 \leq i \leq \ell$, on a $\ker P_i(u) \subset \ker(P_1 \dots P_\ell)(u)$), et en posant $q_i = A_i Q_i(u)$ pour tout $1 \leq i \leq \ell$, on se retrouve dans la situation du lemme précédent.

Il reste donc uniquement à montrer que pour tout $1 \leq i \leq \ell$, on a $\ker P_i(u) = \operatorname{im} q_i$. Soit $y \in \operatorname{im} q_i$, et $x \in \ker(P_1 \dots P_\ell)(u)$ tel que $y = q_i(x) = (A_i Q_i)(u)(x)$. Alors $P_i(u)(y) = (P_i A_i Q_i)(u)(x) = A_i(u)(P_1 \dots P_\ell)(u)(x) = 0$, donc $y \in \ker P_i(u)$. Réciproquement, si $y \in \ker P_i(u)$, on a

$$y = \sum_{i=1}^{\ell} q_i(x) = q_i(x) + \left(\sum_{j \neq i} (A_j \prod_{k \notin \{i,j\}} P_k)(u)\right)(P_i(u)(x)) = q_i(x).$$

Théorème 6 (Décomposition de Dunford)**.** *Soit $u \in \mathcal{L}(E)$ tel que χ_u est scindé sur k. Alors il existe un unique couple $(d, n) \in \mathcal{L}(E)^2$ avec*

(i) d diagonalisable, (ii) n nilpotent, (iii) $dn = nd$, (iv) $u = d + n$.

De plus, d et n sont des polynômes en u.

Soient $\lambda_1, \dots, \lambda_\ell$ les racines de χ_u, de multiplicités respectives $\alpha_1, \dots, \alpha_\ell$, de sorte que l'on peut écrire $\chi_u = \prod_{i=1}^{\ell} (X - \lambda_i)^{\alpha_i}$. Pour tout $1 \leq i \leq \ell$, on pose $P_i(X) = (X - \lambda_i)^{\alpha_i}$. Soient $q_1, \dots, q_\ell$ les projecteurs associés à la décomposition $E = \ker P_1(u) \oplus \dots \oplus \ker P_\ell(u)$. On pose alors

$$d = \sum_{i=1}^{\ell} \lambda_i q_i \quad \text{et} \quad n = u - d = \sum_{i=1}^{\ell} (u - \lambda_i \mathrm{I}) q_i.$$

Alors

(i) d se diagonalise dans une base adaptée à la décomposition $E = \ker P_1(u) \oplus \dots \oplus \ker P_\ell(u)$.

(ii) pour tout $s \in \mathbb{N}$, on a $n^s = \sum_{i=1}^{\ell} (u - \lambda_i \mathrm{I})^s q_i$ (car pour tout $1 \leq i \leq \ell$, $q_i u = u q_i$ et pour tout $1 \leq i \neq j \leq \ell$, $q_i q_j = 0$). En particulier, si $s \geq \max_{1 \leq i \leq \ell} \alpha_i$, alors $n^s = 0$, donc n est nilpotent.

(iii) d et n sont des polynômes en u, donc ils commutent.

(iv) par définition, $u = d + n$.

Supposons maintenant qu'il existe un autre couple (d', n') vérifiant (i), (ii) (iii) et (iv). On a alors

$$ud' = (d' + n')d' = d'^2 + n'd' = d'^2 + d'n' = d'(d' + n') = d'u.$$

Comme d est un polynôme en u, d et d' commute aussi. Ainsi d et d' sont codiagonalisables, et donc $d - d'$ est diagonalisable. On montre de la même façon que n et n' commutent, et que $n' - n$ est nilpotent. Or $d + n = u = d' + n'$, donc $d - d' = n' - n$ est diagonalisable et nilpotent, donc nul. On a ainsi $d = d'$ et $n = n'$.

Remarque.

1. Une telle décomposition (vérifiant (i), (ii), (iii) et (iv)) n'existe pas toujours mais lorsqu'elle existe, elle est toujours unique (pour le voir, il suffit de passer dans une extension de décomposition de χ_u et d'appliquer le théorème précédent). Cette décomposition, lorsqu'elle existe, est appelée *décomposition de Dunford* de u.
2. On note

   (i') d est diagonalisable dans une extension de k.

   Montrons que l'on peut toujours obtenir une décomposition de u vérifiant (i'), (ii), (iii) et (iv). Soit $A \in M_n(k)$ la matrice de u dans la base canonique. Soit $\mathbb{K}$ une extension de décomposition de χ_u. Dans $\mathbb{K}$, χ_u est scindé, donc A admet une décomposition de Dunford (D, N). A priori, D et N sont des matrices de $M_n(\mathbb{K})$ et D est diagonalisable dans $\mathbb{K}$. Soit maintenant σ un automorphisme de $\mathbb{K}$ laissant invariant k (ie. un élément du groupe de Galois de l'extension $k \subset \mathbb{K}$). On note encore σ l'application de $M_n(\mathbb{K})$ dans lui même qui à $M = [m_{i,j}]$ associe $\sigma(M) = [\sigma(m_{i,j})]$. On a alors $A = \sigma(A) = \sigma(D) + \sigma(N)$ avec $\sigma(D)$ diagonalisable dans $\mathbb{K}$, $\sigma(N)$ nilpotent et $\sigma(D)\sigma(N) = \sigma(N)\sigma(D)$. Par unicité, on a donc $D = \sigma(D)$ et $N = \sigma(N)$. Les matrices D et N sont donc stables par tout automorphisme de $\mathbb{K}$ laissant invariant k, donc D et N sont dans $M_n(k)$. On obtient bien la décomposition annoncée.

Exemple. Soit $u \in \mathcal{L}(E)$ un endomorphisme admettant une décomposition de Dunford $u = d + n$. Alors $\exp(u)$ admet une décomposition de Dunford $\exp(u) = \tilde{d} + \tilde{n}$ avec

$$\tilde{d} = \exp(d) \quad \text{et} \quad \tilde{n} = \exp(d) \sum_{i=1}^{\ell-1} \frac{n^i}{i!},$$

où ℓ désigne l'indice de nilpotence de n.

En particulier, si $\exp(u)$ est diagonalisable, alors $\tilde{n} = 0$, ce qui implique que $\sum_{i=1}^{\ell-1} \frac{n^i}{i!} = 0$. On obtient donc $X^\ell | \sum_{i=1}^{\ell-1} \frac{X^i}{i!}$, donc $\ell = 1$, et donc u est diagonalisable. Par conséquent, lorsque u admet une décomposition de Dunford, u est diagonalisable si et seulement si $\exp(u)$ est diagonalisable.

Exemple. Si $u \in \mathcal{L}(E)$, on note

$$\phi_u : \begin{array}{ccc} \mathcal{L}(E) & \longrightarrow & \mathcal{L}(E) \\ v & \longmapsto & uv - vu \end{array}$$

On va montrer que si u admet une décomposition de Dunford (d, n), alors ϕ_u admet pour décomposition de Dunford (ϕ_d, ϕ_n).

Supposons d'abord que u est diagonalisable. Soient $\lambda_1, \ldots, \lambda_n$ ses valeurs propres (avec multiplicité), et $x_1, \ldots, x_n$ une base de vecteurs propres associés. Pour tout $1 \leq i, j \leq n$, on note v_{ij} l'application définie par $v_{ij}(x_k) = \delta_{jk} x_i$ pour tout $1 \leq k \leq n$. Les endomorphismes $(v_{ij})_{1 \leq i,j \leq n}$ forment une base de $\mathcal{L}(E)$ et pour tout $1 \leq i, j \leq n$,

$$\phi_u(v_{ij}) = \left(\sum_{k=1}^{n} \lambda_k v_{kk} \right) v_{ij} - v_{ij} \left(\sum_{k=1}^{n} \lambda_k v_{kk} \right) = (\lambda_i - \lambda_j) v_{ij}.$$

Ainsi, ϕ_u est diagonalisable et ses valeurs propres sont les $(\lambda_i - \lambda_j)_{1 \leq i,j \leq n}$.

Montrons maintenant par récurrence que pour tout endomorphisme $u \in \mathcal{L}(E)$ et tout entier k,

$$\phi_u^k = \phi_u \circ \ldots \circ \phi_u : v \longmapsto \sum_{i=0}^{k} (-1)^i \binom{k}{i} u^{k-i} v u^i.$$

Le résultat est vrai pour $k = 0$. Maintenant, si on le suppose vrai pour k, alors

$$\begin{aligned}
\phi_u^{k+1}(v) &= u\phi_u^k(v) - \phi_u^k(v) = u\left(\sum_{i=0}^{k}(-1)^i\binom{k}{i}u^{k-i}vu^i\right) - \left(\sum_{i=0}^{k}(-1)^i\binom{k}{i}u^{k-i}vu^i\right)u \\
&= \sum_{i=0}^{k}(-1)^i\binom{k}{i}(u^{k+1-i}vu^i - u^{k-i}vu^{i+1}) \\
&= \sum_{i=0}^{k}(-1)^i\left(\binom{k}{i} + \binom{k}{i-1}\right)u^{k+1-i}vu^i + (-1)^{k+1}vu^{k+1} \\
&= \sum_{i=0}^{k+1}(-1)^i\binom{k+1}{i}u^{k+1-i}vu^i.
\end{aligned}$$

En particulier, si n est nilpotent, alors ϕ_n est nilpotent.

Enfin, si u et v commutent, alors ϕ_u et ϕ_v commutent puisque

$$\phi_u\phi_v(w) = u(vw - wv) - (vw - wv)u = uvw - uwv - vwu + wvu = vuw - vwu - uwv + wuv = \phi_v\phi_u(w).$$

On en déduit le résultat.

On obtient en plus que u est diagonalisable si et seulement si ϕ_u est diagonalisable. En effet, si ϕ_u est diagonalisable, alors $\phi_n = 0$, ce qui signifie que n commute avec $\mathcal{L}(E)$. Par conséquent, n est une homothétie nilpotente, donc n est nul, et $u = d$ est diagonalisable.

2.2 Invariants de similitude

Théorème 7. *Soit $u \in \mathcal{L}(E)$. Il existe un unique entier ℓ et un unique ℓ-uplet de polynômes unitaires $(Q_1, \dots, Q_\ell)$ soumis à la condition $Q_\ell | Q_{\ell-1} | \dots | Q_1$ et tels que u admette dans une base la matrice*

$$\begin{pmatrix} C_{Q_1} & & \\ & \ddots & \\ & & C_{Q_\ell} \end{pmatrix}$$

On appelle invariants de similitude *ces polynômes $Q_1, \dots, Q_\ell$.*

Commençons par montrer l'existence. Il est clair que s'il existe, le premier invariant de similitude Q_1 de u est son polynôme minimal. On a déjà montré avec la proposition 4 qu'il existe un sous-espace monogène $F = \langle x \rangle_u$ pour lequel $\pi_{u,x} = \pi_u$. En particulier, la matrice de u restreinte à F est la matrice compagnon de π_u. Ainsi, si le degré d de π_u vaut n, alors $F = E$ et on a déjà terminé. Dans le cas contraire, on va trouver un sous-espace supplémentaire de F stable par u, et le résultat s'en déduira par récurrence.

Les vecteurs $(x, u(x), \dots, u^d(x))$ formant une famille libre de E, on peut trouver une forme linéaire $\lambda \in E^*$ telle que $\lambda(u^i(x)) = \delta_{id}$ pour tout $0 \leq i \leq d$. On pose alors

$$G = \bigcap_{i \in \mathbb{N}} \ker(\lambda u^i).$$

C'est un sous-espace vectoriel de E qui est clairement stable par u. Montrons que c'est un supplémentaire de F :

(i) soit $y \in F \cap G$. Par définition de F, il existe $\alpha_0, \dots, \alpha_d \in k$ tels que $y = \sum_{i=0}^{d} \alpha_i u^i(x)$. Si $\alpha_0, \dots, \alpha_d$ sont non tout nuls, notons $j = \max\{i \mid \alpha_i \neq 0\}$. Mais puisque y est dans G, on a

$$0 = \lambda u^{d-j}(y) = \sum_{i=0}^{j} \alpha_i \lambda u^{d-j+i(x)} = \alpha_j,$$

ce qui est absurde. On obtient donc que $F \cap G = \{0\}$.

(ii) raisonnons maintenant sur la dimension, en passant par le dual :

$$\dim(G) = \dim\left(\bigcap_{i \in \mathbb{N}} (\lambda u^i)^\perp\right) = \dim\left(\mathrm{vect}(\lambda u^i \mid i \in \mathbb{N}\}^\perp\right) = \mathrm{codim}\left(\mathrm{vect}(\lambda u^i \mid i \in \mathbb{N}\}\right) = \mathrm{codim}\,\langle \lambda \rangle_{u^t} = \mathrm{codim}\,F.$$

Montrons à présent l'unicité. Supposons qu'il existe deux suites de polynômes $P_1,\dots,P_\ell$ et $Q_1,\dots,Q_m$ soumis aux conditions $P_\ell|P_{\ell-1}|\dots|P_1$ et $Q_m|Q_{m-1}|\dots|Q_1$ et tels que u admette pour matrices

$$\begin{pmatrix} C_{P_1} & & \\ & \ddots & \\ & & C_{P_\ell} \end{pmatrix} \quad \text{et} \quad \begin{pmatrix} C_{Q_1} & & \\ & \ddots & \\ & & C_{Q_m} \end{pmatrix}$$

Notons $E = F_1 \oplus \dots \oplus F_\ell = G_1 \oplus \dots \oplus G_m$ des décompositions de E sur lesquelles u s'exprime par ces deux matrices. On sait déjà que $P_1 = Q_1 = \pi_u$ et que $n = \sum_{i=1}^{\ell} d(P_i) = \sum_{i=1}^{m} d(Q_i)$. Supposons que les deux suites $P_1,\dots,P_\ell$ et $Q_1,\dots,Q_m$ diffèrent et notons j le plus petit indice tel que $P_j \neq P_j$. On a alors

$$\begin{aligned} P_j(u)(E) &= P_j(u)(F_1) \oplus \dots \oplus P_j(u)(F_{j-1}) \\ &= P_j(u)(G_1) \oplus \dots \oplus P_j(u)(G_{j-1}) \oplus \dots \oplus P_j(u)(G_m). \end{aligned}$$

Or par définition de j, pour tout $1 \leq i < j$, on sait que $P_i = Q_i$, donc que $\dim(P_j(u)(F_i)) = d(P_i) = d(Q_i) = \dim(P_j(u)(G_i))$. Par conséquent, $P_j(u)(G_j) \oplus \dots \oplus P_j(u)(G_m) = \{0\}$ ce qui implique que $Q_j|P_j$. Par symétrie, on obtient $P_j = Q_j$, ce qui contredit notre hypothèse.

Remarque.

1. Insistons encore une fois sur le fait que si $Q_1,\dots,Q_\ell$ sont les invariants de similitude de u, alors le polynôme minimal de u est $\pi_u = Q_1$ et le polynôme caractéristique de u est $\chi_u = Q_1 \dots Q_\ell$. Comme $Q_\ell|Q_{\ell-1}|\dots|Q_1$, on obtient en particulier que $\pi_u|\chi_u|\chi_u^\ell$. Ainsi, la connaissance du polynôme minimal et du polynôme caractéristique suffit parfois à retrouver tout les invariants de similitude. C'est le cas lorsque $\pi_u = \prod_{i=1}^k P_i$, où $P_1,\dots,P_k$ sont des polynômes irréductibles et premiers entre eux. En effet, il existe alors des entiers $\alpha_1,\dots,\alpha_k$ supérieurs ou égaux à 1 tels que $\chi_u = \prod_{i=1}^k P_i^{\alpha_i}$. Les invariants de similitude de u sont alors donnés par
$$Q_j = \prod_{\substack{i\in 1\dots k \\ j\leq\alpha_i}} P_i.$$

2. Outre le théorème de Jordan que nous présentons dans le paragraphe suivant, on obtient directement un certain nombre de corollaires :
   (i) deux endomorphismes sont semblables si et seulement si ils ont les mêmes invariants de similitude.
   (ii) le polynôme minimal ne dépend pas du corps de base.
   (iii) Soit $\mathbb{K}$ un sur-corps de k et $A, B \in M_n(k)$. Si A et B sont semblables dans $\mathbb{K}$, alors elles sont semblables dans k.

Exemple. On note $\mathfrak{S}_n$ le groupe des permutations de $\{1,\dots,n\}$. On appelle *matrice de permutation* associée à $\sigma \in \mathfrak{S}_n$ la matrice $P_\sigma = (\delta_{j\sigma(i)})_{1\leq i,j\leq n}$. On vérifie d'abord aisément que $\sigma \mapsto P_\sigma$ est un morphisme de groupes de $\mathfrak{S}_n$ dans $GL_n(\mathbb{R})$ et que le déterminant de P_σ est donné par la signature de σ.

Par ailleurs, si $\tau \in \mathfrak{S}_n$ est un cycle de longueur ℓ, alors P_τ est la matrice compagnon de $X^\ell - 1$, donc $\chi_{P_\tau} = \pi_{P_\tau} = X^\ell - 1$. On en déduit que pour toute permutation $\sigma \in \mathfrak{S}_n$,

$$\chi_{P_\sigma} = \prod_{\ell\in\mathbb{N}} (X^\ell - 1)^{\gamma_i(\sigma)} \quad \text{et} \quad \pi_{P_\sigma} = \prod_{\substack{d\in\mathbb{N} \\ \exists i\in\mathbb{N},\ d|i \text{ et } \gamma_i(\sigma)\neq 0}} \phi_d,$$

où $\gamma_i(\sigma)$ désigne le nombre de cycles de longueur i dans la décomposition de σ en cycles à supports disjoints, et ϕ_d désigne le d-ième polynôme cyclotomique.

Les polynômes cyclotomiques étant irréductibles et premiers entre eux, on en déduit que les invariants de similitude de P_σ sont donnés par

$$Q_k = \prod_{\substack{d\in\mathbb{N} \\ k\leq\sum_{d|i}\gamma_i(\sigma)}} \phi_d.$$

2.3 Réduite de Jordan

Théorème 8. *(Jordan nilpotent) Soit $u \in \mathcal{L}(E)$ nilpotent (ie. tel qu'il existe $p \in \mathbb{N}$ tel que $u^p = 0$). Il existe un unique entier ℓ et une unique suite d'entiers $n_1 \geq n_2 \geq \ldots \geq n_\ell$ tels que u admette pour matrice*

$$\begin{pmatrix} N_{n_1} & & \\ & \ddots & \\ & & N_{n_\ell} \end{pmatrix},$$

où $N_a = (\delta_{i,i+1})_{1 \leq i \leq a} \in M_a(k)$.

Théorème 9. *(Jordan) Soit $u \in \mathcal{L}(E)$ dont le polynôme caractéristique est scindé : $\chi_u = (-1)^n \prod_{i=1}^p (X - \lambda_i)^{\alpha_i}$. Alors pour tout $1 \leq i \leq p$, il existe un unique entier ℓ_i et une unique suite d'entiers $n_1^i \geq n_2^i \geq \ldots \geq n_{\ell_i}^i$ tels que u admette pour matrice*

$$\begin{pmatrix} A_1 & & \\ & \ddots & \\ & & A_p \end{pmatrix} \quad \text{où} \quad A_i = \lambda_i \mathrm{I}_{\alpha_i} + \begin{pmatrix} N_{n_1^i} & & \\ & \ddots & \\ & & N_{n_{\ell_i}^i} \end{pmatrix}$$

3 Espaces euclidiens

Dans toute la suite, le corps de base est $\mathbb{R}$ et E est un espace euclidien, dont on note $\langle . | . \rangle$ le produit scalaire.

3.1 Généralités

Définition 7. *On appelle* adjoint *d'un endomorphisme $u \in \mathcal{L}(E)$ l'unique endomorphisme $u^* \in \mathcal{L}(E)$ tel que $\langle ux \mid y \rangle = \langle x \mid u^* y \rangle$ pour tout $x, y \in E$.*

On note $(E) = \{u \in \mathcal{L}(E) \mid u = u^*\}$ l'ensemble des endomorphismes symétriques de E. On note $\mathcal{S}_n^+(E)$ (resp. $\mathcal{S}_n^{++}(E)$) l'ensemble des endomorphismes symétriques positifs (resp. symétriques définis positifs) de E.

On note $\mathcal{O}(E) = \{u \in \mathcal{L}(E) \mid uu^* = u^* u = \mathrm{I}\}$ l'ensemble des endomorphismes orthogonaux de E. On note $\mathcal{O}^+(E) = \{o \in \mathcal{O}(E) \mid \det(o) = 1\}$.

Remarque.

1. Si $u \in \mathcal{L}(E)$ a pour matrice M dans une base orthonormée de E, alors u^* a pour matrice M^t dans cette base.
2. Pour tout $u, v \in \mathcal{L}(E)$, on a $u^{**} = u$, $(uv)^* = v^* u^*$, et si u est inversible, $(u^{-1})^* = (u^*)^{-1}$.
3. $\mathcal{S}(E)$ est un $\mathbb{R}$-espace vectoriel de dimension $\frac{n(n-1)}{2}$.
4. Si F est un sous-espace vectoriel de E stable par u, alors $F^\perp$ est stable par u^*. En particulier, si u est symétrique, alors tout espace stable par u admet un supplémentaire stable (son orthogonal).
5. Pour tout $u \in \mathcal{L}(E)$, l'endomorphisme $u^* u$ est symétrique positif (et défini si et seulement u est inversible).

Proposition 5. *Tout endomorphisme symétrique est diagonalisable dans une base orthonormée.*

Remarque. Pour prouver cette proposition, il faut essentiellement trouver une première valeur propre λ de u (ensuite, on raisonne par récurrence vu que $E_\lambda(u)^\perp$ est stable par u). Pour cela, on peut :

(i) passer dans $\mathbb{C}$, et montrer que toute valeur propre complexe de u est en fait réelle.

(ii) utiliser le théorème des extrema liés : soient $u \in \mathcal{S}_n(E)$, et $\phi : E \to E$ et $\psi : E \to E$ les applications définies par $\phi(x) = \langle ux \mid x \rangle$ et $\psi(x) = \langle x \mid x \rangle$. La sphère unité étant compacte, ϕ y admet un maximum. Le théorème des extrema liés affirme alors que si x est un vecteur de la sphère unité pour lequel $\phi(x)$ est maximal, les différentielles de ϕ et ψ en x sont liées. On obtient donc $2\langle ux \mid t \rangle = d\phi_x(t) = \lambda d\psi_x(t) = 2\lambda \langle x \mid t \rangle$, pour tout $t \in E$, donc $ux = \lambda x$.

Proposition 6. *Soit u un endomorphisme symétrique de E dont on note $\lambda_1 \leq \ldots \leq \lambda_n$ les valeurs propres. On appelle quotient de Rayleigh de u l'application $R_u : E \setminus \{0\} \to \mathbb{R}$ définie par $R_u(x) = \frac{\langle ux \mid x \rangle}{\langle x \mid x \rangle}$. Pour tout $1 \leq m \leq n$, on note $\mathcal{V}_m$ l'ensemble des sous-espaces vectoriels de E de dimension m. Alors*

(i) pour tout $1 \leq m \leq n$,

$$\lambda_m = \min_{F \in \mathcal{V}_m} \max_{x \in F} R_u(x) = \max_{F \in \mathcal{V}_{m-1}} \max_{x \in F^\perp} R_u(x).$$

(ii) $R_u(E \setminus \{0\} = [\lambda_1, \lambda_n]$.

Cette dernière proposition s'interprète très bien géométriquement lorsque u est un endomorphisme symétrique défini positif. L'application $(.,.) : E \times E \to \mathbb{R}$ définie par $(x, y) = \langle ux \mid x\rangle$ est alors un produit scalaire sur E. Sa boule unité $B = \{x \in E \mid (x, x) \leq 1\}$ est un ellipsoïde de E dont les longueur des axes (pour le produit scalaire $\langle .|.\rangle$) sont les inverses des racines des valeurs propres de u (fig. 1). On retrouve donc la plus grande valeur propre λ_k en cherchant le plus petit axe, etc.

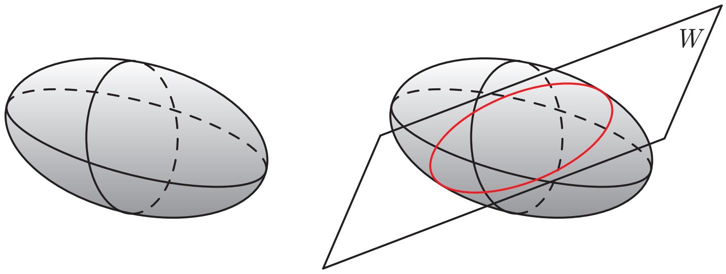

Fig. 1 – Le quotient de Rayleigh sur un ellipsoïde

Proposition 7. *Soit $u \in \mathcal{L}(E)$ un endomorphisme normal, ie. tel que u et u^* commutent. Alors il existe une base orthonormée dans laquelle la matrice de u est de la forme*

$$\begin{pmatrix} \lambda_1 & & & & & \\ & \ddots & & & & \\ & & \lambda_r & & & \\ & & & \tau_1 & & \\ & & & & \ddots & \\ & & & & & \tau_s \end{pmatrix},$$

où $r, s \in \mathbb{N}$, $\lambda_i \in \mathbb{R}$ et $\tau_i = \begin{pmatrix} a_i & -b_i \\ b_i & a_i \end{pmatrix} \in O_2(\mathbb{R})$.

Corollaire 1. *$\mathcal{O}^+(E)$ est connexe (par arcs).*

3.2 Autour de la décomposition polaire

Lemme 4 (de la racine carrée)**.** *Pour tout $u \in \mathcal{S}^{++}(E)$, il existe un unique $v \in \mathcal{S}^{++}(E)$ tel que $u = v^2$.*

En effet, u est diagonalisable dans une base orthogonale b et ses valeurs propres $\lambda_1, \ldots, \lambda_n$ sont strictement positives. L'endomorphisme v dont la matrice dans la base b est donnée par $\begin{pmatrix} \sqrt{\lambda_1} & & \\ & \ddots & \\ & & \sqrt{\lambda_n} \end{pmatrix}$ convient.

Par ailleurs, si $w \in \mathcal{S}^{++}(E)$ vérifie $u = w^2$, alors pour tout $1 \leq i \leq n$, on a

$$E_{\lambda_i}(u) = \ker(u - \lambda_i \mathrm{I}) = \ker(w^2 - \lambda_i \mathrm{I}) = \ker(w - \sqrt{\lambda_i}\mathrm{I}) \oplus \ker(w + \sqrt{\lambda_i}\mathrm{I}) = \ker(w - \sqrt{\lambda_i}\mathrm{I}) = E_{\sqrt{\lambda_i}}(w),$$

donc w et v coïncident sur chaque sous-espace propre de u, donc sur E.

Proposition 8 (Décomposition polaire)**.** *L'application* $\Phi : \begin{array}{ccc} \mathcal{O}(E) \times \mathcal{S}^{++}(E) & \longrightarrow & \mathcal{GL}(E) \\ (o, s) & \longmapsto & os \end{array}$ *est un homéomorphisme.*

L'application est bien définie et clairement continue.

Soit $u \in \mathcal{GL}(E)$. Soit $s \in \mathcal{S}^{++}(E)$ telle que $u^*u = s^2$, et $o = us^{-1}$. Alors o est orthogonale (car $o^*o = (s^{-1})^*u^*us^{-1} = \mathrm{I}$) et $u = \Phi(o, s)$. Par ailleurs, si $u = \Phi(o, s) = \Phi(o', s')$, alors $u^*u = s^2 s'^2$, donc l'unicité de la racine carré implique que $s = s'$ et donc que $o = o'$. L'application est donc bijective.

Il reste à montrer que l'inverse est continue. Soit $(u_n)_{n\in\mathbb{N}} \in (\mathcal{GL}(E))^{\mathbb{N}}$ et $u \in \mathcal{GL}(E)$ tels que $\lim_{n\to\infty} u_n = u$. Pour tout $n \in \mathbb{N}$, soit $(o_n, s_n) = \Phi^{-1}(u)$, et soit $(o, u) = \Phi^{-1}(u)$. On veut montrer que $\lim_{n\to\infty} o_n = o$ et $\lim_{n\to\infty} s_n = s$. Pour cela, il suffit de remarquer que

– $\mathcal{O}(e)$ est compact (car fermé et borné en dimension finie), donc $(o_n)_{n\in\mathbb{N}}$ admet une valeur d'adhérence.

– si o' est une valeur d'adhérence de $(o_n)_{n\in\mathbb{N}}$, alors $o = o'$. En effet, si $\psi : \mathbb{N} \to \mathbb{N}$ est une extraction telle que o' soit la limite de $(o_{\psi(n)})_{n\in\mathbb{N}}$ et si $s' = o'^{-1}u$, alors $s' = o'^{-1}u = \lim_{n\to\infty} u^{-1}_{\psi(n)} u_{\psi(n)} s_{\psi(n)} = \lim_{n\to\infty} s_{\psi(n)}$. Comme $\mathcal{S}^+(E)$ est fermé et comme s' est inversible, $s' \in \mathcal{S}^{++}(E)$. On a donc $u = \Phi(o', s') = \Phi(o, s)$ donc $o' = o$.

Proposition 9. *L'application* $\Psi : \begin{array}{ccc} \mathcal{S}(E) & \longrightarrow & \mathcal{S}^{++}(E) \\ s & \longmapsto & exp(s) = \sum_{i\in\mathbb{N}} \frac{s^i}{i!} \end{array}$ *est un homéomorphisme.*

Remarque.

1. La preuve est essentiellement la même que la précédente, hormis deux petites différences :
   (i) pour montrer que le logarithme est unique, on doit montrer que si $\exp(v) = \exp(v')$, alors v et v' commutent (pour pouvoir diagonaliser dans une base commune). Or v commute avec $\exp(v) = \exp(v')$, donc avec v' qui est un polynôme en $\exp(v')$. En effet, si $\lambda'_1, \ldots, \lambda'_n$ désignent les valeurs propres de v', et si
   $$Q(X) = \sum_{i=1}^{n} \lambda_i \prod_{j\neq i} \frac{X - e^{\lambda_j}}{e^{\lambda_i} - e^{\lambda_j}},$$
   alors $v' = Q(\exp(v'))$.
   (ii) l'espace $\mathcal{S}^+(E)$ n'étant pas compact, il faut montrer que si $(\exp(s_n))_{n\in\mathbb{N}}$ converge, alors $(s_n)_{n\in\mathbb{N}}$ est borné. Pour cela, on peut montrer que pour tout $u \in \mathcal{L}(E)$, on a $\|u\|_2 = \sqrt{\rho(u^*u)}$, où $\rho(u) = \max(\mathrm{Sp}(u))$ désigne le rayon spectral.
2. On peut montrer très facilement (ie. sans calculer la différentielle de l'exponentielle) que Ψ est un C^1-difféomorphisme :
   – Ψ est de classe C^1 comme limite d'applications de classe C^1 dont les différentielles convergent uniformément.
   – la différentielle de Ψ est facile à calculer en 0 : $\exp(h) = \mathrm{I} + h + o(\|h\|) = \exp(0) + h + o(\|h\|)$. Ainsi, $d\Psi_0 = \mathrm{I}$ est inversible. Par inversion locale, on en déduit l'existence d'un voisinage U de 0 dans $\mathcal{S}(E)$ sur lequel Ψ est un C^1-difféomorphisme. Il reste alors à faire grossir ce voisinage par le diagramme suivant

$$\begin{tikzcd} U \arrow[r, "\Psi"] \arrow[d, "x\mapsto 2x"'] & \exp(U) \arrow[d, "x\mapsto x^2"] \\ 2U \arrow[r, "\Psi"] & \exp(2U) \end{tikzcd}$$

Corollaire 2. $GL_n(\mathbb{R})$ *est homéomorphe à* $O_n(\mathbb{R}) \times \mathbb{R}^{\frac{n(n-1)}{2}}$.

Corollaire 3. $GL_n(\mathbb{R})$ *a deux composantes connexes.*

En effet, le déterminant sépare clairement les deux composantes $GL_n^+(\mathbb{R}) = \det^{-1}(\mathbb{R}^+)$ et $GL_n^-(\mathbb{R}) = \det^{-1}(\mathbb{R}^-)$. Réciproquement, $O_n^+(\mathbb{R})$, $O_n^-(\mathbb{R})$ et $\mathbb{R}^{\frac{n(n-1)}{2}}$ sont connexes (par arcs), donc $GL_n^+(\mathbb{R})$ est connexe (par arcs).

Il est bon de noter qu'il est possible aussi de montrer que $GL_n^+(\mathbb{R})$ est connexe (par arcs) en utilisant la décomposition de Gauss.

3.3 Matrice d'adjacence d'un graphe

Définition 8. *Soit $G = (S, A)$ un graphe fini ($|S| = n$) simple et sans boucle. On appelle* matrice d'adjacence *de G la matrice $A = (a_{r,s})_{r,s\in S} \in M_n(\mathbb{R})$, où*
$$a_{r,s} = \begin{cases} 1 & \text{si } \{r,s\} \in A \\ 0 & \text{sinon} \end{cases}$$

Cette matrice est symétrique, donc diagonalisable, et on note $\mu_1 \geq \mu_2 \geq \ldots \geq \mu_n$ son spectre, appellé spectre d'adjacence *de G.*

Proposition 10. *Soit G un graphe k-*régulier *(ie. tel que le degré de tout sommet de G vaille k). Alors*

(i) $\mu_1 = k$
(ii) $|\mu_i| \leq k$, *pour tout* $1 \leq i \leq n$
(iii) la multiplicité de k vaut le nombre de composantes connexes de G.

Notons d'abord que tout vecteur constant est un vecteur propre associé à la valeur propre k, puisque G est k-régulier.

Soit $(b_s)_{s\in S}$ est un vecteur propre associé à la valeur propre μ. Soit $r \in S$ tel que $|b_r| = \max_{s\in S} |b_s|$. Quitte à remplacer b par $-b$, on peut supposer que $b_r > 0$. On a alors

$$|\mu| b_r = |\mu b_r| = \left|\sum_{s\in S} a_{r,s} b_s\right| \leq \sum_{s\in S} a_{r,s} |b_s| \leq k b_r, \tag{1}$$

donc $|\mu| \leq k$. On obtient ainsi (i) et (ii).

Soient $S = R_1 \sqcup \ldots \sqcup R_\ell$ la partition de S en composantes connexes de G. Dans une base adaptée à cette partition, la matrice d'adjacence de G est diagonale par blocs. Pour montrer le point (iii), il suffit donc de montrer que si G est connexe, alors la valeur propre k est de multiplicité 1. On sait déjà que les vecteurs constants sont vecteurs propres associés à la valeur propre k et on va montrer réciproquement que tout vecteur propre associé à la valeur propre k est constant. Soit $(b_s)_{s\in S}$ un vecteur propre associé à la valeur propre k. Soit $r \in S$ tel que $b_r = \max_{s\in S} b_s$. Alors

$$k b_r = \sum_{s\in S} a_{r,s} b_s \leq \sum_{s\in S} a_{r,s} b_r = k b_r,$$

et l'égalité impose que $b_s = b_r$ pour tout s tel que $a_{r,s} = 1$, ie. pour tout voisin s de r. Comme G est connexe, on obtient que b est constant, ce qui termine la preuve de la proposition précédente.

Proposition 11. *Soit G un graphe connexe, k-régulier. Les conditions suivantes sont équivalentes :*

(i) G est bipartite *(ie. il existe une partition $S = S_1 \sqcup S_2$ de S qui sépare toute arête de G),*

(ii) le spectre d'adjacence de G est symétrique par rapport à 0,

(iii) $\mu_n = -k$

Soit G bipartite, et $S = S_1 \sqcup S_2$ une partition de S qui sépare toute arête de G. Soit $(b_s)_{s\in S}$ un vecteur propre associé à la valeur propre μ. On définit le vecteur $(b'_s)_{s\in S}$ par $b'_s = \begin{cases} b_s & \text{si } s \in S_1 \\ -b_s & \text{si } s \in S_2 \end{cases}$. Alors pour tout $r \in S_1$, on a

$$(Ab')_r = \sum_{s\in S} a_{r,s} b'_s = \sum_{s\in S_2} a_{r,s}(-b_s) = -(Ab)_r = -\mu b_r = -\mu b'_r,$$

et de même si $r \in S_2$. On a donc bien l'implication (i)⇒(ii).

L'implication (ii)⇒(iii) est évidente.

Supposons maintenant que $\mu_n = -k$ et soit $(b_s)_{s\in S}$ un vecteur propre associé. En reprenant la preuve du (ii) de la proposition précédente, l'égalité que l'on obtient dans l'équation 1 implique que pour tout voisin s de r, on a $|b_s| = b_r$, et donc $b_s = -b_r$. Par connexité, on obtient que $b_s = \pm b_r$, pour tout $s \in S$. On pose alors $S_1 = \{s \in S \mid b_s = b_r\}$ et $S_2 = \{s \in S \mid b_s = -b_r\}$. C'est une partition de S qui sépare les arêtes de G, donc G est bipartite.

Définition 9. *Soit $G = (S, A)$ un graphe. On appelle*

1. nombre chromatique *de G l'entier χ_G minimal tel qu'il existe une partition de S en χ_G parts qui sépare les arêtes de A (ie. telle que deux éléments d'une même part ne soient pas reliées par une arête),*
2. nombre d'indépendance *le cardinal ι_G maximal d'un* sous-ensemble indépendant *de S (ie. dont deux éléments quelconques ne sont pas adjacents).*

Lemme 5. *Pour tout graphe $G = (S, A)$, on a* $\mathrm{card}(S) \leq \chi_G \iota_G$.

Proposition 12. *Pour tout graphe connexe k-régulier, $\chi_G \geq \frac{k}{\max(|\mu_2|, |\mu_n|)}$.*

Soit F un sous-ensemble indépendant maximal de S. On définit le vecteur $b = (b_s)_{s\in S}$ par

$$b_s = \begin{cases} |S \smallsetminus F| = p - \iota_G \text{ si } s \in F \\ -|F| = -\iota_G \text{ sinon} \end{cases}$$

On a alors

- $\|b\|_2^2 = \sum_{s\in S} b_s^2 = |F||S \smallsetminus F|^2 + |S \smallsetminus F||F|^2 = \iota_G n(n - \iota_G) \leq \iota(G) n^2$,
- pour tout $r \in F$, $(Ab)_r = \sum_{s\in S} a_{r,s} b_s = \sum_{s\notin F} a_{r,s} b_s = -k\iota(G)$, d'où l'on déduit que $\|Ab\|_2^2 = \sum_{s\in S} |(Ab)_s|^2 \geq \sum_{s\in F} |(Ab)_s|^2 = k^2 \iota(G)^3$,
- $\langle a \mid 1\rangle = \sum_{s\in S} b_s = |F||S \smallsetminus F| - |S \smallsetminus F|||F|$, donc b est orthogonal aux sous-espace vectoriel des vecteurs constants, c'est-à-dire à E_k, donc $\|Ab\|_2 \leq \max(|\mu_2|, |\mu_n|)\|b\|_2$.

On obtient donc $k^2\iota(G)^3 \leq \max(|\mu_2|,|\mu_n|)^2\iota(G)n^2$, d'où le résultat par le lemme précédent.

Exemple.

1. On note K_n le *graphe complet* à n sommets. Sa matrice d'adjacence est
$$A_{K_n} = J_n - I_n = \begin{pmatrix} 0 & 1 & \dots & 1 \\ 1 & \ddots & \ddots & \vdots \\ \vdots & \ddots & \ddots & 1 \\ 1 & \dots & 1 & 0 \end{pmatrix}.$$
Cette matrice est circulante. Si on note $\omega = e^{\frac{2i\pi}{n}}$, ses valeurs propres sont donc données par
$$\lambda_p = \sum_{\ell=1}^{n-1} w^{p\ell} = \left\{ \begin{array}{cl} n-1 & \text{si } p=n \\ -1 & \text{sinon} \end{array} \right. .$$
Son spectre d'adjacence est donc $n-1, -1, \dots, -1$, et son nombre chromatique vérifie bien $\chi_{K_n} = n \geq n-1$.
2. On note C_n le *graphe cyclique* à n sommets. Sa matrice d'adjacence est
$$A_{C_n} = \begin{pmatrix} 0 & 1 & 0 & 1 \\ 1 & \ddots & \ddots & 0 \\ 0 & \ddots & \ddots & 1 \\ 1 & 0 & 1 & 0 \end{pmatrix}.$$
Encore une fois, elle est circulante, donc ses valeurs propres sont données par $\lambda_p = \omega^p + \omega^{p(n-1)} = 2\cos\left(\frac{2p\pi}{n}\right)$, ce qui est cohérent avec le fait que
– si n est pair, C_n est bipartite et son nombre chromatique est 2,
– si n est impair, C_n n'est pas bipartite et son nombre chromatique est 3.

4 Questions et remarques

4.1 Questions

On pourra traiter les problèmes suivants :

1. quelques exemples de diagonalisation :
   (a) soit $A \in M_n(k)$ et $B = \begin{pmatrix} A & A \\ 0 & A \end{pmatrix}$. Montrer que B est diagonalisable si et seulement si $A = 0$.
   (b) soient $a_1, \dots, a_n \in \mathbb{C}$. On considère la matrice circulante
   $$A = \begin{pmatrix} a_1 & a_2 & \dots & a_n \\ a_n & a_1 & \dots & a_{n-1} \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ a_2 & a_3 & \dots & a_1 \end{pmatrix}.$$
   Montrer que A est diagonalisable, avec pour valeurs propres $P(1), P(\omega), \dots, P(\omega^{n-1})$, où $P = \sum_{\ell=1}^n a_\ell X^{\ell-1}$ et $\omega = e^{\frac{2i\pi}{n}}$.
   (c) soit $k = \mathbb{F}_q$ le corps fini à q éléments, et $u \in \mathcal{L}(E)$. Montrer que u est diagonalisable si et seulement si $u^q - u = 0$.
2. quelques généralités :
   (a) montrer que si χ_u est scindé sur k, alors $\det(\exp u) = \exp(\operatorname{tr} u)$.
   (b) soient $u, v \in \mathcal{L}(E)$. Montrer que $\chi_{uv} = \chi_{vu}$ (on le montrera d'abord pour les matrices inversibles, puis lorsque $A = \begin{pmatrix} I_r & 0 \\ 0 & 0 \end{pmatrix}$, et on utilisera ces deux cas pour résoudre le cas général).
   (c) soient $A, B \in M_n(\mathbb{R})$ semblables dans $M_n(\mathbb{R})$. Montrer (sans utiliser les invariants de similitude) que A et B sont semblables sur $\mathbb{R}$. Pour quelles extensions $k \subset \mathbb{K}$ cette démonstration se généralise-t-elle ?

(d) soit $P = \prod_{i=1}^{d}(X-\lambda_i)^{\alpha_i}$. Quelle est la forme de Jordan de la matrice compagnon de P.

3. sur les endomorphismes nilpotents :
   on suppose que k est de caractéristique non nulle.
   (a) montrer que $n \in \mathcal{L}(E)$ est nilpotent si et seulement si $\mathrm{tr}(n^p) = 0$ pour tout $p \in \mathbb{N}$.
   (b) montrer que toute matrice de trace nulle est semblable à une matrice de diagonale nulle.
   (c) soient $u, v \in \mathcal{L}(E)$ et $\lambda \in k^*$ tels que $[u, v] = uv - vu = \lambda u$. Calculer $[u^p, v]$ pour $p \in \mathbb{N}$ et montrer que u est nilpotent.
   (d) montrer que l'ensemble des classes de similitude d'endomorphismes nilpotents d'un espace vectoriel de dimension n est en bijection avec l'ensemble des partitions de n.
4. sur les matrices d'adjacence :
   soit $G = (S, A)$ un graphe, et A sa matrice d'adjacence. Soient $r, s \in S$
   (a) montrer que le r-ème coefficient diagonal de A^2 vaut le degré de r. Montrer que $\frac{1}{6}\mathrm{tr}(A^3)$ compte le nombre de triangles dans G.
   (b) on appelle *chemin* de r à s (de *longueur* ℓ) toute suite $r = a_0, \dots, a_\ell = s$ de S tels que pour tout $1 \le i \le \ell$, $[a_{i-1}, a_i] \in A$. Montrer que le coefficient (r, s) de A^ℓ compte le nombre de chemins de longueur ℓ entre r et s.
   (c) montrer que si G est bipartite, alors quitte à permuter l'ordre de la base, sa matrice d'adjacence A se met sous la forme
   $$A = \begin{pmatrix} 0 & B \\ B^t & 0 \end{pmatrix}.$$
5. sur les chemins dans un carré :
   on se propose de compter le nombre de chemins de longueur ℓ entre deux sommets r et s (éventuellement confondus) d'un cube C.
   (a) première méthode :
      – en numérotant les sommets de C comme sur la figure 2 (a), vérifier que la matrice d'adjacence de C est $A = \begin{pmatrix} 0 & B \\ B & 0 \end{pmatrix}$ avec $B = J_4 - I_4$.
      – Montrer que $A^n = \begin{pmatrix} 0 & B^n \\ B^n & 0 \end{pmatrix}$ pour tout n impair et $A^n = \begin{pmatrix} B^n & 0 \\ 0 & B^n \end{pmatrix}$ pour tout n pair.
      – Calculer B^n et conclure.

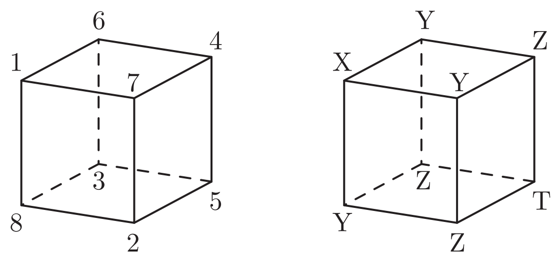

FIG. 2 – (a) numérotation du cube et (b) quatre types de sommets

   (b) seconde méthode :
      – soient X, Y, Z et T les ensembles des sommets de C à distance $0, 1, 2$ et 3 de r respectivement (fig. 2 (b)). On note $x(\ell), y(\ell), z(\ell)$ et $t(\ell)$ le nombre de chemin de longueur ℓ entre r et un sommet de X, Y, Z et T respectivement (par symétrie, ce nombre ne dépend que de l'ensemble X, Y, Z où T dans lequel se trouve le sommet d'arrivée). Montrer que
      $$\begin{pmatrix} x(\ell+1) \\ y(\ell+1) \\ z(\ell+1) \\ t(\ell+1) \end{pmatrix} = A \begin{pmatrix} x(\ell) \\ y(\ell) \\ z(\ell) \\ t(\ell) \end{pmatrix},$$
      où $A \in M_4(\mathbb{R})$.
      – Calculer A^n et conclure.
   (c) appliquer ces méthodes aux squelettes des autres solides de Platon.

6. sur la topologie des endomorphismes diagonalisables :
   (a) montrer que l'ensemble des matrices diagonalisables dans $M_n(\mathbb{C})$ est dense dans $M_n(\mathbb{C})$. En déduire une autre preuve du théorème de Cayley-Hamilton.
   (b) montrer que l'adhérence de l'ensemble des matrices diagonalisables dans $M_n(\mathbb{R})$ est l'ensemble des matrices trigonalisables.
   (c) soit $A \in M_n(\mathbb{C})$. Montrer que A est diagonalisable si et seulement si sa classe de similitude est fermée.

4.2 Remarques et références

Pour tout ce qui est classique, il suffit de consulter le tome d'algèbre des *Maths en tête* de X. GOURDON. Pour ce qui est de la décomposition polaire, et de tout ce qui tourne autour, il faut ouvrir l'*Introduction à la théorie des groupes de Lie classiques* de R. MNEIMÉ & F. TESTARD. Enfin, pour la partie sur les matrices d'adjacence, on peut regarder *Elementary number theory, group theory and Ramanujan graphs* de G. DAVIDOFF, P. SARNAK & A. VALETTE (qui peut d'ailleurs apporter de nombreux autres exemples d'applications du programme de l'agrégation).

Il va sans dire que tout ou partie de ce texte peut être présenté dans les leçons d'agrégation portant sur la réduction. Pourtant, il me semble important dans ces leçons de bien réfléchir aux différences de point de vue que leur titre suggère. Il faudra donc rester prudent dans l'utilisation de ce texte.