EXAMEN DU COURS 2-38-2 DU MPRI 2016
ALGORITHMIQUE ET COMBINATOIRE DES GRAPHES GÉOMÉTRIQUES
MOITIÉ DU COURS DE VINCENT PILAUD

Le polycopié et vos notes manuscrites de cours sont autorisées. Appareils électroniques interdits. **Pensez à rendre deux copies séparées pour les deux moitiés du cours.**

Les deux problèmes qui suivent sont indépendants et peuvent être traités dans un ordre arbitraire. Pensez à rappeler clairement le numéro des questions devant chaque réponse.

Il vous est possible de passer les questions qui vous bloquent. Il est toutefois recommandé d'essayer plutôt de traiter une partie cohérente du sujet, même incomplète, que de traiter sporadiquement les questions qui semblent plus faciles.

Une attention particulière sera portée à la rédaction et à la présentation de vos solutions.

1. Formule des équerres dans les arbres et volumes des cones de l'associaèdre

On considère un arbre binaire A dont les sommets sont étiquetés par $[n] := \{1, \dots, n\}$ dans l'*ordre infixe*. L'arbre étiqueté est donc un arbre binaire de recherche: toutes les étiquettes à gauche (resp. droite) du noeud étiqueté i sont plus petites (resp. grandes) que i. On appelle *extension linéaire* de A une permutation π telle que si l'étiquette i est une descendante de l'étiquette j dans A, alors i apparaît avant j dans π.

[Q 1.1] Donner la liste des arbres binaires à 3 noeuds internes et indiquer leurs extensions linéaires.

[Q 1.2] On appelle *équerre* d'un noeud x dans un arbre A le nombre $\varepsilon(A, x)$ de noeuds internes dans le sous-arbre de A de racine x (en comptant le noeud x lui-même). Montrer que le nombre $\ell(A)$ d'extensions linéaires d'un arbre A à n noeuds est donné par

$$\ell(A) = n! \prod_{x \in A} 1/\varepsilon(A, x) \qquad \text{(\textit{formule des équerres})}.$$

[Q 1.3] Quels sont les arbres binaires à 2^m noeuds avec le moins possible (resp. le plus possible) d'extensions linéaires ? Décrire ces arbres et donner leurs nombres d'extensions linéaires.

[Q 1.4] On note $L(A) \in \mathbb{R}^n$ le vecteur de J.-L. Loday associé à un arbre A à n noeuds internes. Déduire de la question Q 1.2 la proportion de l'hyperplan $\big\{\mathbf{x} \in \mathbb{R}^n \mid \sum_{i \in [n]} x_i = \binom{n+1}{2}\big\}$ qui est couverte par le cône normal d'un sommet $L(A)$ de l'associaèdre de J.-L. Loday $\mathsf{Asso}(n) := \mathrm{conv}\,\{L(B) \mid B \text{ arbre binaire à } n \text{ noeuds}\}$.

2. Complexité d'extension du permutaèdre

2.1. **Complexité d'extension d'un polytope.** Nous avons mentionné en cours que la complexité des algorithmes d'optimisation linéaire sur un polytope $\mathbf{P}$ dépend du nombre nombre d'inégalités définissant $\mathbf{P}$. Il est donc intéressant d'obtenir des formulations de problèmes linéaires utilisant peu d'inégalités linéaires.

Soit $\mathbf{P} \subseteq \mathbb{R}^n$ un polytope fixé. On dit qu'un polytope $\mathbf{Q} \subseteq \mathbb{R}^{n+m}$ est une *formulation étendue* de $\mathbf{P}$ si $\mathbf{P} = \pi_n(\mathbf{Q}) = \{\mathbf{x} \in \mathbb{R}^n \mid \exists\, \mathbf{y} \in \mathbb{R}^m \text{ tel que } (\mathbf{x}, \mathbf{y}) \in \mathbf{Q}\}$ est la projection de $\mathbf{Q}$ sur les n premières coordonnées de $\mathbb{R}^{n+m}$. On appelle *complexité d'extension* de $\mathbf{P}$ le plus petit f tel qu'il existe une formulation étendue de $\mathbf{P}$ (dans n'importe quelle dimension) qui est définie par f inégalités.

[Q 2.1] Montrer que la complexité d'extension d'un carré est 4, et que celle d'un hexagone n'est que 5 (considérer un tétraèdre dont on a coupé une arête).

[Q 2.2] Montrer que la complexité d'extension d'un polytope $\mathbf{P}$ est toujours au plus le maximum de son nombre de sommets et de son nombre de facettes.

2.2. **Réseaux de tri.** Considérons un diagramme $\mathcal{R}$ avec n lignes horizontales (appelées *niveaux*) étiquetées de bas en haut, et m segments verticaux (appelés *commutateurs*) reliant deux lignes verticales, et tels que deux segments verticaux ne partagent jamais une extrémité. On se donne une liste $\mathbf{x} := (x_1, \dots, x_n)$ de réels que l'on place en entrée de $\mathcal{R}$ (à gauche). On balaye ensuite le diagramme $\mathcal{R}$ de gauche à droite. À chaque commutateur $[i : j]$ reliant deux niveaux $i < j$, on echange x_i et x_j dans $\mathbf{x}$ si $x_i > x_j$. On note $\mathcal{R}(\mathbf{x})$ la liste qui résulte de cet algorithme. On dit que $\mathcal{R}$ est un *réseau de tri* si $\mathcal{R}(\mathbf{x})$ est trié dans l'ordre croissant pour toute entrée $\mathbf{x}$. Voir figure 1.

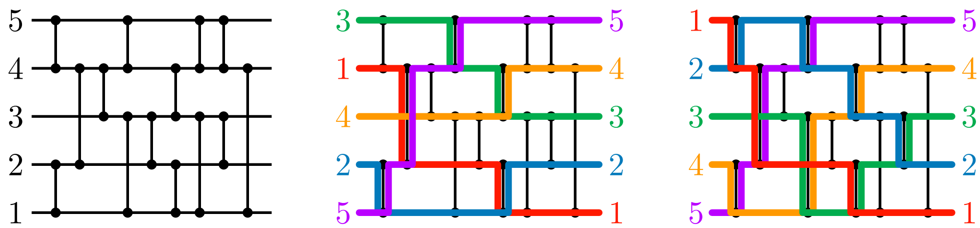

FIGURE 1. Un réseau de tri $\mathcal{R} = [1:2], [4:5], [2:4], [3:4], [1:3], [4:5], [2:3], [1:2], [3:4], [1:3], [4:5], [2:3], [4:5], [1:4]$ et le tri correspondant des permutations $(5, 2, 4, 1, 3)$ et $(5, 4, 3, 2, 1)$

[Q 2.3] Montrer que si un diagramme $\mathcal{R}$ a deux commutateurs consécutifs $[i_1 : j_1]$ et $[i_2 : j_2]$ tels que i_1, j_1, i_2, j_2 sont tous distincts, alors le diagramme $\mathcal{R}'$ obtenu en échangeant l'ordre des commutateurs $[i_1 : j_1]$ et $[i_2 : j_2]$ a le même comportement que $\mathcal{R}$.

[Q 2.4] Montrer que $\mathcal{R}$ est un réseau de tri si et seulement si $\mathcal{R}(\mathbf{x})$ est trié pour tout $\mathbf{x} \in \{0,1\}^n$.

[Q 2.5] Montrer que $\mathcal{R}$ est un réseau de tri si et seulement si $\mathcal{R}(n, n-1, \dots, 2, 1) = (1, 2, \dots, n-1, n)$.

[Q 2.6] Montrer que tout réseau de tri à n niveaux a au moins $\Omega\big(n\ln(n)\big)$ comparateurs

[Q 2.7] Montrer qu'il existe des réseaux de tri à n niveaux avec $O\big(n^2\big)$ comparateurs. On pourra s'inspirer au choix de l'un des réseaux de la figure 2. À quels algorithmes de tris classiques les réseaux de la figure 2 correspondent-ils ?

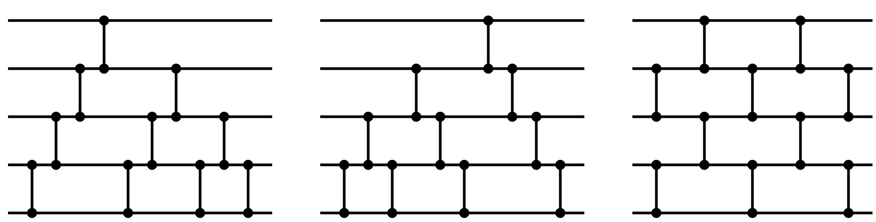

FIGURE 2. Trois réseaux de tris bien connus (?).

En fait, il existe des réseaux de tri à n niveaux avec $O\big(n\ln(n)\big)$ comparateurs. On admet ce résultat dans la suite.

2.3. **Complexité d'extension du permutaèdre.** Dans la fin du problème, on s'intéresse au permutaèdre :

$$\mathsf{Perm}(n) := \operatorname{conv}\left\{(\pi(1), \dots, \pi(n)) \mid \pi \in \mathfrak{S}_n\right\},$$

et on va montrer que sa complexité d'extension est au plus $O\big(n\ln(n)\big)$.

[Q 2.13] Quel est le nombre de sommets et de facettes du permutaèdre ? Que donne donc la borne de la question Q 2.2 ?

[Q 2.14] Pour un vecteur $\mathbf{x} := (x_1, \dots, x_n) \in \mathbb{R}^n$, on note $\mathbf{x}^{\nearrow} := (x_1^{\nearrow}, \dots, x_n^{\nearrow})$ le vecteur obtenu à partir de $\mathbf{x}$ en triant ses coordonnées dans l'ordre croissant, c'est-à-dire tel que les multi-ensembles $\{\{x_1, \dots, x_n\}\}$ et $\{\{x_1^{\nearrow}, \dots, x_n^{\nearrow}\}\}$ coincident et $x_1^{\nearrow} \leq x_2^{\nearrow} \leq \dots \leq x_n^{\nearrow}$. Par exemple, $(3,1,4,2)^{\nearrow} = (1,2,3,4)$. On définit sur $\mathbb{R}^n$ la relation $\preceq$ par

$$\mathbf{x} \preceq \mathbf{y} \qquad \iff \qquad \sum_{i\in[n]} x_i = \sum_{i\in[n]} y_i \quad \text{et} \quad \sum_{i\in[k]} x_i^{\nearrow} \le \sum_{i\in[k]} y_i^{\nearrow} \quad \text{pour tout } k \in [n].$$

Montrer que $\preceq$ est une relation d'ordre.

[Q 2.15] Rappeler la description du permutaèdre $\mathsf{Perm}(n)$ par inégalités (on ne démontrera pas l'équivalence avec la définition par sommets). En déduire que

$$\mathsf{Perm}(n) = \big\{\mathbf{x} \in \mathbb{R}^n \mid (1,2,\dots,n-1,n) \preceq \mathbf{x}\big\}.$$

On considère un réseau de tri $\mathcal{R}$ à n niveaux et m commutateurs, étiquetés de 1 à m de gauche à droite. On appelle *cables* de $\mathcal{R}$ tous les segments horizontaux de $\mathcal{R}$, c'est-à-dire les n segments horizontaux initiaux (à gauche), les n segments horizontaux finaux (à droite), et les $2m-n$ segments horizontaux situés entre les extrémités de deux commutateurs. On associe à chaque cable de $\mathcal{R}$ une variable z_i (pour $i \in [2m+n]$) de sorte que les variables $z_1,\dots,z_n$ correspondent aux n segments initiaux (de bas en haut), tandis que les variables $z_{2m},\dots,z_{2m+n}$ correspondent aux n segments finaux (de bas en haut). Voir figure 3.

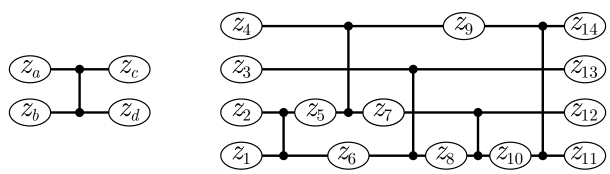

FIGURE 3. Variables z_a, z_b, z_c, z_d autour d'un commutateur (gauche) et variables sur les cables d'un réseau de tri (droite).

Soit $\mathbf{Q}_{\mathcal{R}}$ le polytope de $\mathbb{R}^{2m+n}$ défini par les conditions linéaires suivantes :

- Pour tout $i \in [n]$, on force $z_{2m+i} = i$ (la $i$ème variable finale doit valoir i)
- Pour chaque commutateur incident aux variables z_a, z_b, z_c, z_d comme sur la figure 3, on impose

$$z_a + z_b = z_c + z_d \qquad z_a \ge z_d \qquad \text{et} \qquad z_b \ge z_d. \tag{1}$$

[Q 2.14] Quel est le nombre d'inégalités définissant $\mathbf{Q}_{\mathcal{R}}$?

On veut maintenant montrer que le permutaèdre $\mathsf{Perm}(n) := \mathrm{conv}\,\{(\pi(1),\dots,\pi(n)) \mid \pi \in \mathfrak{S}_n\}$ coincide avec la projection

$$\pi_n(\mathbf{Q}_{\mathcal{R}}) = \big\{\mathbf{x} \in \mathbb{R}^n \;\big|\; \exists\, \mathbf{y} \in \mathbb{R}^{2m} \text{ tel que } (\mathbf{x},\mathbf{y}) \in \mathbf{Q}_{\mathcal{R}}\big\}$$

du polytope $\mathbf{Q}_{\mathcal{R}}$ sur les n premières coordonnées.

[Q 2.15] Montrer que $\mathsf{Perm}(n) \subseteq \pi_n(\mathbf{Q}_{\mathcal{R}})$.

[Q 2.16] Réciproquement, on considère $\mathbf{z} \in \mathbf{Q}_{\mathcal{R}}$ et on veut montrer que $\mathbf{x} := \pi_n(\mathbf{z})$ est dans $\mathsf{Perm}(n)$. On considère la suite de vecteurs $(\mathbf{x}^{(0)}, \mathbf{x}^{(1)}, \dots, \mathbf{x}^{(m)}) \in (\mathbb{R}^n)^{m+1}$ telle que $\mathbf{x}^{(k)}$ est le vecteur dont les coordonnées sont les valeurs des variables z_i correspondantes aux cables de $\mathcal{R}$ (de bas en haut) juste après avoir passé le $k$ième commutateur de $\mathcal{R}$. Autrement dit, on a $\mathbf{x}^{(0)} = \mathbf{x}$, et si le $k$ième commutateur est incident aux variables z_a, z_b, z_c, z_d comme dans la figure 3, on obtient $\mathbf{x}^{(k)}$ en remplaçant z_a par z_c et z_b par z_d dans $\mathbf{x}^{(k-1)}$. En utilisant les inégalités (1), montrer que $\mathbf{x}^{(k)} \preceq \mathbf{x}^{(k-1)}$ pour tout $k \in [n]$ (où $\preceq$ est l'ordre sur $\mathbb{R}^n$ défini à la question Q 2.14). En déduire que $(1,2,\dots,n-1,n) \preceq \mathbf{x}$ et donc que $\mathbf{x} \in \mathsf{Perm}(n)$ par la question Q 2.15.

[Q 2.17] Montrer que la complexité d'extension du permutaèdre $\mathsf{Perm}(n)$ est au plus le nombre de commutateurs dans un réseau de tri à n niveaux. En déduire une borne supérieure en $O\big(n\ln(n)\big)$.