

EXAMEN DU COURS 2-38-2 DU MPRI 2015
ALGORITHMIQUE ET COMBINATOIRE DES GRAPHS GÉOMÉTRIQUES
MOITIÉ DU COURS DE VINCENT PILAUD

Le photocopie et vos notes manuscrites de cours sont autorisées. Appareils électroniques interdits.

Pensez à rendre deux copies séparées pour les deux moitiés du cours.

Les deux problèmes qui suivent sont indépendants et peuvent être traités dans un ordre arbitraire. Pensez à rappeler clairement le numéro des questions devant chaque réponse.

Il vous est possible de passer les questions qui vous bloquent. Il est toutefois recommandé d'essayer plutôt de traiter une partie cohérente du sujet, même incomplète, que de traiter sporadiquement les questions qui semblent plus faciles.

Une attention particulière sera portée à la rédaction et à la présentation de vos solutions.

1. DIAMÈTRE DE L'ASSOCIAÈDRE

Le but de ce problème est de donner des bornes sur le diamètre δ_n de l'associaèdre de dimension n . On considère donc un $(n+3)$ -gone convexe dont on étiquette les sommets de 1 à $n+3$. On note δ_n le *diamètre* du graphe des flips sur les triangulations de ce $(n+3)$ -gone, c'est-à-dire l'entier minimal tel que toutes triangulations T, T' soient reliées par une séquence d'au plus δ_n flips.

1.1. Borne supérieure. Dans cette première partie, on montre une borne supérieure sur δ_n . Pour $i \in [n+3]$, on note E_i la triangulation en éventail de sommet i , c'est-à-dire la triangulation du $(n+3)$ -gone dont toutes les arêtes internes sont incidentes à E_i . Pour une triangulation T , on note $\deg_i(T)$ le nombre d'arêtes internes de T incidentes à i . Ainsi par exemple, $\deg_i(E_i) = n$, $\deg_{i-1}(E_i) = \deg_{i+1}(E_i) = 0$ et $\deg_j(E_i) = 1$ pour tout $j \in [n+3] \setminus \{i-1, i, i+1\}$.

[Q 1.1.1] Montrer que dans toute triangulation distincte de E_i , il existe une arête qui peut être flipée en une arête incidente à i .

[Q 1.1.2] Montrer que le nombre de flips nécessaires pour transformer une triangulation T en la triangulation E_i est exactement $n - \deg_i(T)$. En déduire qu'il existe une séquence de flips qui transforme une triangulation T en une triangulation T' en $2n - \deg_i(T) - \deg_i(T')$.

[Q 1.1.3] Étant données deux triangulations T, T' , calculer la moyenne de $\deg_i(T) + \deg_i(T')$.

[Q 1.1.4] En déduire que $\delta_n \leq 2n - 4 - 12/(n+3)$ et donc que $\delta_n \leq 2n - 4$ dès que $n > 9$.

1.2. Borne inférieure. Dans cette deuxième partie, on montre une borne inférieure sur δ_n .

[Q 1.2.1] En construisant deux triangulations n'ayant aucune arête commune, montrer que $\delta_n \geq n$.

Pour améliorer cette borne, on considère deux triangulations T, T' d'un $(2m)$ -gone telles que T contient toutes les oreilles paires $\{2i, 2i+2\}$ et T' contient toutes les oreilles impaires $\{2i-1, 2i+1\}$. On dit qu'un triangle est de type x s'il contient x sommets pairs et $3-x$ sommets impairs.

[Q 1.2.2] Quel est le nombre de triangles de type 0, 1, 2 et 3 dans T et dans T' ?

[Q 1.2.3] On considère le flip d'une arête e en une arête f dans une triangulation. Décrire les types possibles des triangles incidents à f en fonction des types des triangles incidents à e .

[Q 1.2.4] En déduire qu'il faut au moins $3m - 5$ flips pour transformer T en T' .

[Q 1.2.5] En déduire que $\delta_n \geq 3n/2 - 5$.

En fait, il a été récemment démontré que le diamètre δ_n de l'associaèdre de dimension n est précisément $2n - 4$ dès que $n > 9$.

2. POLYTOPALITÉ DES PRODUITS CARTÉSIENS

Le *produit cartésien* de deux graphes G et H est le graphe $G \times H$ dont l'ensemble des sommets est $V(G \times H) = V(G) \times V(H)$ et l'ensemble des arêtes est

$$\begin{aligned} E(G \times H) &= (V(G) \times E(H)) \cup (E(G) \times V(H)) \\ &= \{(v, w), (v, w')\} \mid \{w, w'\} \in E(H)\} \cup \{(v, w), (v', w)\} \mid \{v, v'\} \in E(G)\}. \end{aligned}$$

Voici un exemple de produit cartésien de deux graphes :

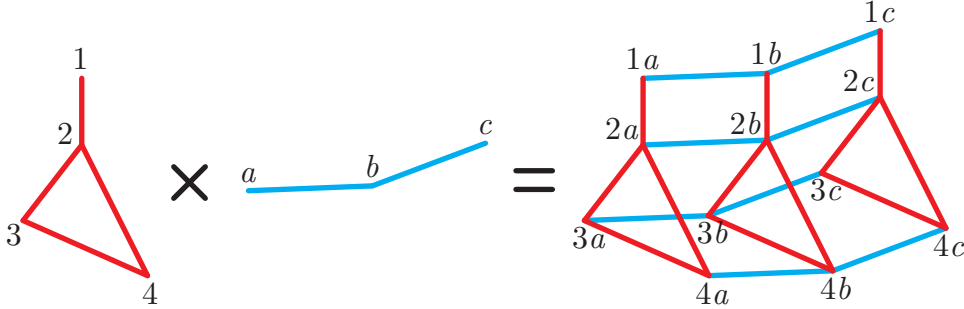


FIGURE 1. Produit cartésien de deux graphes.

[Q 2.0] Quel est le nombre de sommets et d'arêtes de $G \times H$ en fonction de ceux de G et H .

On dit qu'un graphe G est *polytopal* lorsqu'il existe un polytope dont le graphe est G . Le but du problème est d'étudier la polytopalité du produit cartésien de deux graphes.

2.1. **Graphe du produit cartésien de deux polytopes.** Le *produit cartésien* de deux polytopes $P \subseteq \mathbb{R}^d$ et $Q \subseteq \mathbb{R}^e$ est le polytope

$$P \times Q := \{(p, q) \in \mathbb{R}^{d+e} \mid p \in P, q \in Q\}.$$

Dans cette partie, on décrit la combinatoire (*i.e.* les faces) du produit cartésien de $P \times Q$ en fonction de la combinatoire de P et de Q .

[Q 2.1.1] Donner la description par sommets et la description par inégalités du polytope $P \times Q$ en fonction de celles des polytopes P et Q . Justifier.

[Q 2.1.2] Plus généralement, montrer que les k -faces de $P \times Q$ sont précisément les produits cartésiens de la forme $F \times G$ où F est une i -face de P et G est une j -face de Q avec $k = i + j$. Pour justifier, on donnera explicitement un hyperplan support de $F \times G$ en fonction des hyperplans supports de F et G .

[Q 2.1.3] En déduire que le graphe du produit cartésien $P \times Q$ est précisément le produit cartésien des graphes de P et Q .

On a donc montré que le produit cartésien de deux graphes polytopaux est automatiquement polytopal.

2.2. **Produits polytopaux de graphes non-polytopaux.** Dans cette partie, on considère deux graphes G, H qui ne sont pas nécessairement polytopaux, et on veut déterminer si leur produit $G \times H$ peut quand même être polytopal.

[Q 2.2.1] En imitant les exemples de la figure 2, montrer que

- (i) le produit d'un cycle par un chemin et
 - (ii) le produit d'un segment par une triangulation d'un n -gone convexe
- sont toujours polytopaux.

Dans cette partie, on généralise l'exemple de Q 2.2.1(ii) à tout produit d'un graphe polytopal par le graphe d'une subdivision régulière d'un polytope. On considère donc deux graphes G et H tels que

- il existe un polytope $P \subseteq \mathbb{R}^d$ dont G est le graphe,

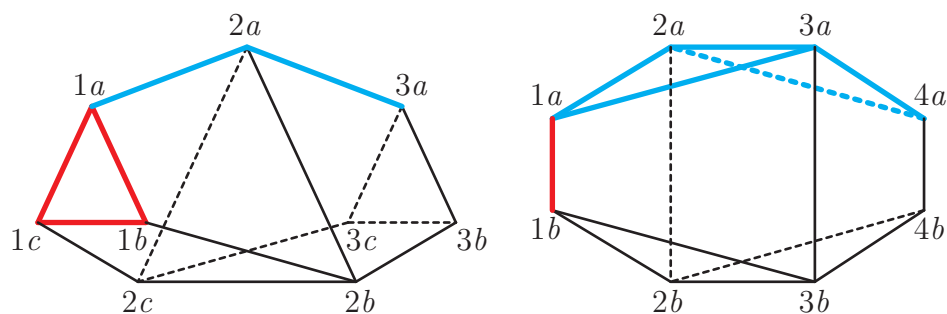


FIGURE 2. Produit polytopal de graphes non-polytopaux.

- il existe un polytope $Q \subseteq \mathbb{R}^e$ et une fonction hauteur $\omega : V(Q) \rightarrow \mathbb{R}$ tels que H est le graphe de l'enveloppe convexe supérieure de l'ensemble de points $\{(q, \omega(q)) \mid q \in V(Q)\}$ de \mathbb{R}^{e+1} .

On définit $\mu(p, q) := (\omega(q) \cdot p, q) \in \mathbb{R}^{d+e}$ pour tout $p \in P$ et $q \in Q$. On considère alors le polytope

$$R := \text{conv} \{ \mu(p, q) \mid p \in V(P), q \in V(Q) \} \subseteq \mathbb{R}^{d+e}.$$

Pour comprendre le graphe de R , on commence par comprendre ses facettes.

[Q 2.2.2] Soit G une facette de Q définie par l'inégalité $\langle \psi | y \rangle \leq 1$, où $\psi \in \mathbb{R}^e$. Montrer que l'inégalité $\langle (0, \psi) | (x, y) \rangle \leq -1$ définit une facette de R dont l'ensemble des sommets est $\{ \mu(p, q) \mid p \in P, q \in G \}$ et qui est isomorphe à $P \times G$.

[Q 2.2.3] Soit F une facette de P définie par l'inégalité $\langle \phi | x \rangle \leq 1$, où $\phi \in \mathbb{R}^d$. Soit C une cellule de la subdivision régulière de Q correspondant à une face de l'enveloppe convexe supérieure de $\{(q, \omega(q)) \mid q \in V(Q)\}$ définie par l'inégalité $\psi_0 \cdot h + \langle \psi | y \rangle \leq 1$, où $\psi_0 \in \mathbb{R}$ et $\psi \in \mathbb{R}^e$. Montrer que l'inégalité $\psi_0 \langle \phi | x \rangle + \langle \psi | y \rangle \leq 1$ définit une facette de R dont l'ensemble des sommets est $\{ \mu(p, q) \mid p \in F, q \in C \}$ et qui est isomorphe à $F \times C$.

On note \mathcal{F} l'ensemble des facettes de R décrites aux deux questions précédentes.

[Q 2.2.4] Vérifier que toute $(d + e - 2)$ -face de \mathcal{F} est contenue dans précisément deux éléments de \mathcal{F} . En déduire que \mathcal{F} est l'ensemble de toutes les facettes de R .

[Q 2.2.5] En déduire que le graphe de R est isomorphe à $G \times H$.

[Q 2.2.6] Montrer que toute triangulation d'un polygone convexe est le graphe d'une subdivision régulière de ce polygone et en déduire que l'exemple de Q 2.2.1(ii) est un cas particulier de Q 2.2.5.