Une méthode d'identification pour un système linéaire à retard

A method of identification for a linear delay system.

François Ollivier
STIX, FRE CNRS 2341
École polytechnique, 91128 Palaiseau, France
francois.ollivier@stix.polytechnique.fr

Saïd Moutaouakil et Brahim Sadik
Département de Mathématiques
Faculté des Sciences Semlalia
B.P. 2390, Avenue Safi, Marrakech, Maroc
{sadik,s.moutaouakil}@ucam.ac.ma

29 mars 2005

Résumé

We provide a class of methods for the identification of a linear system with delay of the shape $x^{(n)}(t) = \sum_{i=0}^{n-1} a_i x^{(i)}(t) + bu(t-h)$. They allow the simultaneous identification of the parameters and delay, the observation of x and its derivatives, knowing only generic input u and output x. They are robust to the noise. Used in continuous time, they allow to follow the evolution of slowly varying parameters and noise.

Résumé On introduit une classe de méthodes d'identification et d'observation pour un système linéaire à retard de la forme $x^{(n)}(t) = \sum_{i=0}^{n-1} a_i x^{(i)}(t) + bu(t-h)$. Celles-ci permettent l'identification simultanée du retard et des paramètres, l'observation de x et de ses dérivées et ne supposent que la connaissance de la sortie x et de l'entrée u, sans autre hypothèse que leur généricité. Elles se révèlent assez robustes au bruit. Utilisées en temps continu, elles permettent de suivre l'évolution de paramètres ou de retards lentement variables.

Abridged English version

Time delay systems are known to take an important place in many fields of application. We refer to [7] and the references therein for more details on the subject. We propose a method for parameters and delay identification, inspired by the work of Fliess and Sira-Ramìrez [3].

We write the system $\sum_{i=0}^{n} a_i x^{(i)}(t) + bu(t) = 0$, with $a_n = -1$. The output is $y = x + w$ where w stands for the noise which is such that $\left(\int_{T_1}^{T_2} w(\tau)d\tau\right)/(T_1 - T_2)$ goes to 0 when $T_2 - T_1$ goes to infinity. The main idea is to use a family of functions f_i such that $f_j^{(k)}(T_1) = f_j^{(k)}(T_2) = 0$ for $k < n$. Let $I_{x,f} := \int_{T_1}^{T_2} f(\tau)x(\tau)d\tau$. Integrating by parts, we get $I_{x^{(i)},f_j} = (-1)^i I_{x,f_j^{(i)}}$. So we may estimate the values of the coefficients a_i and b by solving the system $\sum_{i=0}^{n}\left((-1)^i a_i I_{y,f_j^{(i)}}\right) + bI_{u,f_j} = 0$ for $j = 1, \ldots, m$, by the mean squares method.

We can estimate x and its derivatives in the same way, using functions g_j $0 \leq j < n$ such that $g_j^{(k)}(T_1) = 0$ for $0 \leq k < n$ and $g_j^{(k)}(T_2) = 0$ for $0 \leq k < j$, with $g_j^{(j)}(T_2) \neq 0$.

In practice we have used $f_j(t) = (T_2 - t)^{n+j} e^{-\lambda(T_2 - t)}$, the integration being done between $-\infty$ and the current time. A good approximation of the integrals is obtained by integrating the system $J'_{x,0} = x - \lambda J_{x,0}$ $J'_{x,j} = jJ_{x,j-1} - \lambda J_{x,j}$ if $j > 0$, with initial conditions $J_j(0) = 0$: $J_j(t)$ tends quickly to $I_{x,f_{j-n+1}}$ for λ great enough. Numerical simulations are given at example 1.

In section 3, we consider a delay system $\sum_{i=0}^{n} a_i x^{(i)}(t) + bu(t-h)$, with $a_n = -1$. We use the notation $I_{x,f,T_1,T_2} = \int_{T_1}^{T_2} f((\tau - T_1)/(T_2 - T_1))x(\tau)d\tau$, where f is such that $f^{(j)}(0) = f^{(j)}(1) = 0$, for $j < m$ with $m \geq n$. Let $E_{(T_1,T_2),x,u}$ denote the equation

$$\sum_{i=0}^{n} (T_1 - T_2)^{-i} a_i I_{x,f^{(i)},T_1,T_2} + \sum_{\ell=0}^{k} b_\ell (T_2 - T_1)^{-\ell} I_{u,f^{(\ell)},T_1,T_2} h^\ell + O(h^{\min(k+1,m)}) = 0,$$

where the term $O(h^{\min(k+1,m)})$ is neglected. Solving it by the mean squares method for generic x and u and a generic set S of couples (T_1, T_2), we get approximations $\widehat{a}_i$ of the coefficients and an approximation of delay equal to $\widehat{h} = \widehat{b}_1/\widehat{b}_0$. We can then replace u by $u_{\widehat{h}}(t) = u(t - \widehat{h})$ in $E_{(T_1,T_2),x,u}$ in order to get the improved approximation and iterate the process. Better precision could be achieved if f is such that $f(t-h) = \sum_{k=0}^{p} c_k(h) f^{(k)}(t)$, for example with $f(t) = sin^m(\pi t)$.

In example 2, we used $f = \sin^2$ and investigate the precision of the evaluation depending on the size of the noise. See *Tableau 1*.

In section 4, we adapt the method of section 1 to the delay situation, solving the system

$$\sum_{i=0}^{n} \left((-1)^i a_i I_{y,f_j^{(i)}} \right) + b_0 I_{u_{\widehat{h}},f_j} + b_1 I_{u_h h,f_j} + O(h^2) = 0,$$

where $u_{\widehat{h}}(t) = u(t - \widehat{h})$ for $|h - \widehat{h}| \ll 1$. The delay evaluation is then $\widehat{h} + \widehat{b}_1/\widehat{b}_0$. For $t > T_0$, when $\widehat{b}_0$ does not vanish any more and the evaluation $\widehat{h}(0) + \widehat{b}_1/\widehat{b}_0$ is assumed to be close enough, we take $\widehat{h}' = \lambda_h \widehat{b}_1/\widehat{b}_0$, so that $\widehat{h}$ will converge to h.

Example 3 shows a simulation with $h = 0.5$. Greater delays could be considered by changing the time scale. Example 4 considers the case of a slowly varying delay. Scilab simulation files are available at url [11].

1 Introduction

Les systèmes à retard sont l'objet de recherches actives, en raison de leur importance dans de nombreux champs d'applications. Nous renvoyons à l'article de synthèse [7] et aux références incluses pour plus de détails. L'identification simultannée du retard et des paramètres demeure un problème difficile, mais crucial pour la mise en œuvre de méthodes de contrôle appropriées.

Nous proposons une méthode, inspirée des travaux de Michel Fliess et Hebertt Sira-Ramìrez [3], et susceptible de s'adapter à des systèmes à retard. On pourra consulter, par exemple, [9, 10, 8, 5, 4, 1, 6] pour un aperçu d'autres approches.

L'introduction d'un facteur d'oubli permet l'identification et l'observation en continu, ce qui est décrit dans la section 2 pour des systèmes sans retard et dans la section 4 pour des systèmes à retard.

La section 3 décrit une méthode d'identification *a posteriori*. Une simulation permet d'évaluer sa précision en fonction du niveau de bruit. Nous avons utilisé à titre d'exemple des systèmes d'ordre 2, qui correspondent à une classe de modèles très répandus (voir [2]). Les calculs numériques ont été effectués avec Scilab 3.0 à partir de formules littérales calculées en Maple 9.5.

2 Identification d'un système sans retard

Pour alléger les formules, nous écrirons le système sous la forme : $\sum_{i=0}^{n} a_i x^{(i)}(t) + bu(t) = 0$, avec $a_n = -1$. La sortie est $y = x + w$, où w désigne le bruit, que nous supposons tel que $\left(\int_{T_1}^{T_2} w(\tau)d\tau\right)/(T_1 - T_2)$ tend vers 0 quand $T_2 - T_1$ tend vers l'infini. L'idée de base est d'utiliser une famille de fonctions f_j, $j = 1, \ldots, m$ telles que $f_j^{(k)}(T_1) = f_j^{(k)}(T_2) = 0$ pour $k < n$.

On pose $I_{x,f} := \int_{T_1}^{T_2} f(\tau)x(\tau)d\tau$. En intégrant par parties, on aura $I_{x^{(i)},f_j^{(k)}} = -I_{x^{(i-1)},f_j^{(k+1)}}$, si $k < n$, et donc $I_{x^{(i)},f_j} = (-1)^i I_{x,f_j^{(i)}}$. On peut donc calculer la valeur des coefficients a_i et b en résolvant le système

$$\sum_{i=0}^{n} \left((-1)^i a_i I_{y,f_j^{(i)}}\right) + bI_{u,f_j} = 0$$

pour $j = 1, \ldots, m$, si $m \geq n$. Pour $m > n$, ce système sera résolu par la méthode des moindres carrés.

Si l'on se donne une famille g_j, $0 \leq j < n$ telle que $g_j^{(k)}(T_1) = 0$ pour $0 \leq k < n$ et $g_j^{(k)}(T_2) = 0$ pour $0 \leq k < j$, avec $g_j^{(j)}(T_2) \neq 0$, on obtient alors $I_{x^{(i)},g_j} = (-1)^i I_{x,g_j^{(i)}} + \sum_{\ell=0}^{i-j}(-1)^{i-\ell-1} g_j^{(i-\ell-1)}(T_2)x^{(\ell)}(T_2)$. On estime $x(T_2), \ldots, x^{(n-1)}(T_2)$ en résolvant le système

$$\sum_{i=0}^{n} \left(\sum_{\ell=0}^{i-j} \left((-1)^{i-\ell-1} g_j^{(i-\ell-1)}(T_2)x(T_2)^{(\ell)}\right) + (-1)^i a_i I_{y,g_j^{(i)}}\right) + bI_{u,g_j} = 0,$$

pour $j = 0, \ldots, n-1$. Ces équations se déduisent immédiatement de $\sum_{i=1}^{n} a_i I_{x^{(i)},g_j} + bI_{u,g_j} = 0$.

Par exemple, on peut prendre $f_j(t) = (T_2 - t)^{n+j} e^{-\lambda(T_2 - t)}$, et $g_j = (T_2 - t)^j e^{-\lambda(T_2 - t)}$. Ces fonctions satisfont les hypothèses pour $T_1 = -\infty$. Si l'on pose $J'_{x,0} = x - \lambda J_{x,0}$ $J'_{x,j} = jJ_{x,j-1} - \lambda J_{x,j}$ si $j > 0$, avec les conditions initiales $J_j(0) = 0$, $J_j(T_2)$ tend vers I_{x,g_j} pour $j = 1, \ldots, n-1$ et vers $I_{x,f_{j-n+1}}$ pour $j \geq n$, quand T_2 tend vers l'infini. La convergence est rapide pour λ suffisament grand. On a $g'_j = \lambda g_j - jg_{j-1}$ et une relation similaire pour les f_j. On a donc $I_{x^{(i)},f_j} = \sum_{k=j-1}^{n-1} M_{i,j,k} I_{x,g_k} + \sum_{k=1}^{j} M_{i,n+j-1,k} I_{x,f_k}$, où les matrices $M_{i,j,k}$ satisfont des relations de récurrence simples, ce qui facilite les calculs. On obtient en un temps t générique et suffisament grand une bonne approximation des paramètres a_i et b en résolvant le système

$$\sum_{i=0}^{n} a_i \left(\sum_{k=j-1}^{n-1} M_{i,j,k} I_{y,g_k} + \sum_{k=1}^{j} M_{i,n+j-1,k} I_{y,f_k}\right) + bI_{u,f_j} = 0,$$

que nous noterons $CA = D$, où $A = (a_1, \ldots, a_{n-1}, b)^t$. Comme il se peut que pour certaines valeurs le rang du système ne s'annule, il est préférable de ne pas le résoudre directement mais d'en chercher la solution par une méthode de gradient, en se donnant de nouvelles variables $\widehat{a}_i$ et $\widehat{b}$, et en intégrant le système $\widehat{A}' = -\Lambda C^{\mathrm{t}}(CA - D)$. Ce choix permet de conserver des valeurs précises lorsque C devient mal conditionnée et de réduire encore l'influence du bruit. Les valeurs de λ et de Λ résultent d'un compromis entre la vitesse de convergence souhaitée et la précision recherchée.

Exemple 1 On a pris x solution de l'équation $x'' = a_1 x' + a_0 x + bu$, où $u = 60\cos(1,23t + 1,3\sin(t) - 0,7\cos(0,5t))$, avec les conditions initiales $x(0) = 20$ et $x'(0) = 0,3$. On a choisi un bruit gaussien avec un écart type de 5. La sortie est échantillonnée à 100 Hz. On a pris $b = 2$, $a_0 = -0,35$, $a_1(t) = -1,2$ si $t < 30$ et $a_1 = -1,2 - 0,02 * (t - 30)$ sinon. Les courbes de la figure 1 résument les résultats obtenus pour $\lambda = 1$ et $\Lambda = 10^{-3}$. On voit qu'après une phase de convergence, l'approximation obtenue est excellente. La précision de l'évaluation des coefficients est naturellement moins bonne quand a_1 commence à varier. Toutefois, les évaluations de x et x' demeurent assez précises.

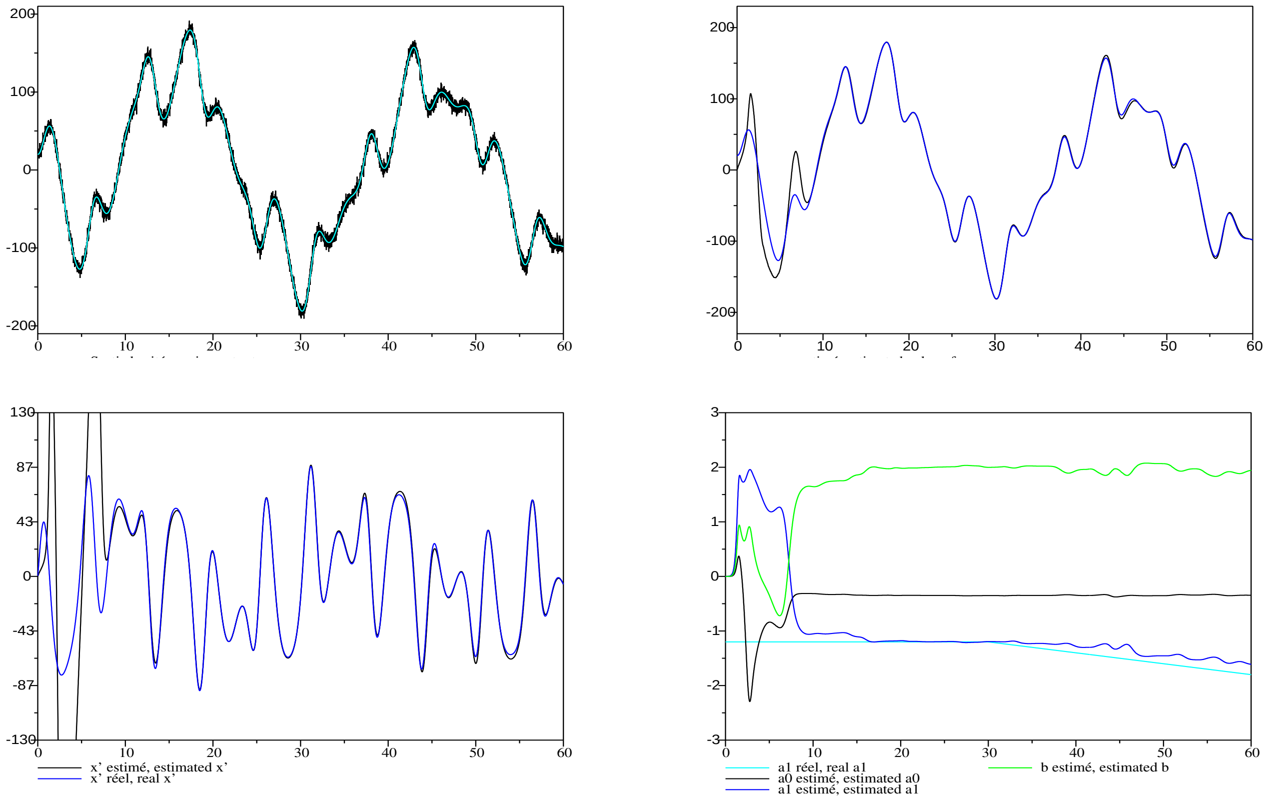

FIG. 1 – Estimations des coefficients de x et de x', *Estimations of the coefficients, x and x'.*

3 Identification avec retard

On considère maintenant un système à retard écrit sous la forme $\sum_{i=0}^{n} a_i x^{(i)}(t) + bu(t-h)$, avec $a_n = -1$. Soit f une fonction telle que $f^{(j)}(0) = f^{(j)}(1) = 0$, pour $j < m$ avec $m \geq n$. On pose $I_{x,f,T_1,T_2} = \int_{T_1}^{T_2} f((\tau - T_1)/(T_2 - T_1))x(\tau)d\tau$. En intégrant par parties, on déduit de l'équation du système

$$\sum_{i=0}^{n} (T_1 - T_2)^{-i} a_i I_{x,f^{(i)},T_1,T_2} + b\left(\sum_{\ell=0}^{k} (T_2 - T_1)^{-\ell} I_{u,f^{(\ell)},T_1,T_2} h^\ell\right) + O(h^{\min(k+1,m)}) = 0.$$

On désignera par $E_{(T_1,T_2),x,u}$ cette équation, où le terme $O(h^{\min(k+1,m)})$ a été négligé et chaque puissance h^ℓ remplacée par b_ℓ/b afin de se ramener à une équation linéaire. Pour x et u génériques, on résoud par moindres carrés le système $E_{s,y,u}$, $s \in S$ en les inconnues a_i et b_ℓ, où S est un ensemble générique d'intervalles d'un cardinal suffisant. On obtient des approximations $\widehat{a}_i$ et $\widehat{b}_0$ des coefficients a_i et b et une approximation du retard égale à $\widehat{b}_1/\widehat{b}_0$. La précision du résultat sera d'autant meilleure que le rapport $h/(T_2 - T_1)$ est petit pour chaque couple de S.

Une fois obtenue une approximation h_0 du retard, on améliore la précision du résultat en résolvant le système $E_{s,y,u_{h_0}}$, $s \in S$, où $u_{h_0}(t) = u(t - h_0)$, ce qui donnera la nouvelle approximation $h_0 + \widehat{b}_1/\widehat{b}_0$. On itère le processus.

Pour de meilleurs résultats, on peut également choisir une fonction f telle que $f(t+h) = \sum_{k=0}^{p} a_k(h) f^{(k)}$, par exemple $f(t) = t^m(1-t)^m$ ou $\sin^m(\pi t)$.

Exemple 2 Nous avons fait des simulations numériques avec $f(t) = \sin^2(t)$ pour un système d'ordre 2. L'équation $E_{(T_1,T_2),y,u}$ s'écrit alors $(T_1 - T_2)^{-1} a_1 I_{x,f',T_1,T_2} + a_0 I_{x,f,T_1,T_2} + b_0 I_{u,f,T_1,T_2} - b_1 I_{u,cos(2t),T_1,T_2} + b_2 I_{u,sin(2t),T_1,T_2} + 0(h^2) = (T_1 - T_2)^{-2} I_{x,f'',T_1,T_2}$ et l'on obtient une approximation de h égale à $h_0 + \mathrm{acos}(\widehat{b}_2/\widehat{b}_0)$ à partir d'un système $E_{s,u_{h_0}}$, $s \in S$, où h_0 est une estimation préalable du retard.

Les valeurs des coefficients sont les mêmes que celles de l'exemple 1. On a choisi la commande $u = 60\cos(1,23t + 0,33 * \sin(t) - 0,47\cos(0,5t))$ et un retard $h = 4$. Le bruit est un bruit gaussien et la fréquence d'échantillonnage est de 500 Hz. On a pris pour S les couples $(10k, 10k + 15)$, $1 \leq k \leq 9$. On part de $h_0 = 0$ et l'on itère les calculs une cinquantaine de fois (en un temps de l'ordre de quelques secondes sur un Dell Latitude D400), ce qui est suffisant pour atteindre un point fixe à la précision numérique près.

Le tableau ci-dessous, qui donne la moyenne (M.) et l'écart type (É.) de séries de cent estimations des coefficients et du retard réalisées pour des bruits gaussiens d'écarts types croissant, montre que l'on obtient des estimations crédibles, même pour un niveau de bruit notable.

É. du bruit	M. a_1	É. a_1	M. a_0	É. a_0	M. b	É. b	M. h	É. h
1	-1,2013301	0,0200702	-0,3503987	0,0070836	2,0022146	0,0420976	4,0008356	0,0153991
2	-1,2012952	0,0280813	-0,3504493	0,0101866	2,0023815	0,059994	4,000781	0,0234536
5	-1.1763456	0.0848359	-0.3414087	0.0298163	1.9487169	0.1772991	3.9744399	0.0659957
10	-1.1252249	0.1591226	-0.3234272	0.0559417	1.8422743	0.3327821	3.9187225	0.1328752

Tableau 1.

4 Identification en temps réel avec retard lentement variable

On peut également adapter aux systèmes à retard les méthodes d'identification et d'observation en temps réel introduites dans la section 1. On utilise les équations

$$\sum_{i=0}^{n} a_i \left(\sum_{k=j-1}^{n-1} M_{i,j,k} I_{y,g_k} + \sum_{k=1}^{j} M_{i,n+j-1,k} I_{y,f_k} \right) + b_0 I_{u_{\widehat{h}},f_j} + b_1 I_{u_{\widehat{h}},f_j} + 0(h^2) = 0,$$

avec $b_\ell = bh^\ell$ et $u_{\widehat{h}}(t) = u(t - \widehat{h})$. Ceci suppose que $|h - \widehat{h}| \ll 1$. On peut s'y ramener quel que soit le retard par un changement d'échelle de temps. L'évaluation du retard est alors $\widehat{h} + \widehat{b}_1/\widehat{b}_0$. On résoud le système par intégration au moyen d'une méthode de gradient comme décrit section 2. Lorsque $t > T_0$, on suppose que les valeurs des estimations sont devenues assez stables (il faut au moins que $\widehat{b}_0$ ne s'annule plus). On pose alors $\widehat{h}' = 0$ si $t < T_0$ et $\widehat{h}' = \lambda_h b_1/b_0$ sinon. Pour plus de précision, on calcule $I_{u_{\widehat{h}},f_j}$ en posant $I'_{u_{\widehat{h}},f_j} = (1 + \lambda_h b_1/b_0)(u_{\widehat{h}}(t) - \lambda I_{u_{\widehat{h}},f_j})$.

Exemple 3 On utilise les mêmes commande, coefficients, type de bruit et fréquence que pour l'exemple 1. On prend $T_0 = 14$, $\lambda = 1$, $\Lambda = 4.10^{-3}$ et $\lambda_h = 0,4$.

Exemple 4 On utilise les mêmes commande, coefficients, type de bruit et fréquence que pour les exemples 1 et 3. On prend $T_0 = 40$, $\lambda = 1$, $\Lambda = 4.10^{-4}$ et $\lambda_h = 0,4$. Le retard est initialisé à 3,6 sa valeur à T_0, afin d'accélérer la convergence.

5 Conclusion

Les méthodes que nous avons introduites permettent un large choix dans leur mise en œuvre. Les quelques essais réalisés montrent qu'elles sont applicables dans des situations réalistes, en particulier avec un niveau de bruit conséquent. Elles peuvent se généraliser aisément, au moins en théorie à des situations plus complexes : retards multiples ou n'intervenant pas uniquement au niveau de la commande.

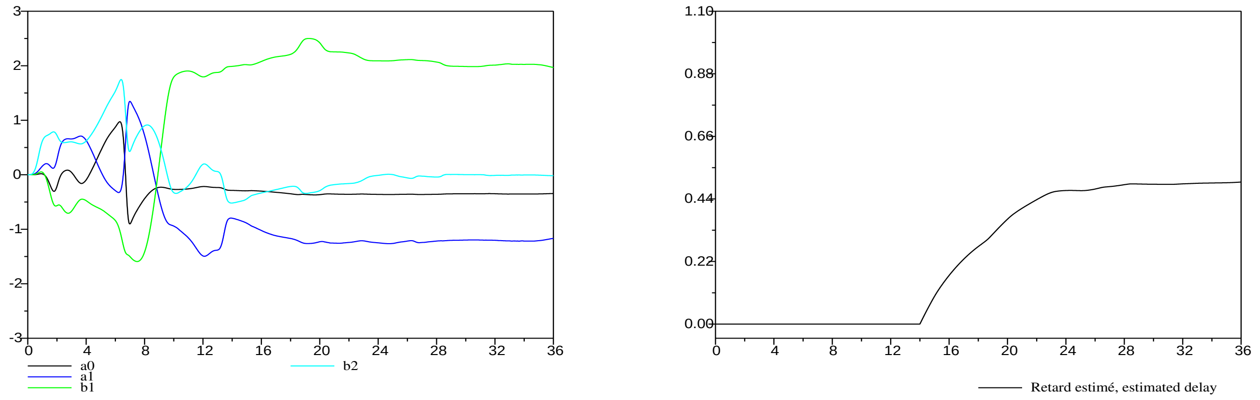

FIG. 2 – Estimations des coefficients et du retard, *Estimations of coefficients and delay.*

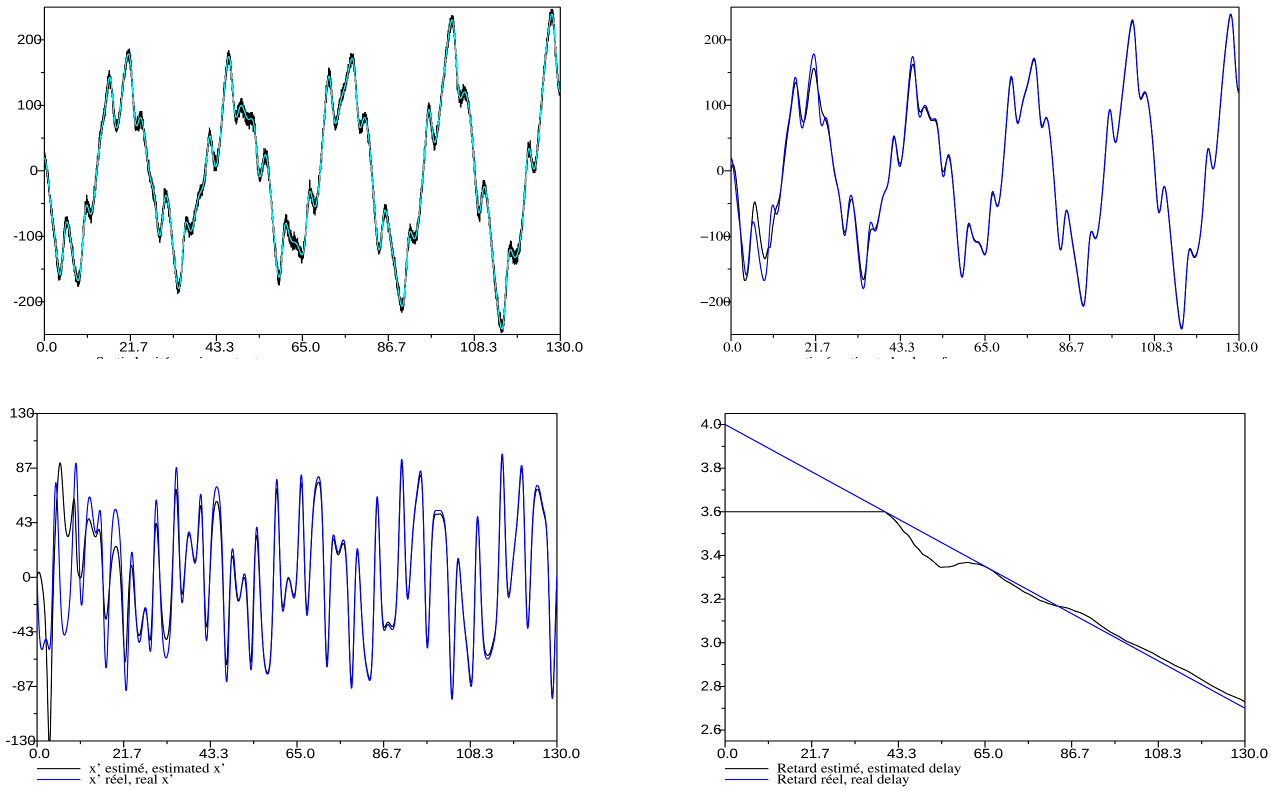

FIG. 3 – Estimations du retard de x et de x',*Estimations of the delay, of x and of x'.*

Leur utilisation suppose la connaissance *a priori* d'une borne supérieure pour le retard, ce qui est essentiel pour régler les différents paramètres λ, Λ, λ_h et T_0. En revanche, leur capacité à s'adapter à des coefficients ou à un retard lentement variable nous semble un atout intéressant. Les fichiers utilisés pour les simulations sont disponibles *via* l'url [11].

Références

[1] Diop (S.), Kolmanovsky (I.), Moraal (P.) et van Nieuwstadt (M.) « Preserving stability/performance when facing an unknown time delay », *Control Engineering Practice*, **9** 1319-1325, 2001.

[2] Fliess (M.), Mounier (H.), « On a class of delay systems often arising in practice », *Kybernetika*, **27**, 295-308, 2000.

[3] Fliess (M.) et Sira-Ramìrez (H.), « Reconstructeurs d'état », *C.R. Acad. Sci. Paris*, 338 (2004), no. 1, 91–96.

[4] Kolmanovskii (V. B.) et Myshkis (A.), *Introduction to the theory and application of functionnal differential equations*, Dorctecht, Kluwer Academy, 1999.

[5] Mahji (S.) Atherton (D. P.), « A novel identification method for time delay processes », *ECC'99 (Fifth European Control Conference)*, Karlsruhe, Allemangne, 1999.

[6] Orlov (Y.) Belkoura (L.) Richard (J. P.) et Dambrine (M.) « On-line parameter identification of linear time-delay systems », *Proceedings of the 41st IEEE Conference on Decision and Control*, Las vegas, Nevada, USA, décembre 2002.

[7] Richard (J.P.) « Time-delay systems : an overview of some recent advances and open problems » *Automatica*, **39**, 10, 1667–1694, Octobre 2003.

[8] Tan (K. K.) Wang (Q. K.) et Lee (T. II.), « Finite spectrum assignment control of unstable time delay processes with relay tuning », *Industrial Engineering and Chemical Research*, **37** (4), 1351–1357, 1998.

[9] Tuch (J.) Feuer (A.) et Palmor (Z.J.), « Time delay estimation in continuous linear time-invariant systems », *IEEE Transactions on Automatic Control* **39**, 823–827.

[10] Verduyn-Lunel (S. M.), « Identification problems in functional differential equations », *36th IEEE CDC'99 (Conference on Decision and Control)*, San Diego CA, décembre 1997, 4409–4413.

[11] `http://www.stix.polytechnique.fr/~ollivier/`