

Une réponse négative au problème de Noether différentiel

François Ollivier
UMS CNRS n° 658,
GAGE, École polytechnique, 91128 Palaiseau CEDEX, France
Tél. 33 (0)1 69 33 45 96, Fax. 33 (0)1 69 33 30 50
ollivier@gage.polytechnique.fr
<http://medicis.polytechnique.fr/gage/ollivier.html>

(Reçu le 12 novembre 1998, accepté le 16 novembre 1998)

Résumé

Selon un théorème classique, le groupe de Cremona du plan est engendré par les transformations de Jonquières. J. F. Ritt a posé la question d'une généralisation dans le cadre différentiel. Nous donnons à ce problème une réponse négative, qui repose sur une condition nécessaire de monotonie, et sur un contre-exemple inspiré d'un système plat de Rouchon.

Rubriques : *Algèbre*, équations différentielles.

Abstract

A negative answer to the differential Noether's problem

According to a theorem first stated by Clifford, Noether [8] and Rosanes [13], which later received a complete proof by Castelnuovo [2], the Cremona group of the plane is generated by de Jonquières transformations. J.F. Ritt [10] asked whether such a result could be generalized to the differential plane. We give a negative answer, relying on a flat system of Rouchon.

Abridged english version

De Jonquières transformations of the differential affine plane $\mathbf{A}_k^2$ are defined by $(x, y) \mapsto (x, F(x, x', \dots, x^{(r)}, y))$, where F is a differential fraction. Let the differential field k be a subfield of $\mathbf{R}(t)$, then such a transformation induces a local isomorphism (bijective Lie-Bäcklund mapping) of the trivial diffiety T_2 (see [7] and [14]), i.e. $\mathbf{R} \times \mathbf{R}^N \times \mathbf{R}^N$ equipped with the derivation

$$\frac{d}{dt} := \frac{\partial}{\partial t} + \sum_{j \in \mathbf{N}} x^{(j+1)} \frac{\partial}{\partial x^{(j)}} + \sum_{j \in \mathbf{N}} y^{(j+1)} \frac{\partial}{\partial y^{(j)}}.$$

We call tame any local Lie-Bäcklund isomorphism, admitting a decomposition in Bäcklund-de Jonquières mappings (TBJ), and symmetries $\tau : (x, y) \mapsto (y, x)$. We may characterize tame morphisms as follows.

THEOREM 1. — *Let $\phi : U \mapsto V$ be a tame diffiety morphism. There exists an open subset U' dense in U such that on a neighborhood $\mathcal{O}_x$ of every point x of U' there exists a decomposition*

$\phi = \psi_{\nu+1} \circ \psi_{\nu} \circ \tau \circ \psi_{\nu-1} \circ \tau \cdots \tau \circ \psi_1 \circ \psi_0$, such that the transformations ψ_i $1 \leq i \leq s$ are TBJ of locally constant and positive order; a transformation τ operates between ψ_i and ψ_{i+1} $1 \leq i \leq \nu-1$; ψ_0 and $\psi_{\nu+1}$ are locally invertible order zero transformations.

COROLLARY 3. — Let $\phi : U \mapsto V, (x, y) \mapsto (X, Y)$ be a tame transformation, then there exists an open set U' dense in U such that on some neighborhood of every point of U' :

- 1) If $0 < \text{ord}X = \text{ord}Y$, there exists a function G of order 0 such that $\text{ord}G(X, Y) < \text{ord}X$;
- 2) If $0 < \text{ord}X < \text{ord}Y$ (resp. $0 = \text{ord}X < \text{ord}Y$), then there exists a function $G(x, y)$ of order 0 in y and positive order in x such that $\text{ord}_x G(X, Y) < \text{ord}_x X$, and $\text{ord}_y G(X, Y) < \text{ord}_y X$ (resp. $\text{ord}G(X, Y) = 0$);
- 3) If $\phi = \phi_r \circ \cdots \circ \phi_1$ et $\phi = \psi_s \circ \cdots \circ \psi_1$ are two decompositions of ϕ defined on the same open neighborhood and satisfying the theorem conditions, then $s = r$.

We can test the condition 2) of the above corollary by using the following criterion.

THEOREM 4. — Let $A(x_1, x_2)$ et $B(x_1, x_2)$ be two differential functions of respective orders r_1, r_2 and s_1, s_2 in x_1 and x_2 . The following propositions are equivalent:

- A) there exists $C = F(A, B, \dots, B^{(\ell)})$ such that $\partial F / \partial A \neq 0$ and $\text{ord}_{x_i} F(A, B) < \text{ord}_{x_i} B$, $i = 1, 2$;
- B) there exists a locally unique fonction $H(x_1, \dots, x_1^{(s_1-1)}, x_2, \dots, x_2^{(s_2-1)}, B, \dots, B^{(\ell)})$ such that $A(x_1, x_2) = H(x_1, x_2, B(x_1, x_2))$ and H satisfies $\frac{\partial}{\partial B^{(m)}} \left(\frac{\partial H / \partial x_i^{(p)}}{\partial H / \partial x_j^{(q)}} \right) = 0$; $0 \leq p < s_1$, $0 \leq q < s_2$, $i, j \in [1, 2]$, $0 \leq m \leq \ell$.

Consider now the Rouchon [11] flat system $x'_3 = x'_1 x'_2$. It admits the linearizing output $Z_1(x) = x_1, Z_2(x) = x'_1 x_2 - x_3$. Flatness means that we can parametrize the general solution, using Z_1 and Z_2 , by taking $X_1(z) = z_1, X_2(z) = \frac{z'_2}{z''_1}, X_3(z) = \frac{z'_1 z'_2}{z''_1} - z_2$. By symmetry, we could have chosen as linearizing output $T_1(x) = x_2, T_2(x) = x'_2 x_1 - x_3$. From this, we deduce that

$$(z_1, z_2) \mapsto T(X(z)) = \left(\frac{z'_2}{z''_1}, \left(\frac{z'_2}{z''_1} \right)' z_1 - \frac{z'_1 z'_2}{z''_1} + z_2 \right),$$

defines an automorphism: the Rouchon involution. Using the above results, it is easily seen that it is not tame. We have indeed: $A = B' z_1 - z'_1 B + z_2 = F(B, B', z_1, z'_1, z_2)$, and $(\partial F / \partial z'_1) / (\partial F / \partial z_2) \neq 0$ which contradicts the proposition.

Remerciements. — L'auteur remercie son ami Pierre Rouchon, sans qui le pays plat serait privé de ses personnalités les plus saillantes.

Introduction

Selon Godeaux [5], Clifford, Noether [19] et Rosanes [13], furent les premiers à énoncer le théorème selon lequel toute transformation birationnelle du plan se décompose en une suite de transformations quadratiques, ces deux derniers en ayant donné de premières preuves, partielles. Ce résultat ne fut démontré complètement qu'en 1901 par Castelnuovo [2]. Dans son ouvrage [10], Ritt a soulevé la question d'un éventuel analogue différentiel, qui semble impossible à énoncer sous cette forme.

Une version équivalente de ce résultat est que le groupe de Cremona du plan est engendré par les transformations de Jonquières et la symétrie $(x, y) \mapsto (y, x)$. Les *transformations de Jonquières*

du plan affine sont les transformations birationnelles de la forme

$$(x, y) \mapsto \left(x, \frac{P(x)y + Q(x)}{R(x)y + S(x)} \right),$$

où P, Q, R et S sont des polynômes. Elles sont en fait déjà dans Cremona [3], Jonquières [6] ne faisant que citer ce dernier avant de définir des transformations plus complexes, qui existent pour tout ordre n non premier.

Nous allons montrer que la réponse au problème de Ritt est négative, du moins si l'on tente de généraliser le théorème algébrique en prenant pour P, Q, R et S des polynômes *différentiels*. En fait, nous allons donner une réponse négative à un problème plus général dans le cadre de la géométrie des diffiétés (voir Krasil'shchik *et al.* [7] ou [14] pour une introduction plus abordable qui a le mérite de faire le lien avec l'algèbre différentielle). Soit T_2 la diffiété correspondant à $\mathbf{R} \times \mathbf{R}^{\mathbf{N}} \times \mathbf{R}^{\mathbf{N}}$ muni de la dérivation définie par

$$\frac{d}{dt} := \frac{\partial}{\partial t} + \sum_{j \in \mathbf{N}} x^{(j+1)} \frac{\partial}{\partial x^{(j)}} + \sum_{j \in \mathbf{N}} y^{(j+1)} \frac{\partial}{\partial y^{(j)}}$$

Cette diffiété correspond à l'espace des jets $J^\infty(\mathbf{R}, \mathbf{R}^2)$. On munit une telle diffiété de la topologie de Fréchet, qui est la topologie la plus grossière telle que les projections sur l'espace des jets d'ordre r soient continues pour tout r . Les fonctions sur la diffiété sont les fonctions $\mathcal{C}^\infty$ qui ne dépendent que d'un nombre *fini* de coordonnées. L'ordre de $f(x, x', \dots)$ au point x est le plus grand entier r tel que $\partial f / \partial x^{(r)} \neq 0$.

Un morphisme de diffiété est une application $\mathcal{C}^\infty$ telle que $\frac{d}{dt}\phi = C\phi\frac{d}{dt}$, mais on se restreindra ici au cas où $\frac{d}{dt}\phi = \phi\frac{d}{dt}$. Une telle transformation d'un ouvert de $\mathbf{T}_2$ dans un ouvert de $\mathbf{T}_2$ est définie par la donnée des fonctions différentielles $A_i(x, \dots, x^{(r_1)}, y, \dots, y^{(r_2)})$ – par la suite, on notera simplement $A_i(x, y)$ – telles que $\phi(t, x, x', \dots, y, y', \dots) = (t, A_1, A_1', \dots, A_2, A_2', \dots)$. Parmi ces morphismes, figurent les *transformations de Bäcklund-Jonquières*, définies par $(x, y) \mapsto (x, F(x, x', x'', \dots, x^{(r)}, y))$ où F est une fonction $\mathcal{C}^\infty$ d'ordre 0 en y et telle que $\partial F / \partial y \neq 0$. Cette dernière condition implique l'existence d'un inverse local, en utilisant le théorème des fonctions implicites.

Il est clair que toute transformation (bi)rationnelle du plan différentiel $\mathbf{A}_{\mathbf{R}(t)}^2$ induit sur l'ouvert où elle est définie un morphisme de diffiété (bijectif), et que toute transformation de Jonquières induit une transformation de Bäcklund-Jonquières. Pour alléger l'écriture, nous noterons TBJ les transformations de Bäcklund-Jonquières, τ le morphisme défini par $(x, y) \mapsto (y, x)$. Nous appellerons *élémentaires*, les morphismes qui sont des TBJ ou τ , et *monotones* les morphismes qui se décomposent en morphismes élémentaires.

Nous allons dans une première section donner une condition nécessaire de monotonie locale, qui repose sur l'existence d'une décomposition élémentaire canonique, puis exhiber une transformation birationnelle, telle que le morphisme localement bijectif de diffiété associé ne soit pas monotone.

1 Une condition nécessaire

Nous allons établir une condition simple de monotonie. Elle est un corollaire du théorème qui suit, établissant l'existence d'une décomposition élémentaire canonique pour tout morphisme de diffiété monotone. Dans sa démonstration, nous utiliserons les propriétés suivantes.

Si $\phi_1 : (x, y) \mapsto (x, F_1(x, y))$ et $\phi_2 : (x, y) \mapsto (x, F_2(x, y))$, sont deux TBJ d'ordre respectif r_1 et r_2 en x , alors $\phi_2 \circ \phi_1 : (x, y) \mapsto (x, F_2(x, F_1(x, y)))$ est une TBJ d'ordre en x inférieur ou égal au maximum de r_1 et r_2 . D'autre part, si $\phi_1 : (x, y) \mapsto (x, F_1(x, y))$ est une TBJ, alors elle est localement inversible en tout point de son domaine de définition, et son inverse est une TBJ définie par $(x, y) \mapsto (x, G(x, y))$, où $G(x, \cdot) = F(x, \cdot)^{-1}$ localement. Enfin, toute application localement inversible d'ordre nul est monotone au voisinage de tout point de son domaine.

THÉORÈME 1. — *Soit $\phi = \phi_r \circ \phi_{r-1} \circ \dots \circ \phi_1 : U \mapsto V$ un morphisme de diffiété, tel que les ϕ_i soient élémentaires. Alors il existe un ouvert U' dense dans U tel que ϕ admet, sur un voisinage $\mathcal{O}_x$ de tout point x de U' , une décomposition de la forme $\phi = \psi_{\nu+1} \circ \psi_\nu \circ \tau \circ \psi_{\nu-1} \circ \tau \dots \tau \circ \psi_1 \circ \psi_0$ telle que les transformations ψ_i $1 \leq i \leq \nu$ sont des TBJ d'ordre positif localement constant; une transposition τ est opérée entre ψ_i et ψ_{i+1} $1 \leq i \leq \nu - 1$; ψ_0 et $\psi_{\nu+1}$ sont des transformations d'ordre nul localement inversibles.*

PREUVE. — Supposons le résultat faux : on peut choisir dans l'ensemble des contre-exemples un morphisme $\phi : U \mapsto V$ réalisé par une chaîne de longueur r minimale. Donc, sur un voisinage W_x de tout point x d'un ouvert dense dans U , $\varphi := \phi_{r-1} \circ \dots \circ \phi_1$ restreinte à W_x admet une décomposition $\psi_{s+1} \circ \dots \circ \psi_0$ satisfaisant les hypothèses. Le cas où $s = 0$ se traite simplement, car alors φ est d'ordre 0 et l'on peut prendre comme décomposition $\text{Id} \circ \phi_r \circ \varphi$. On supposera donc par la suite que $s > 0$. On peut restreindre cet ouvert pour que ϕ_r y soit d'ordre localement constant. Si ϕ_r est d'ordre nul, il suffit de poser $\nu = s$, $\pi_{s+1} = \phi_r \circ \psi_{s+1}$ et $\pi_i = \psi_i$ $0 \leq i \leq s$ pour obtenir une décomposition conforme de ϕ sur W_x .

Reste à étudier le cas où $\phi_r(x, y) = (x, F(x, y))$ est une TBJ d'ordre positif. Posons $\psi_{s+1}(X, Y) = (G(X, Y), H(X, Y))$. Soit W_1 , l'ouvert constitué des points (x, y) tels que $\partial G / \partial Y$ ne s'annule pas en $(X, Y) = \psi_s \circ \dots \circ \psi_0(x, y)$ et W_2 l'intérieur du complémentaire de W_1 dans W . La réunion W'_x de W_1 et W_2 étant dense dans W_x et $\cup_{x \in U} W'_x$ dense dans U , il suffit de montrer qu'une décomposition conforme existe au voisinage de tout point d'un ouvert dense dans W'_x .

Si $(x, y) \in W_1$, alors l'application $\gamma : (x, y) \mapsto (x, G(x, y))$ admet un inverse local $(x, y) \mapsto (x, L(x, y))$. Posant alors $\nu = s + 1$, $\pi_i = \psi_i$ $0 \leq i < s$, $\pi_s(x, y) = \gamma \circ \psi_s$ et $\pi_{s+1}(x, y) = (x, F(x, H(y, L(y, x))))$ et $\pi_{s+2} = \text{Id}$, on obtient une décomposition conforme.

Si $(x, y) \in W_2$, $G(x, y) = G(x)$. Posons $\psi_s(x, y) = (x, E(x, y))$. On restreint W_2 au sous-ouvert dense où $\text{ord}F(G(x), H(x, E(x, y)))$ est localement constant. Si $\text{ord}F(G(x), H(x, E(x, y))) > 0$, alors on posera $\nu = s$, $\pi_i = \psi_i$ $0 \leq i < s$, $\pi_s(x, y) = (x, F(G(x), H(x, E(x, y))))$ et $\psi_{s+1}(x, y) = (G(x), y)$. En revanche, si $\text{ord}F(G(x), H(x, E(x, y))) = 0$, alors on prendra $\nu = s - 1$, $\pi_i = \psi_i$ $0 \leq i < s$, et $\pi_s(x, y) = (G(y), F(G(y), H(y, E(y, x))))$. ■

Remarque 2. — Sous les hypothèses du théorème, si l'on pose $(X_i, Y_i) = \psi_i \circ \tau \circ \dots \circ \psi_1 \circ \psi_0(x, y)$, alors on a $\text{ord}Y_i > \text{ord}X_i$ pour $1 \leq i \leq \nu$. Pour $2 \leq i \leq \nu$, on a en outre $\text{ord}_x Y_i > \text{ord}_x X_i$ et $\text{ord}_y Y_i > \text{ord}_y X_i$.

En effet, les ψ_i sont des TBJ d'ordre localement constant et positif, ce qui implique en raison de la structure de la chaîne et de la présence d'un transposition entre ψ_i et ψ_{i+1} ($1 \leq i \leq \nu$), que l'ordre de X_i en X_0 est égal à $\sum_{j=1}^i \text{ord}\psi_j$, d'où l'inégalité (en constatant que $X_i = Y_{i-1}$). Si $\partial X_0 / \partial w = 0$, $w = x$ ou $w = y$, alors l'inégalité n'est vraie que pour l'ordre total quant $i = 1$. En revanche, X_1 dépend nécessairement des deux variables x et y ou de leurs dérivées, ce qui implique pour $2 \leq i \leq \nu$ une inégalité pour l'ordre en x et l'ordre en y .

Remarquons enfin que si $0 < \text{ord}X_{\nu+1} < \text{ord}Y_{\nu+1}$, alors $\nu \geq 2$. En effet, pour $\nu = 1$, soit $\text{ord}X_{\nu+1} = \text{ord}Y_{\nu+1}$, soit $\text{ord}X_{\nu+1} = 0$.

On peut compléter cet énoncé par le corollaire suivant.

COROLLAIRE 3. — *Soit $\phi : U \mapsto V, (x, y) \mapsto (X, Y)$ une transformation monotone, alors il*

existe un ouvert U' dense dans U tel que, au voisinage de tout point de U' , X et Y sont d'ordre constant en x et y et l'on a :

- 1) si $0 < \text{ord}X = \text{ord}Y$, il existe une fonction G d'ordre 0 telle que $\text{ord}G(X, Y) < \text{ord}X$;
- 2) si $0 < \text{ord}X < \text{ord}Y$ (resp. $0 = \text{ord}X < \text{ord}Y$), alors il existe une fonction $G(x, y)$ d'ordre nul en y et positif en x telle que $\text{ord}_x G(X, Y) < \text{ord}_x X$, et $\text{ord}_y G(X, Y) < \text{ord}_y X$ (resp. $\text{ord}G(x, y) = 0$) ;
- 3) si $\phi = \phi_{s+1} \circ \dots \circ \phi_0$ et $\phi = \psi_{\nu+1} \circ \dots \circ \psi_0$ sont deux décompositions de ϕ définies au voisinage d'un même point et satisfaisant les trois conditions du théorème, alors, $s = r$.

PREUVE. — On prend un ouvert U' satisfaisant les conditions du th. 1. Il existe alors au voisinage de tout point x une décomposition $\phi = \psi_{\nu+1} \circ \dots \circ \psi_0$ conforme aux conditions du th. 1. L'application $\psi_{\nu+1}$ est localement inversible et son inverse est une application d'ordre nul définie au voisinage de (X, Y) par $(x, y) \mapsto (L(x, y), M(x, y))$. Si $0 < \text{ord}X = \text{ord}Y$, alors $L(X, Y)$ est bien d'ordre total en x, y inférieur à X , d'après la remarque 2.

Si $0 < \text{ord}X < \text{ord}Y$, alors $L(x, y) = L(x)$. D'autre part, $\psi_{\nu}^{-1}(x, y) = (x, N(x, y))$ est bien d'ordre positif en x et nul en y , ainsi que l'application $G : (x, y) \mapsto N(L(x), M(x, y))$. D'après la remarque 2, on a bien $\text{ord}_w G(X, Y) < \text{ord}_w X$ où $w = x, y$. Si $0 = \text{ord}X < \text{ord}Y$, alors $\nu = 1$. Dans ce cas, $G(X, Y)$ est bien d'ordre nul. Ceci assure 1) et 2).

Le 3) provient du fait qu'en appliquant de manière répétée le 1) puis le 2) exactement ν fois, on décompose ϕ en une chaîne conforme aux hypothèses du th. 1 en prenant pour ϕ_{ν} l'inverse de $(x, y) \mapsto (x, G(x, y))$. La fonction G étant unique à composition près par une fonction inversible, la suite des X_i $1 \leq i \leq \nu$ est également fonctionnellement unique, d'où l'unicité de la longueur ν de la chaîne. ■

2 Le système de Rouchon

Le contre-exemple est bâti à partir du système de Rouchon [11] $x'_3 = x'_1 x'_2$, qui est plat, c'est-à-dire tel que sa solution générale s'exprime au moyen de deux fonctions arbitraires, ou *sorties plates* (cf. Fliess *et. al.* [4]) : $Z_1(x) = x_1, Z_2(x) = x'_1 x_2 - x_3$. On s'assure qu'on a bien $x_i = x_i(Z(x))$, en posant $x_1(z) = z_1, x_2(z) = \frac{z'_2}{z'_1}, x_3(z) = \frac{z'_1 z'_2}{z'_1} - z_2$. Par symétrie, on aurait aussi pu choisir pour sortie plate $T_1(x) = x_2, T_2(x) = x'_2 x_1 - x_3$. On en déduit que

$$(z_1, z_2) \mapsto T(x(z)) = \left(\frac{z'_2}{z'_1}, \left(\frac{z'_2}{z'_1} \right)' z_1 - \frac{z'_1 z'_2}{z'_1} + z_2 \right),$$

définit un automorphisme ϕ du plan affine différentiel, l'*involution de Rouchon* (le caractère symétrique de la définition de ϕ implique que $\phi^2 = \text{Id}$).

Il nous faut maintenant prouver que ϕ ne satisfait pas le corollaire. Posons $B = T_1(x(z))$ et $A = T_2(x(z))$. Comme A est d'ordre 3 et B d'ordre 2, nous allons montrer, grâce au théorème suivant qu'il n'existe pas de fonction $F(A, B, B')$ d'ordre inférieur à 2 (on peut se restreindre à ce cas, car si F était d'ordre $r > 1$ en B , $F(A, B, \dots, B^{(r)})$ serait d'ordre $2 + r > 2$, car $\partial F / \partial z_1^{(2+r)}$ serait alors égal à $\partial F / \partial B^{(r)} \partial B / \partial x'' \neq 0$).

THÉORÈME 4. — Soient $A(x_1, x_2)$ et $B(x_1, x_2)$ deux fonctions différentielles, d'ordres respectifs r_1, r_2 et s_1, s_2 en x_1 et x_2 . Les propositions suivantes sont équivalentes :

- A) il existe une fonction $C = F(A, B, \dots, B^{(\ell)})$ telle que $\partial F / \partial A \neq 0$ et $\text{ord}_{x_i} F(A, B) < \text{ord}_{x_i} B$, $i = 1, 2$;

B) il existe localement une unique fonction $H(x_1, \dots, x_1^{(s_1-1)}, x_2, \dots, x_2^{(s_2-1)}, B, \dots, B^{(\ell)})$ telle que $A(x_1, x_2) = H(x_1, x_2, B(x_1, x_2))$ et H est telle que $\frac{\partial}{\partial B^{(m)}} \left(\frac{\partial H / \partial x_i^{(p)}}{\partial H / \partial x_j^{(q)}} \right) = 0$; $0 \leq p < s_1$, $0 \leq q < s_2$, $i, j \in [1, 2]$, $0 \leq m \leq \ell$.

PREUVE. — $A) \Rightarrow B)$. — L'existence et l'unicité locales sont immédiates. Comme $\frac{\partial H / \partial x_i^{(p)}}{\partial H / \partial x_j^{(q)}} = \frac{\partial C / \partial x_i^{(p)}}{\partial C / \partial x_j^{(q)}}$, cette quantité ne dépend pas de B et de ses dérivées.

$B) \Rightarrow A)$. — Le feuilletage de $\mathbf{R}^{s_1+s_2}$ localement défini par $H(x, y, b) = \text{Cste}$ est indépendant de b . Toute fonction C dépendant effectivement de x_i et constante sur les hypersurfaces du feuilletage répond au problème. ■

Venons-en à l'involution de Rouchon. On a : $A = B'z_1 - z_1'B + z_2 = F(B, B', z_1, z_1', z_2)$. D'après le théorème, la quantité $(\partial F / \partial z_1') / (\partial F / \partial z_2)$ devrait donc être indépendante de B , ce qui est faux.

Conclusion

Le groupe de Cremona du plan affine différentiel et celui de la diffiété triviale de dimension différentielle 2 ne sont donc pas engendré par des applications de Jonquières généralisées. Nous conjecturons qu'on peut, en toute dimension, engendrer ce groupe en complétant le groupe des transformations monotones par des transformations inspirées de l'involution de Rouchon, c'est-à-dire obtenues à partir de systèmes plats admettant deux vecteurs de sorties plates non équivalents par des transformations monotones.

3 Bibliographie

- [1] BUIUM, A., 1994. *Differential algebra and diophantine geometry*, Actualités Mathématiques, Hermann, Paris.
- [2] CASTELNUOVO, 1901. « Le trasformazioni generatrici del gruppo cremoniano nel piano », *Atti Accad. Torino*, t. 36.
- [3] CREMONA, 1865. *Sulle trasformazioni geometriche delle figure piane*, *Mem. Acad. Bologna*, t. V, 2^e série.
- [4] FLIESS, M., LÉVINE, J., MARTIN, P. et ROUCHON, P., 1995. Flatness and defect of nonlinear systems: introductory theory and applications, *Internat. J. Control*, 61, p. 1327-1887.
- [5] GODEAUX, L., 1953 *Les transformations birationnelles du plan*, « Mémorial des Sciences Mathématiques », fasc. CxxII, Seconde Édition, Gauthier-Villars, Paris, 70 p.
- [6] DE JONQUIÈRES, 1885. Sur les transformations géométriques birationnelles d'ordre n , *C. R. Acad. Sc.*, t. 101, p. 720-724.
- [7] KRASIL'SHCHIK, I.S., LYCHAGIN, V.V. et VINOGRADOV, A.M., 1986. *Geometry of Jet Spaces and Non-linear Partial Differential Equations*, Gordon and Breach, New York.
- [8] NOETHER, M., 1870. Ueber Flächen welche Schaaren rationaler Curven besitzen, *Math. Annalen*, t. 3.
- [9] NOETHER, M., 1872. Zur Theorie der eindeutigen Ebenentransformationen, *Math. Annalen*, t. 5.
- [10] RITT, J.F., 1950. *Differential Algebra*, Amer. Math. Soc. Colloq. Publ., vol. 33, A.M.S., New-York.
- [11] ROUCHON, P., juillet 1993. Communication privée, courrier électronique.
- [13] ROSANES, 1870. Ueber diejenigen rationalen substitutionen welche eine rationale Umkehrung zulassen, *J. Crelle*, t. 73.
- [14] ZHARINOV, V.V., 1992. *Geometrical aspects of partial differential equations*, Series on Soviet and East European Mathematics, vol. 9, World Scientific, Singapore.