# Un sous-système d'un système plat de dimension différentielle 2 est plat

# A subsystem of a flat system of differential dimension 2 is flat.

François Ollivier

LIX, UMR CNRS 7161
École polytechnique
91128 Palaiseau CEDEX
France

francois.ollivier@lix.polytechnique.fr

Brahim Sadik

Département de Mathématiques
Faculté des Sciences Semlalia
B.P. 2390 Marrakech
Maroc

sadik@ucam.ac.ma

Mai 2017

**Abstract.** A subsystem of a flat system of differential dimension at most 2 is flat. Furthermore, if such a flat system is stationary, we show that there exist flat outputs not depending on the time.

**Résumé.** Un sous-système de dimension différentielle au plus 2 d'une extension plate est plate. Si un tel système plat est stationnaire, il admet des sorties plates indépendantes du temps.

# Abridged English version

The result that will be proved corresponds in control theory to the fact that a system with 2 controls which is linearizable by exogenous feedback is linearizable by endogenous feedback or also that any *subsystem* of a *flat system* is flat. We refer to [3, 5, 13, 9] for more details on flat systems, a notion that goes back to Monge's problem [7, 6, 1, 17], and to [14, 15, 4] for the formalism of diffiety theory. We will use Rouchon's lemma [12, 8], following the notations and definitions of [10]. A *diffiety extension*, or *system*, $V/U$ will be a diffiety with a projection $V \mapsto U$ that is a diffiety morphism and a *subsystem* $W/U$ of $V/U$ is such that $\mathcal{O}(W) \subset \mathcal{O}(V)$. For brevity, we denote $\partial/\partial x$ by $\partial_x$.

A *system of differential dimension $m$ $V/U_{\delta_0}$* is an open subset of $\mathbf{R}^n \times \left(\mathbf{R}^{\mathbf{N}}\right)^m \times U$ with a derivation $\delta_0 + \sum_{i=1}^n f_i(x,z,u)\partial_{x_i} + \sum_{j=1}^m \sum_{k=0}^\infty z_j^{(k+1)} \partial_{z_j^{(k)}}$. The *trivial system of differential dimension $m$*, $T^m/U_{\delta_0}$, is $\left(\mathbf{R}^{\mathbf{N}}\right)^m \times U$ equipped with the derivation $\delta_0 + \sum_{j=1}^m \sum_{k=0}^\infty z_j^{(k+1)} \partial_{z_j^{(k)}}$. We may then define flat systems.

Definition 1. — *A system $V/U_*$ is* parametrizable *if there exist a diffiety extension $U/U_*$ and $\phi : W/U \mapsto V \times_{U_*} U$ a morphism of extensions of $U$, where $W$ is an open subset of $T^\mu/U$, such that* $\mathrm{Im}\phi$ *is dense in $V \times_{U_*} U$.*

*A system $V/U$ is* flat *if there exists a dense open set $W \subset V$ such that any $x \in W$ admits a neighbourhood $O$ isomorphic by $\phi : O \mapsto \tilde{O}$ to an open subset $\tilde{O}$ of $T^m \times U$; the functions $\phi^*(z_j)$ that generate $\mathcal{O}(O)$ are called* flat outputs*.*

By convention, $\mathrm{ord}_z A = -\infty$ if $A$ is free from $z$ and its derivatives. In the case of a parametrizable diffiety, we identify a function $x \in \mathcal{O}(V)$ with the function $x(z) = \phi^*(x) \in \mathcal{O}(W)$.

Our theorem may be stated as follows. The case $m = 1$ is classical [2]. The proof will make a repeated use of Rouchon's lemma [12, 8], given below.

Theorem 2. — *A parametrizable extension of differential dimension at most* 2 *is flat.*

Theorem 3. — *Let $V/U_*$ be a parametrizable diffiety extension, $x_i \in \mathcal{O}(V)$, $i = 1 \ldots n$ a family of nonconstant functions on $V$, $H(x) = 0$ a differential equation satisfied by the $x_i$ and $e_i := \mathrm{ord}_{x_i} H$.*

*Using the notations of def. 1, let $z_j$ be coordinates on $T^\mu$ and assume the* $\max_{i=1}^n \mathrm{ord}_{z_1} x_i = r > -\infty$. *If $e_i = 0 \Rightarrow \mathrm{ord}_{z_1} x_{i_0} < r$, then using the notation $D := \sum_{e_i>0} C_i \partial_{x_i^{(e_i)}}$ where the $C_i$ are new variables with $DC_1 = 0$, the $n$-tuple $(\partial_{z_1^{(r)}} x_i^{(e_i)})$ is a solution of the equations $\phi^*(D^k P) = 0$.*

Proof. — It suffices to remark that, $\partial_{z_1^{(r+1)}} x_i^{(e_i)} = \partial_{z_1^{(r)}} x_i$ for $e_i > 0$, so that $\partial^2_{z_1^{(r+1)}} x_i = 0$. Substituting $\partial_{z_1^{(r+1)}} x_i$ to $C_i$ in $D^k P$, one gets $\partial^k_{z_1^{(r+1)}} P = 0$. ∎

From now on, we only consider differential dimension 2. We may complete some local coordinates on $V$, considered as functions of the $z_j$ using the morphism $\phi$, to get local coordinates on $W$, say by choosing $z_i, \ldots, z_i^{(s_i)}$, $i = 1, 2$, ($s_1 \leq r$), and the $z_j^{(k)}$, $j > 2$, $k \in \mathbf{N}$. We may then express the derivations $\partial/\partial z_1^{(k)}$ in the $V$ coordinates. In this setting, for state equations defining $V$, Rouchon's lemma means that $\partial_{z_1^{(r+1)}}$ and $\partial_{z_1^{(r)}} = [\delta, \partial_{z_1^{(r+1)}}]$ do commute. The next lemma goes one step further by considering $\partial_{z_1^{(r-1)}} = [\delta, \partial_{z_1^{(r)}}]$ (*cf.* [16]).

*Lemma 4. — Under the hypotheses of th. 3, assume that the system $V/U$ is locally defined by explicit equations of order 1. $P_i := x_i' - h_i(x, x_1', x_2', u) = 0$, $2 < i \leq n$.*
a) *If $V/U$ is parametrizable, the homogeneous ideal $(D^k P_i | 1 \leq i \leq n-2, k \in \mathbf{N})$ is of projective dimension 0, iff at least one of the equations $P_i$ is non linear in the derivatives $x_i'$.*
b) *In this case, the state equations can be rewritten $x_i' = f_i(x, v_2, u) v_1 + g_i(x, v_2, u)$, where the $v_i$ are functions of the $x_i$ and the $x_j'$, $j = 1, 2$, such that $\partial_{z_1^{(r+1)}} v_2 = 0$, $f_1 = 1$ (i.e. $v_1 = x_1'$) and $f_2 = v_2$ if $f_2$ depends on $v_2$.*
c) *We have moreover $\partial_{z_1^{(r)}} f_i(x, v_2, u) = 0$.*

Proof. — *a)* — By th. 3, the dimension is at least 1. Now, if $P_i$ is non linear in $x_i'$, $i = 1, 2$, then a non trivial relation $D^2 P_i = 0$, so that the dimension is at most 1. *b)* — Up to a permutation of indices, we may assume that $C_1 \neq 0$. Now, $C_2 = F(x, x_1', x_2') C_1$ with $\partial_{z_1^{(r)}} F = 0$. We take $v_1 = x_1'$. If $F$ depends on $x_2'$, we choose $v_2 = F$, $f_2(v_2) = v_2$ and $g_2 = x_2' - v_2$ or else $f_2(x) = F(x)$, $v_2 = x_2' - f_2(x) v_1$ and $g_2(v_2) = v_2$. *c)* — We have $\partial_{z_1^{(r+1)}} = A \partial_{v_1} + 2A' \partial_{v_1'} + \cdots + B \partial v_2' + \cdots$ So $\partial_{z_1^{(r)}} = \sum_{i=1}^n A f_i \partial_{x_i} +$

$A'\partial_{v_1}\cdots+B\partial_{v_2}+\cdots$ Going one step further, we get, as terms in $A'$ cancel: $\partial_{z_1^{(r-1)}} = \sum_{i=1}^n \left(Af_i' + \text{terms of order at most } r \text{ in } z_1\right)\partial_{x_i}+\cdots$ As $[\partial_{z_1^{(r+1)}},\partial_{z_1^{(r-1)}}]=0$, we need have $\partial_{z_1^{(r+1)}}f_i'=\partial_{z_1^{(r)}}f_i=0$. ∎

Sketch of the proof of th. 2. — Denote by $z$, $v$, $u$ $u_*$ coordinate functions on $T^\mu$, $V$, $U$, $U_*$. If the result is false, there exists an open subset $O=\phi(\tilde{O})\subset V$ such that no open subset $O_\prime=\phi(\tilde{O}_\prime)\subset O$ is isomorphic to an open subset of $T^m$. We will look for a contradiction.

In the case $m=1$, we choose $x_i$, $1\le i\le n$ such that the $x_i$ and their derivatives are local coordinates of $O_\prime\subset O$. We assume moreover that these function satisfy equations of order 1 $x_i'=h_i(x,x_1',u_*)$, $1<i\le n$ and that $n$ is minimal. If $n=1$, $O_\prime$ is flat.

If not, th. 3 implies that the $h_i$ are linear in $x_1'$: $h_i=f_ix_i'+g_i$. Then, we may replace the $x_i$ by $n-1$ independent solutions $y(x,u_*)$ of the differential system $\partial_{x_1}Y+\sum_{i=2}^n f_i\partial_{x_i}Y=0$. The derivatives $y_i'$ do not depend on $x_1'$, and the $y_i$ satisfy a new system of order 1 contradicting the minimality of $n$.

In the case $m=2$, we also consider $x_i(z,u,u_*)$, $1\le i\le n$, that satisfy a system of order 1 $x_i'=h_i(x,x_1',x_2',u_*)$, $2<i\le n$ and $\max_{i=1}^n \mathrm{ord}_{z_1}x_i = r>-\infty$. We assume that the couple $(r,n)$ is minimal for lexicographic ordering.

If $n=2$, $O_\prime$ is flat. If the $h_i$ do not depend on $x_1'$ or $x_2'$, we are reduced to the case $m=1$, already considered. We distinguish two cases.

i) If the $h_i$ are all linear in $x_1'$ and $x_2'$: $h_i=\sum_{j=1}^2 f_{i,j}x_j'+g_i$, $1\le i\le n$, we replace the $x_i$ by $n-1$ independent solutions $y(x,u_*)$, of the differential equation $\partial_{x_1}Y+\sum_{i=3}^n f_{i,1}\partial_{x_i}Y=0$. The order $\max_{i=1}^{n-1}\mathrm{ord}_{z_1}y_i$ is at most $r$. The $y_i'$ do not depend on $x_1'$, so that they satisfy a system of order 1. If the $y_i'$ depend on $x_1$, they satisfy our hypotheses, which contradicts the minimality of $n$. If not, we are reduced to the case $m=1$ and we just have to complete the flat output for the diffiety defined by the $y_i$ with $x_1$ to conclude.

ii) If the $h_i$ are not linear in $x_1'$ and $x_2'$, by *lem.* 4 the state equations can be rewritten $x_i'=f_i(x,v_2,u_*)*v_1+g_i(x,v_2,u_*)$, with $\partial_{z_1^{(r+1)}}v_2=0$ and $\partial_{z_1^{(r)}}f_i(x,v_2,u)=0$. We can replace the $x_i$ by $n-1$ independent solutions $y_i(x,v_2,u_*)$ of the differential equation $\sum_{i=1}^n f_i\partial_{x_i}Y=0$, completed with $v_2$ if the $f_i$ depend on $v_2$. The $y_i'$ must depend on $x_1$; if not the $f_i$ must be constants, the $y'_i$ satisfy linear equations so that the $h_i$ should have been linear in the $x'_j$, $j = 1, 2$.

So, the $y_i$ (and $v_2$ if $f_2 = v_2$) must satisfy a system of order 1 and, according to *lem.* 4 are of order less than $r$ in $z_1$. A final contradiction that concludes the proof.

*E.g.*, the diffieties $U$ and $U_*$ may be respectively $\mathbf{R}$, standing for the time variable $t$ with a derivation $\partial/\partial t$ and a single point with derivation 0, if $V$ is associated to a stationary model. Then, the theorem asserts that $V$ is flat with flat outputs not depending on the time, answering a problem raised by Pereira Da Silva and Rouchon [11].

# Introduction

Si la notion mathématique remonte aux travaux de Monge [7] et a été étudiée au début du xx$^{\mathrm{e}}$ siècle par Hilbert [6], Cartan [1] ou Zervos [17], les systèmes plats ont été inventés sous ce nom pour les besoins de l'automatique [3, 5, 9]. Dans ce cadre, le résultat qui va être prouvé en dimension différentielle au plus 2, signifie qu'un système linéarisable par bouclage exogène est linéarisable par bouclage endogène. Sommairement, *tout sous-système d'un système pla est plat*, c'est-à-dire que si les solutions d'un système d'EDO sont paramétrables par $m$ fonctions arbitraires, il existe un tel paramétrage localement bijectif. Le cas $m = 1$ est une conséquence des résultat de Charlet *et al.* [2] ou dans le cas d'un paramétrage rationnel du théorème de Lüroth–Ritt, mais qui n'a pas d'analogue en dimension différentielle 2 [8].

La définition de la platitude peut varier selon que l'on impose ou non à un système stationnaire de posséder un paramétrage indépendant du temps (*cf.* Pereira da Silva et Rouchon [11]). On montrera que, en dimension différentielle au plus 2, ces deux définitions coïncident, c'est-à-dire que *si un système stationnaire possède des sorties plates dépendant du temps, il en existe d'autres indépendantes*.

# 1 Diffiétés plates

Pour la notion de diffiété [14, 15], nous adoptons les conventions de [10]. Soit $I$ un ensemble dénombrable, on appellera *diffiété* un ouvert $V$ de $\mathbf{R}^I$

pour la topologie la plus grossière rendant pour tout $i_0 \in I$ les projections $\pi_{i_0} : (x_i)_{i\in I} \mapsto x_{i_0}$ continues, muni d'une dérivation $\delta = \sum_{i\in I} c_i(x)\frac{\partial}{\partial x_i}$, où les $c_i$ appartiennent à $\mathcal{O}(V)$, l'anneau des applications $\mathcal{C}^\infty$ de $V$ dans $\mathbf{R}$ ne dépendant que d'un nombre *fini* de coordonnées. Par concision, $\partial/\partial x$ sera noté $\partial_x$.

Un *morphisme de diffiétés* est une application $\phi : V_{\delta_1} \mapsto V_{\delta_2}$, définie par des fonctions $\mathcal{O}(V)$ et telle que $\delta_1 \circ \phi^* = \phi^* \circ \delta_2$, où $\phi^* : \mathcal{O}(V_2) \mapsto \mathcal{O}(V_1)$ est l'application duale de $\phi$.

Une *extension de diffiétés*, ou un *système*, noté $V/U$, est un couple de diffiétés muni d'une projection $\pi : V \mapsto U$ surjective qui est un morphisme de diffiétés. Il s'agit donc d'un fibré sur $U$, avec une projection compatible avec la structure de diffiété. Un morphime d'extensions $\phi : V_1/U \mapsto V_2/U$ est un morphisme de $V_1$ dans $V_2$ tel que $\pi_2 \circ \phi = \pi_1$. Un *sous-système* $W/U$ de $V/U$ est une extension de $U$ telle que $\mathcal{O}(W) \subset \mathcal{O}(V)$. Soient $V/U$ et $W/U$ deux extensions de diffiétés, leur produit fibré est muni d'une structure naturelle d'extension de $U$ (ainsi que de $V$ ou de $W$), notée $V \times_U W$.

Un *système de dimension différentielle* $m$ $V/U_{\delta_0}$ est un ouvert de $\mathbf{R}^n \times \left(\mathbf{R}^{\mathbf{N}}\right)^m \times U$ muni d'une dérivation de la forme $\delta_0 + \sum_{i=1}^n f_i(x,z)\partial_{x_i} + \sum_{j=1}^m \sum_{k=0}^\infty z_j^{(k+1)}\partial_{z_j^{(k)}}$. *L'extension triviale* de dimension différentielle $m$, que l'on note $T^m/U_{\delta_0}$, est $\left(\mathbf{R}^{\mathbf{N}}\right)^m \times U$ muni de la dérivation

$$\delta_0 + \sum_{i=1}^m \sum_{k=0}^\infty z_i^{(k+1)}\partial_{z_i^{(k)}}.$$

Définition 5. — *Un système $V/U_*$ est* paramétrable *s'il existe un système $U/U_*$ et $\phi : W/U \mapsto V \times_{U_*} U$ un morphisme d'extension de $U$, où $W$ est un ouvert de $T^\mu/U$, tel que* $\mathrm{Im}\phi$ *est dense dans $V \times_{U_*} U$.*

*Un système $V/U$ sera dit* plat *s'il existe un ouvert dense $W$ de $V$ tel que tout $x$ appartenant à $W$ admette un voisinage $O$ isomorphe par $\phi : O \mapsto \tilde{O}$ à un ouvert $\tilde{O}$ de* l'extension triviale $\mathbf{T}^m \times U$. *Les fonctions $\phi^*(z_i)$, où les $z_i$ définissent l'extension triviale, sont appelées* sorties plates*.*

Théorème 6. — (Endogène=exogène) *Une extension paramétrable de dimension différentielle au plus* 2 *est plate.*

Les diffiétés $U_*$ et $U$ (déf. 5) peuvent, par exemple, faire intervenir une variable « temps » $t$ avec $t' = 0$ : si celui-ci n'apparaît pas dans $U_*$, il est absent des sorties plates de $V/U_*$.

## 2 Lemme de Rouchon et itération

Par convention, $\mathrm{ord}_z A = -\infty$ si $A$ est indépendent de $z$ et de ses dérivées.derivatives. Pour une diffiété paramétrable, on identifiera la fonction $x \in \mathcal{O}(V)$ avec la fonction $x(z) = \phi^*(x) \in \mathcal{O}(W)$.

Theorem 7. — *Soit $V/U_*$ un système paramétrable, $x_i \in \mathcal{O}(V)$, $i = 1 \ldots n$ une famille de fonctions non constantes sur $V$, $H(x) = 0$ une équation différentielle satisfaite par les $x_i$ et $e_i := \mathrm{ord}_{x_i} H$.*

*Avec les notations de la déf. 5, soient $z_j$ des coordonnées sur $T^\mu$ telles que $\max_{i=1}^n \mathrm{ord}_{z_1} x_i = r > -\infty$. Si $e_i = 0 \Rightarrow \mathrm{ord}_{z_1} x_{i_0} < r$, alors notant $D := \sum_{e_i > 0} C_i \partial_{x_i^{(e_i)}}$ où les $C_i$ sont de nouvelles variables avec $DC_1 = 0$, le $n$-uplet $(\partial_{z_1^{(r)}} x_i^{(e_i)})$ est solution des équations $\phi^*(D^k P) = 0$.*

Preuve. — Il suffit de remarquer que $\partial_{z_1^{(r+1)}} x_i^{(e_i)} = \partial_{z_1^{(r)}} x_i$ pour $e_i > 0$, de sorte que $\partial^2_{z_1^{(r+1)}} x_i = 0$. Substituant $\partial_{z_1^{(r+1)}} x_i$ to $C_i$ dans $D^k P$, on obtient $\partial^k_{z_1^{(r+1)}} P = 0$. ∎

Nous nous limitons maintenant à la dimension différentielle 2. On peut compléter des coordonnées $x_i$ sur $V$, considérées comme des fonctions des $z_j$ grâce au morphisme $\phi$, pour obtenir des coordonnées locales sur $W$, *e.g.* en choisissant $z_i, \ldots, z_i^{(s_i)}$, $i = 1, 2$, ($s_1 \le r$), et les $z_j^{(k)}$, $j > 2$, $k \in \mathbf{N}$. On peut alors exprimer les dérivations $\partial_{z_1^{(k)}}$ dans les coordonnées de $V$. De la sorte, pour des équations d'état définissant $V$, le *lemme* 7 signifie que $\partial_{z_1^{(r+1)}}$ et $\partial_{z_1^{(r)}} = [\delta, \partial_{z_1^{(r+1)}}]$ commutent. Le lemme suivant va un cran plus loin en considérant $\partial_{z_1^{(r-1)}} = [\delta, \partial_{z_1^{(r)}}]$ (*cf.* [16]).

*Lemma* 8. — *Sous les hypothèses du th. 7, supposons que le système $V/U$ est localement défini par des équations explicites d'ordre* 1 *: $P_i := x_i' - h_i(x, x_1', x_2', u) = 0$, $2 < i \le n$ (1).*

a) *Si $V/U$ est paramétrable, l'idéal homogène* $(D^k P_i | 1 \leq i \leq n-2,\ k \in \mathbf{N})$ *est de dimension projective* 0 *ssi ssi l'une des équations $P_i$ est non linéaire en les dérivées $x_i'$.*
b) *Alors, les équations* (1) *se réécrivent* $x_i' = f_i(x, v_2, u)v_1 + g_i(x, v_2, u)$ (2), *où les $v_i$ sont des fonctions des $x_i$ et des $x_j'$, $j = 1,2$, telles que* $\partial_{z_1^{(r+1)}} v_2 = 0$, $f_1 = 1$ *(*i.e. *$v_1 = x_1'$) et $f_2 = v_2$ si $f_2$ dépend de $v_2$.*
c) *On a en outre* $\partial_{z_1^{(r)}} f_i(x, v_2, u) = 0$.

Preuve. — *a)* — Par le th. 7, la dimension est au moins 0. Si $P_i$ est non linéaire en les $x_i'$, $i = 1,2$, alors il existe une équation non triviale $D^2 P_i = 0$, et la dimension est au plus 0. *b)* — À permutation près, on peut supposer $C_1 \neq 0$. Alors, $C_2 = F(x, x_1', x_2')C_1$ avec $\partial_{z_1^{(r)}} F = 0$. Nous prenons $v_1 = x_1'$. Si $F$ dépend de $x_2'$, on pose $v_2 = F$, $f_2(v_2) = v_2$ et $g_2 = x_2' - v_2$ ou sinon $f_2(x) = F(x)$, $v_2 = x_2' - f_2(x)v_1$ et $g_2(v_2) = v_2$. *c)* — Nous avons $\partial_{z_1^{(r+1)}} = A\partial_{v_1} + 2A'\partial_{v_1'} + \cdots + B\partial v_2' + \cdots$ Donc $\partial_{z_1^{(r)}} = \sum_{i=1}^n A f_i \partial_{x_i} + A'\partial_{v_1} \cdots + B\partial_{v_2} + \cdots$ Au cran suivant, comme les terme en $A'$ s'annulent, on a : $\partial_{z_1^{(r-1)}} = \sum_{i=1}^n \left(A f_i' + \text{des termes d'ordre au plus } r \text{ en } z_1\right) \partial_{x_i} + \cdots$ Comme $[\partial_{z_1^{(r+1)}}, \partial_{z_1^{(r-1)}}] = 0$, on doit avoir, $\partial_{z_1^{(r+1)}} f_i' = \partial_{z_1^{(r)}} f_i = 0$. ∎

# 3 Mise en œuvre du lemme de Rouchon

Soient $z$, $v$, $u$ $u_*$ des coordonnées sur $T^\mu$, $V$, $U$, $U_*$. Si le théorème est faux, il existe un ouvert $O = \phi(\tilde{O}) \subset V$ tel qu'aucun ouvert $O_\prime = \phi(\tilde{O}_\prime) \subset O$ n'est plat. Nous allons chercher une contradiction.

Dans le cas $m = 1$, soient $x_i$, $1 \leq i \leq n$ des fonctions définissant avec leurs dérivées des coordonnées locales de $O_\prime \subset O$. On suppose en outre qu'elles satisfont des équations d'ordre 1 $x_i' = h_i(x, x_1', u_*)$, $1 < i \leq n$ et que $n$ est minimal. Si $n = 1$, $O_\prime$ est plat.

Sinon, le th. 7 implique que les $h_i$ sont linéaires en $x_1'$ : $h_i = f_i x_i' + g_i$. On peut alors remplacer les $x_i$ par $n-1$ solutions indépendantes $y(x, u_*)$ de l'équation $\partial_{x_1} Y + \sum_{i=2}^n f_i \partial_{x_i} Y = 0$. Les dérivées $y_i'$ ne dépendent pas de $x_1'$, de sorte que les $y_i$ satisfont un nouveau système d'ordre 1 contredisant la minimalité de $n$.

Dans le cas $m = 2$, on considère aussi $x_i(z, u, u_*)$, $1 \leq i \leq n$, qui satisfont un système d'ordre 1 $x_i' = h_i(x, x_1', x_2', u_*)$, $2 < i \leq n$ and

$\max_{i=1}^{n} \operatorname{ord}_{z_1} x_i = r > -\infty$. Nous supposons le couple $(r, n)$ minimal pour l'ordre lexicographique.

Si $n = 2$, $O_\prime$ est plat. Si les $h_i$ ne dépendent pas de $x_1'$ ou $x_2'$, on se ramène au cas $m = 1$, déjà traité. On distingue deux situations.

i) Si les $h_i$ sont tous linéaires en $x_1'$ et $x_2'$ : $h_i = \sum_{j=1}^{2} f_{i,j} x_j' + g_i$, $1 \leq i \leq n$, on remplace les $x_i$ par $n-1$ solutions indépendantes $y(x, u_*)$ de l'équation $\partial_{x_1} Y + \sum_{i=3}^{n} f_{i,1} \partial_{x_i} Y = 0$. L'ordre $\max_{i=1}^{n-1} \operatorname{ord}_{z_1} y_i$ est au plus $r$. Les $y_i'$ ne dépendent pas de $x_1'$, et satisfont donc un nouveau système d'ordre 1. Si les $y_i'$ dependent de $x_1$, ils satisfont nos hypothèses, contredisant la minimalité de $n$. Sinon, on est ramené au cas $m = 1$ et il suffit de compléter la sortie plate de la diffiété définie par les $y_i$ avec $x_1$ pour conclure.

ii) Si les $h_i$ ne sont pas linéaires en $x_1'$ et $x_2'$, par le *lem.* 8 les équation d'état peuvent être réécrites $x_i' = f_i(x, v_2, u_*) * v_1 + g_i(x, v_2, u_*)$, avec $\partial_{z_1^{(r+1)}} v_2 = 0$ et $\partial_{z_1^{(r)}} f_i(x, v_2, u) = 0$. On remplace les $x_i$ par $n-1$ solutions indépendantes $y_i(x, v_2, u_*)$ de l'équation différentielle $\sum_{i=1}^{n} f_i \partial_{x_i} Y = 0$, cpomplétées avec $v_2$ si les $f_i$ dépendent de $v_2$. Les $y_i'$ doivent dépendre de $x_1$ ; sinon les $f_i$ seraient des constantes, et les $y_i'$ satisferaient un système linéaire de sorte que $h_i$ seraient aussi linéaires en les $x_j'$, $j = 1, 2$.

Donc, les $y_i$ (et $v_2$ si $f_2 = v_2$) engendrent $\mathcal{O}(O_\prime)$, doivent satisfaire un système d'ordre 1 et, selon le *lem.* 8 sont d'ordre strictement inférieur à $r$ en $z_1$ : une contradiction finale qui achève la preuve.

*Exemple* 9. — Considérons $V$ défini par un modèle de voiture $\theta' = u/d \tan\phi$, $x' = u\cos\theta$, $y' = u\sin\theta$ (*cf.* [3, (18)]). Les diffiétés $U = U_0$ sont définies par $d' = 0$. Soient les paramétrages $\phi$ exprimés par $\theta = \arctan(z_2'/z_1') \mp \arctan(z_3'/((z_1')^2 + (z_2')^2 - (z_3')^2)^{1/2}) + (1 \mp 1)\pi/2$, $x = z_1 + z_3 \sin\theta$ et $y = z_2 - z_3\cos\theta$. Quand ${x_3'}^2$ tend vers ${x_1'}^2 + {x_2'}^2$, les deux paramétrages tendent vers le lieu où $x' = y' = 0$. Une famille de sorties plates est donnée, *e.g.*, par $B_1 := x + C\sin\theta$ et $B_2 := y - C\cos\theta$, $C \in \mathbf{R}$.

Tout choix de fonctions $B_i$ de $x$, $y$ et $\theta$ minimise $\epsilon(= 2)$, mais pas nécessairement $e_2 (\in \{0, 1\})$. Si $e_2 = 1$, il peut être abaissé en remplaçant $P_1$ par une solution de (1) (*cf.* i) *supra*). Si $e_2 = 0$ et $s = 1$, alors on obtient $s = 0$ en remplaçant $A_2$ par $P_1$ (*cf.* ii) a) *supra*).

*Exemple* 10. — En prenant $U$ défini par $t' = 1$ et en substituant $t$ à $z_3$ dans les formules de l'exemple précédent, on obtient bien de nouveaux paramétrages indépendants de $t$.

## Conclusion

Nous espérons une adaptation de cette preuve dans le cadre de l'algèbre différentielle ou en dimension différentielle supérieure à 2, mais de nombreuses difficultés se présentent que nous ne savons pas surmonter.

## Références

[1] É. Cartan, « Sur l'intégration de certains systèmes indéterminés d'équations différentielles», *Journal für die reine und angewandte Mathematik*, **145**, 86–91, 1915.

[2] B. Charlet, J. Lévine et R. Marino, « On dynamic feedback linearization », *Systems & Control Letters*, **13**, 143–151, North-Holland, 1989.

[3] M. Fliess, J. Lévine, Ph. Martin et P. Rouchon, « Flatness and defect of nonlinear systems : introductory theory and applications », *Internat. J. Control*, 61, p. 1327–1887, 1995.

[4] M. Fliess, J. Lévine, Ph. Martin et P. Rouchon, "Deux applications de la géométrie locale des diffiétés", *Annales de l'IHP, section A*, **66**, (3), 275–292, 1997.

[5] M. Fliess, J. Lévine, Ph. Martin et P. Rouchon, « A Lie-Bäcklund approach to equivalence and flatness of nonlinear systems », *IEEE AC.* 44 :922–937, 1999.

[6] D. Hilbert, « Über den Begriff der Klasse von Differentialgleichungen », *Math. Annalen*, 73, 95–108, 1912.

[7] G. Monge, « Supplément où l'on fait savoir. . .», *Histoire de l'Académie royale des sciences*, Paris, 502–576, 1787.

[8] F. Ollivier, « Une réponse négative au problème de Lüroth différentiel en dimension 2 », *C. R. Acad. Sci. Paris*, t. 327, Série I. p. 881–886, 1998.

[9] J. Lévine, *Analysis and Control of Nonlinear Systems : A Flatness-based Approach*, Springer, 2009.

[10] F. Ollivier et B. Sadik, « La borne de Jacobi pour une diffiété définie par un système quasi régulier », *Comptes rendus Mathématique*, **345**, 3, 139–144, 2007.

[11] P.S. Pereira da Silva et P. Rouchon, « On time-invariant systems possessing time-dependent flat outputs », actes de *NOLCOS 2004*, Elsevier, 2004.

[12] P. Rouchon, « Necessary condition and genericity of dynamic feedback linearization », *Journal of Mathematical Systems Estimation and Control*, Birkhaüser Boston, **4**, (2), 1–14, 1994.

[13] H. Sira-Ramírez and S. Agrawal, *Differentially Flat Systems*, Marcel Dekker, New York, 2004.

[14] I.S. Krasil'shchik, V.V. Lychagin (V.V.) et A.M. Vinogradov, *Geometry of Jet Spaces and Nonlinear Partial Differential Equations*, Gordon and Breach, New York, 1986.

[15] V.V. Zharinov, *Geometrical aspects of partial differential equations*, Series on Soviet and East European Mathematics, vol. 9, World Scientific, Singapore, 1992.

[16] V.V. Zharinov, "On differentiations in differential algebras", *Integral Transforms and Special Functions*, **4**, (1,2), 163–180, 1996.

[17] P. Zervos, *Le problème de Monge*, Mémorial des Sciences Math., fasc. LIII, Gauthier-Villars, Paris, 1932.