Une réponse négative au problème de Lüroth différentiel en dimension 2

François Ollivier (CNRS)
GAGE, Centre de Mathématiques
École polytechnique, 91128 Palaiseau CEDEX, France
Tél. 33 (0)1 69 33 45 96, Fax. 33 (0)1 69 33 30 50
ollivier@gage.polytechnique.fr
http://medicis.polytechnique.fr/gage/ollivier.html

(Reçu le 16 juin 1998, accepté après revision le 5 octobre 1998)

Résumé

Un exemple simple montre que le problème de Lüroth différentiel admet une réponse négative : il existe une sous-extension d'une extension différentiellement transcendante pure de degré 2 d'un corps différentiel algébriquement clos, qui n'est pas différentiellement transcendante pure.

Rubriques : *Algèbre*, équations différentielles.

Abstract

A negative answer to the δ-Lüroth problem in two variables

A simple example shows that the δ-Lüroth problem in two variables admits a negative answer: we exhibit a subextension of a differentially transcendental field extension of degree 2 of an algebraically closed differential field, which is not differentially transcendental.

Abridged english version

J.F. Ritt proved that the classical Lüroth theorem can be generalized to differential fields of characteristic 0, i.e. given any purely transcendental differential extension $k\langle z\rangle$, and any intermediate extension $k \subset L \subset k\langle z\rangle$, there exists y such that $L = k\langle y\rangle$. At the end of his classical book Ritt [14 p. 179], asked whether such a differential analog exists for extensions formed with two differential variables z_1, z_2.

We give here a negative answer, with the following three generators example:

$$x_1 = \frac{1}{2}\left(\frac{z_2'}{z_1''} + z_1\right), \quad x_2 = \frac{1}{4}\left(\frac{z_2'}{z_1''} - z_1\right)^2, \quad x_3 = \frac{z_1' z_2'}{z_1''} - z_2.$$

Such an example is inspired by a *flat system* (see Fliess *et al.* [5,6] for details). Roughly speaking, flat systems are differential systems whose general solution may be parametrized by m arbitrary functions, m being the differential dimension of the associated algebraic differential variety.

DEFINITION. 1 — *A differential field extension K/k is* flat *if there exists an algebraic extension of K which is an algebraic extension of a pure differential extension $k\langle z\rangle$. A* flat system *is a characteristic set of a prime differential ideal defining a flat extension.*

The Rouchon system $y_3' = y_1' y_2'$, admits as general solution

$$y_1 = z_1, \quad y_2 = \frac{z_2'}{z_1''}, \quad y_3 = \frac{z_1' z_2'}{z_1''} - z_2,$$

where z_1, z_2 are arbitrary functions such that $z_1'' \neq 0$. We claim that over any differential field k, the extension $k\langle x_i\rangle = k\langle (y_2+y_1)/2, (y_2-y_1)^2/4, y_3\rangle$ is not purely differentially transcendental.

The proof relies on the following variant of Rouchon's theorem [12], which is a key tool in the theory of flat systems.

THEOREM 2. — *Let L/k be a differential extension and $(x_i)_{i\in[1,n]}$ be a a familly such that $L = k\langle x_i\rangle$, which we do not assume to be differentially free. Consider the kernel $\mathcal{P}$ of the evaluation epimorphism:*

$$\begin{array}{ccc} k\{X\} & \mapsto & L, \\ X_i & \mapsto & x_i, \end{array}$$

and let Σ be a subset of $\mathcal{P}$ of bounded order. Let r_i be the maximal order of the differential polynomials $P \in \Sigma$ in the variable x_i, if a strict derivative of x_i appears in Σ and -1 if not. (By convention $\partial P/\partial x_i^{(-1)}$ is 0.) Then define the homogeneous polynomials

$$Q_{P,\nu}(Y) := \sum_{|\alpha|=\nu} \frac{n!}{\alpha!} \frac{\partial^{|\alpha|}(P)}{\partial\left(X_1^{(r_1)}\right)^{\alpha_1} \cdots \partial\left(X_m^{(r_n)}\right)^{\alpha_m}} \prod_{j=1}^{n} Y_j^{\alpha_j}$$

of the algebraic polynomial ring $k\{X\}[Y]$ and let $\tilde{Q}_{P,\nu}$ be the image polynomials in $L[Y]$ obtained by substituting x_i to X_i. If L/k is flat, the homogeneous system $\tilde{Q}_{P,\nu}; P \in \Sigma, \nu \geq 1$ admits a non trivial solution. If K/k is purely transcendental, the system admits a non trivial L-rational solution.

The most important application of this theorem is to consider a characteristic set of $\mathcal{P}$ for any ordering. In particular, if you take a flat system of order 1 in n differential indeterminates $P_1(x', x), \ldots, P_{n-2}(x', x)$, then the velocity surface defined by $P_1(v, c) = \cdots = P_{n-2}(v, c) = 0$ for any generic initial condition c is ruled.

This should be related to the following geometrical result stated independently at the same time by Buium [1, chap. IV § 3 prop. 3.1 2) p. 118].

THEOREM 3. — *Let X, Y be smooth projective surfaces over a δ-closed field $\mathcal{F}$ and $f : X \mapsto Y$ a δ-rational map whose image is Zariski dense. If f is not a rational map, then Y must be ruled.*

In the case of our example, a charateristic set for $\mathcal{P}$ is $P := 4X_2 X_3' + (X_2')^2 - 4X_2(X_1')^2$. For $\nu = 2$ we have $Q_2(Y) = 4x_2 Y_1^2 - Y_2^2 = 0$, which implies

$$\frac{Y_2}{Y_1} = \pm 2\sqrt{x_2} \notin L.$$

From this we conclude that L is not a purely transcendental differential extension of k.

So the best generalization of Lüroth theorem that we can expect in dimension greater that 1 is the following weak one: a subextension of a flat extension is flat. It corresponds in control theory to the fact that every system linearizable by dynamic feedback is linearizable by endogenous feedback.

Remerciements. — Les résultats de Pierre ROUCHON, maître ès aplatissages, ont été décisifs pour ce travail. Qu'il en soit ici remercié.

Introduction

Le théorème de Lüroth affirme que si $k \subset L \subset k(x)$ est une sous-extension d'une extension transcendante pure de degré 1, alors $L = k(z)$ est également une extension transcendante pure. J.F. Ritt a étendu ce résultat au cas d'une extension de corps différentiel ordinaire.

On sait que le théorème de Lüroth s'étend au cas d'une extension transcendante de degré 2 $k \subset L \subset k(x_1, x_2)$ pourvu que k soit algébriquement clos. Parmi les problèmes ouverts cités à la fin de l'ouvrage classique de Ritt [14 App. § 14 p. 179], figure la possibilité d'un analogue différentiel. Cette question réputée difficile est restée ouverte depuis. Elle est encore mentionnée dans l'ouvrage récent de A. Buium [1 chap. IV § 3 *passim* p. 118 et 119] : « [...] Ritt's δ-Lüroth problem in two variables which seems to remain (in the form Ritt has put it) entirely outside the techniques so far available. »

On exhibe un exemple simple de sous-extension différentielle d'une extension différentiellement transcendante pure de degré 2 dont on peut montrer qu'elle n'est pas elle-même une extension transcendante pure, ce qui donne une réponse négative au problème de Lüroth différentiel. La preuve repose sur une technique introduite par Rouchon [12] pour l'étude des systèmes plats (*cf.* Fliess, Lévine, Martin et Rouchon [5, 6]).

On suppose connues du lecteur les bases de l'algèbre différentielle, pour lesquelles on peut se reporter à Ritt [13, 14 ch. I et II], ou à Buium [1 ch. II]

1 Systèmes plats et surfaces réglées

La théorie des systèmes plats trouve son origine en automatique. Il s'agit de systèmes commandables pour lesquels le problème de la planification de trajectoire se résoud de manière particulièrement simple, puisque l'espace des solutions du système d'EDO qui les définit est presque partout localement paramétrable par m fonctions arbitraires. On peut définir mathématiquement cette notion dans le cadre géométrique des diffiétés (c.f. Lychagin, Krasil'shchik et Vinogradov [8] ou Zharinov[15]), ou dans celui plus restrictif de l'algèbre différentielle qui nous interessera seule ici. Dans le cadre des diffiétés, la notion de platitude a été semble-t-il considérée en premier par Hilbert [7], dans une terminologie différente, puis par Cartan [4], qui en donna un critère effectif, pour des diffiétés de dimension différentielle 1.

DÉFINITION 1. — *Une extension de corps différentiel L/k est dite plate s'il existe une extension algébrique L_2/L de L qui soit une extension algébrique d'une extension différentiellement transcendante pure $k\langle x_1, \ldots, x_n\rangle/k$.*

On appellera système plat un ensemble caractéristique d'un idéal premier définissant une extension de corps plate.

Le théorème suivant, dû à Pierre Rouchon [12], est l'un des résultats fondamentaux du sujet. Il permet de montrer d'emblée que cette notion n'est pas générique.

THÉORÈME 2. — *Soit L/k une extension différentielle, et $(x_i)_{i\in[1,n]}$ une famille telle que $L = k\langle x_i\rangle$, qu'on ne suppose pas nécessairement différentiellement libre. Considérons le noyau $\mathcal{P}$ de l'épimorphisme d'évaluation :*

$$\begin{array}{ccc} k\{X\} & \mapsto & L, \\ X_i & \mapsto & x_i, \end{array}$$

et soit $\Sigma \subset \mathcal{P}$ un sous-ensemble d'ordre borné. Soit r_i l'ordre maximal des polynômes $P \in \Sigma$ en l'indéterminée différentielle x_i, si une dérivée d'ordre strictement positif de celle-ci y apparaît et -1 sinon. (Par convention, $\partial P/\partial x_i^{(-1)}$ est nul.) Définissons les polynômes homogènes

$$Q_{P,\nu}(Y) := \sum_{|\alpha|=\nu} \frac{n!}{\alpha!} \frac{\partial^{|\alpha|} P}{\partial\left(X_1^{(r_1)}\right)^{\alpha_1} \cdots \partial\left(X_n^{(r_n)}\right)^{\alpha_n}} \prod_{j=1}^{n} Y_j^{\alpha_j}$$

de l'anneau de polynômes algébrique $k\{X\}[Y]$, ainsi que les polynômes images $\tilde{Q}_{P,\nu}$ de $L[Y]$, obtenus en substituant x_i à X_i. Si L/k est plate, le système homogène $\tilde{Q}_{P,\nu} = 0; P \in \Sigma, \nu \geq 1$ admet une solution non triviale. Si L/k est différentiellement transcendante pure, le système admet une solution dans L.

PREUVE. — Soient $(z_j)_{j\in[1,m]}$ tel que $k\langle z\rangle$ satisfasse l'hypothèse de la définition 1. Alors, pour tout X_i apparaissant dans Σ, $x_i^{(r_i)} = g_i(z_1, z_1', \ldots, z_1^{(s_1)}, \ldots, z_m, z_m', \ldots, z_m^{(s_m)})$ où s_j est l'ordre maximal des dérivées de z_j apparaissant effectivement dans l'expression d'un des $x_i^{(r_i)}$ et les g_i des fonctions algébriques. Si $L = k\langle z\rangle$ est transcendante pure, alors les g_i sont rationnelles. Si Σ ne contient que le polynôme nul, le résultat est immédiat. Sinon, on peut trouver $1 \leq \ell \leq n$ tel que X_i apparaisse dans Σ et z_ℓ dans g_i. Posons $y_i = \partial g_i/\partial z_\ell^{(s_\ell)}$. Par simple application des règles de dérivation, pour tout entier positif ν, nous avons

$$\tilde{Q}_{P,\nu}(y) = \frac{\partial^\nu}{\partial\left(z_\ell^{(s_\ell)}\right)^\nu} P(x) = 0,$$

d'où le résultat. ■

Celui-ci est particulièrement intéressant lorsque Σ est un ensemble caractéristique, e.g. si l'on prend un système plat d'ordre 1 en n indéterminées différentielles, $P_1(x', x), \ldots, P_{n-2}(x', x)$, la surface des vitesses définies par $P_1(v, c) = \cdots = P_{n-2}(v, c) = 0$ est réglée pour toute condition initiale c générique. En effet, pour tout $y \in k^n$ solution du système $\tilde{Q}_{P,\nu}(y) = 0$, $v \in V \Rightarrow v + ty \in V$ pour tout $t \in k$.

Ce résultat est à rapprocher du théorème suivant, énoncé indépendament par Buium.

THÉORÈME 3. — *Soient X, Y des surfaces projectives sur un corps δ-clos $\mathcal{F}$ et $f : X \mapsto Y$ une application δ-rationnelle dont l'image est Zariski dense. Si f n'est pas rationnelle, alors Y est réglée.*

Remarquons que la simplicité de ce résultat masque la difficulté de sa mise en œuvre. En effet, étant donné un système Σ fini, on peut tester – e.g. par un calcul de base standard – l'existence de solutions non triviales. En revanche, on ne dispose pas d'algorithme pour tester l'existence de solutions L-rationnelles. En outre, pour utiliser un algorithme de base standard, il nous faut disposer d'un test de nullité sur L. Si L est donné par générateurs et relations, il nous faudra calculer un ensemble caractéristique (voir Boulier [2,3] pour le calcul d'un ensemble caractéristique, et Péladan [10] pour les tests de nullité dans les extensions d'anneaux différentiels). Si L est donné comme sous-corps d'un corps différentiel effectif K, il suffit d'utiliser le test de nullité de K. Dans un tel contexte, se pose en revanche le problème de décider l'appartenance d'un polynôme de K à L (voir Ollivier [9]).

Par chance, le contre-exemple est suffisament simple pour ne poser aucune difficulté de calcul.

2 Le contre-exemple

Soit k un corps différentiel ordinaire algébriquement clos, *e.g.* la clôture algébrique de $\mathbf{Q}$ muni de la dérivation triviale, et $k\langle z_1, z_2\rangle$ une extension différentiellement transcendante pure. Posons

$$x_1 = \frac{1}{2}\left(\frac{z_2'}{z_1''} + z_1\right), \quad x_2 = \frac{1}{4}\left(\frac{z_2'}{z_1''} - z_1\right)^2, \quad x_3 = \frac{z_1' z_2'}{z_1''} - z_2,$$

et considérons l'extension $L := k\langle x_1, x_2, x_3\rangle$. On s'assure par un simple calcul d'évaluation que $P := 4X_2X_3' + (X_2')^2 - 4X_2(X_1')^2$ appartient au noyau $\mathcal{P}$ de l'épimorphisme canonique $k\{X_1, X_2, X_3\} \mapsto L$. En fait, il s'agit même pour tout ordre d'un ensemble caractéristique de cet idéal. Pour le montrer, on s'assure d'abord que x_1, x_2 et x_3 sont algébriquement indépendants, en constatant que le déterminant

$$\left|\frac{\partial x_i}{\partial z_1^{(j)}}; 1 \le i \le 3, 0 \le j \le 2\right|$$

est non identiquement nul. Ceci montre que les éléments d'un ensemble caractéristique sont d'ordre strictement positif. Ensuite, on remarque que $k\langle x_1, \sqrt{x_2}\rangle = k\langle z_1, z_2'\rangle$. En effet, $z_1 = x_1 - \sqrt{x_2}$ et $z_2' = \frac{x_1+\sqrt{x_2}}{(x_1-\sqrt{x_2})'}$, ce qui assure l'inclusion de droite à gauche. L'inclusion de gauche à droite est immédiate. Ceci implique que x_1, x_2 forment une base de transcendance différentielle de L. L'ensemble caractéristique du noyau ne comporte donc qu'un unique polynôme ; P étant d'ordre minimal parmi les éléments de $\mathcal{P}$ et premier, c'est un ensemble caractéristique de l'idéal premier $\mathcal{P}$.

On en déduit que $\sqrt{x_2}$ n'est pas dans L. Supposons en effet qu'il existe une fraction différentielle telle que $(R(x)/S(x))^2 = x_2$. Choisissons un ordre éliminant x_3. On peut supposer par pseudo-réduction par P qu'aucune dérivée stricte de x_3 n'apparaît dans R et S. Alors, le polynôme différentiel $S^2(x)x_2 - R^2(x)$ qui appartiendraît à $\mathcal{P}$ serait irréductible par l'ensemble caractéristique P. Une contradiction.

Notons, que nous n'avons eu besoin de montrer que P est un ensemble caractéristique que pour prouver que $\sqrt{x_2} \notin L$.

Nous pouvons maintenant conclure. Écrivant le système du théorème 2, on trouve pour $\nu = 2$ l'équation

$$Q_2(Y) = 4x_2Y_1^2 - Y_2^2 = 0,$$

de sorte qu'on a :

$$\frac{Y_2}{Y_1} = \pm 2\sqrt{x_2} \notin L,$$

ce qui montre que le système n'admet pas de solution dans L et donc, d'après le théorème 2, que l'extension plate L/k n'est pas différentiellement transcendante pure.

À l'origine de cet exemple, se trouve le système plat de Rouchon : $y_3' = y_2'y_1'$, qui donne lieu à une extension différentiellement transcendante pure engendrée par $z_1 = y_1$ et $z_2 = y_1'y_2 - y_3$. On a alors

$$y_1 = z_1, \quad y_2 = \frac{z_2'}{z_1''}, \quad y_3 = \frac{z_1'z_2'}{z_1''} - z_2.$$

Notre exemple a été constuit en prenant l'extension plate $k\langle x_i \rangle = k\langle (y_2+y_1)/2, (y_2-y_1)^2/4, y_3 \rangle$.

Une autre variante classique permet de montrer la nécessité d'une extension algébrique du corps de base k, en considérant le système $x_3' = (x_2')^2 + (x_1')^2$ qui n'est pas plat en réel.

Conclusion

En dimension différentielle supérieure à 1, le meilleur résultat qu'on puisse espérer est la généralisation faible du théorème de Lüroth, qui est que toute sous-extension d'une extension plate est plate, et qui se traduit en automatique par le fait que tout système linéarisable par bouclage dynamique est linéarisable par bouclage endogène.

Références bibliographiques

[1] Buium, A., 1994. *Differential algebra and diophantine geometry*, Actualités Mathématiques, Hermann, Paris.

[2] Boulier, F., 1994. *Étude et implantation de quelques algorithmes en algèbre différentielle*, thèse de l'Université des Sciences et Techniques de Lille.

[3] Boulier, F., Lazard, D., Ollivier, F. et Petitot, M., 1995. Representation for the radical of a finitely generated differential ideal, dans les actes de *ISSAC'95*, Montréal, Québec, A.H.M. Levelt éd., ACM Press, New York, ISBN : 0-89791-699-9, p. 158-166.

[4] Cartan, É., 1915. Sur l'intégration de certains systèmes indéterminés d'équations différentielles, *Journal für reine und angewandte Mathematik*, 145, 86-91.

[5] Fliess, M., Lévine, J., Martin, P. et Rouchon, P., 1992. Sur les systèmes non linéaires différentiellement plats, C. R. Acad. Sci. Paris, t. 315, Série I, p. 619-624.

[6] Fliess, M., Lévine, J., Martin, P. et Rouchon, P., 1995. Flatness and defect of nonlinear systems: introductory theory and applications, *Internat. J. Control*, 61, 1995, p. 1327-1887.

[7] Hilbert, D., 1912. Über den Begriff der Klasse von Differentialgleichungen, *Mathematische Annalen*, 73, 95-108.

[8] Krasil'shchik, I.S., Lychagin, V.V. et Vinogradov, A.M., 1986. *Geometry of Jet Spaces and Nonlinear Partial Differential Equations*, Gordon and Breach, New York.

[9] Ollivier, F., 1990. *Le problème de l'identifiabilité structurelle globale : étude théorique, méthodes effectives et bornes de complexité*, Thèse de Doctorat en Science, École polytechnique.

[10] Péladan-Germa, A., 1995. Testing Identities of Series Defined by Algebraic Partial Differential Equations, dans les actes de *AAECC'11*, Paris, France, Gérard Cohen, Marc Giusti et Teo Mora éd., Lecture Notes in Computer Science 948, Springer-Verlag, Berlin et Heidelberg, p. 393-407.

[11] Péladan-Germa, A., 1997. *Tests effectifs de nullité dans les extensions d'anneaux différentiels*, thèse de l'École polytechnique, janvier 1997.

[12] Rouchon, P., 1994. Necessary condition and genericity of dynamic feedback linearization, *J. of Math. Systems, Estimations and Control*, vol 4, No. 2, p. 257-260, Birkäuser, Boston.

[13] Ritt, J.F., 1932. *Differential Equations from the Algebraic Standpoint*, Amer. Math. Soc. Colloq. Publ., vol. 14, A.M.S., New-York.

[14] Ritt, J.F., 1950. *Differential Algebra*, Amer. Math. Soc. Colloq. Publ., vol. 33, A.M.S., New-York.

[15] Zharinov, V.V., 1992. *Geometrical aspects of partial differential equations*, Series on Soviet and East European Mathematics, vol. 9, World Scientific, Singapore, 1992, 360 p.