QUELQUES APPROCHES ALGÉBRIQUES EFFECTIVES DES PHÉNOMÈNES DIFFÉRENTIELS

Jacques-Arthur WEIL, Ariane PÉLADAN-GERMA, François OLLIVIER et Albert SHIH

Les systèmes de calcul formel savent maintenant répondre à des questions comme : "la fonction $x \mapsto e^{x^2}$ admet-elle une primitive exprimable à l'aide des fonctions usuelles ?", ou encore "l'équation différentielle $16x^2y'' + 7y = 0$ admet-elle une solution exprimable à l'aide de fonctions usuelles ?". Cet article présente les mathématiques mises en œuvre pour répondre à ce type de questions.

Le *calcul formel* est le terme qui désigne en France la représentation et la manipulation des objets mathématiques sur ordinateur (les pays anglo-saxons utilisent plutôt les expressions *computer algebra* ou *symbolic computation*). Il traite des symboles (au contraire du calcul numérique qui travaille avec des nombres en précision fixée ou arbitraire), et produit des expressions ou résultats exacts (par opposition à "approchés"). Par exemple, pour calculer avec le nombre $\sqrt{2}$, on ne le traitera pas comme 1,414, mais comme une racine du polynôme $x^2 - 2$. De manière générale, notre problématique centrale consistera à trouver pour les objets ou concepts mathématiques rencontrés, des représentations qui permettent de ramener leur traitement à des manipulations de polynômes.

En complément des théorèmes d'existence et/ou d'unicité d'objets ou de propriétés résultant des théories mathématiques "classiques", le but du calcul formel est de fournir des algorithmes, à savoir des méthodes constructives qui doivent être suffisamment efficaces pour aboutir à une implantation (c'est-à-dire un programme exécutable par un ordinateur). En effet, beaucoup de méthodes effectives développées depuis le dix-neuvième siècle étaient tombées en désuétude du fait de la lourdeur dissuasive des calculs, non envisageables à la main (citons ici Galois : *"je ne voudrais charger personne de faire les calculs ; en un mot, ils sont impraticables"*). L'apparition de l'ordinateur et de langages de manipulation symbolique (le premier étant vraisemblablement Lisp, en 1956) a permis de contourner progressivement cet écueil ; les premiers systèmes de calcul formel sont alors apparus (essentiellement sous l'impulsion de physiciens). L'évolution du calcul formel a depuis consisté d'une part, à réactualiser et à développer ces techniques anciennes (en les intégrant aux avancées récentes de l'algèbre commutative), et d'autre part, à programmer les techniques de calcul connues. Il s'est alors établi une discipline hybride, traitant de problèmes allant des mathématiques effectives à l'informatique théorique et pratique. Actuellement, les grands systèmes (Macsyma, Reduce, Maple, Axiom, Mathematica...) ont atteint une maturité (scientifique et commerciale) qui en permet une large diffusion.

Nous nous concentrerons, dans ce qui suit, sur l'aspect mathématique. Nous commencerons par rappeler quelques constructions que l'on peut faire avec des polynômes, nous montrerons ensuite comment on peut ramener la manipulation de fonctions élémentaires (naïvement, disons que ce sont celles qui sont connues par un étudiant de terminale scientifique) à ces constructions, et nous décrirons enfin comment ce formalisme permet de calculer des primitives ou des solutions d'équations différentielles linéaires. Notre fil conducteur sera de montrer comment une modélisation algébrique d'un problème issu de l'analyse peut en permettre un traitement automatique.

Calculs algébriques effectifs

Pour effectuer un calcul compliqué, un principe simple consiste à le ramener à des manipulations sur des objets que l'on connaît bien. Nous allons donc, dans cette partie, commencer par décrire comment des manipulations simples sur des polynômes permettent d'effectuer des calculs faisant intervenir des solutions de systèmes d'équations polynomiales sans expliciter ces dernières (voir aussi l'encadré 1).

Un bon exemple est le nombre complexe i. On l'introduit en terminale comme "solution de l'équation $X^2 + 1 = 0$". On ne lui donne donc pas une "valeur" mais on le considère comme une "indéterminée ayant la propriété $i^2 + 1 = 0$". Le sens mathématique de nos guillemets est le suivant : soit $Q(X)$ un polynôme à coefficients rationnels. Pour évaluer $Q(i)$, nous effectuons une division euclidienne de Q par le polynôme $X^2 + 1$ qui nous donne $Q = M.(X^2 + 1) + \widetilde{Q}$; on a alors $Q(i) = \widetilde{Q}(i)$ (et $\widetilde{Q}$ est un polynôme de degré 1). Soit $\mathcal{I} = (X^2 + 1)$ l'idéal premier engendré par $X^2 + 1$ (c'est-à-dire l'ensemble de tous les multiples de $X^2 + 1$ par des polynômes). Travailler avec le nombre i consiste donc à travailler modulo $\mathcal{I}$, c'est-à-dire à travailler dans le quotient $\mathbb{Q}[X]/(X^2 + 1)$.

Rappelons qu'un peu plus généralement, si $P \in \mathbb{Q}[X]$ est un polynôme à coefficients rationnels, manipuler une racine de P sera équivalent à travailler dans $\mathbb{Q}[X]/(P)$. À tout polynôme Q, on associera le reste $\widetilde{Q}$ de la division euclidienne de Q par P ; le polynôme $\widetilde{Q}$ sera le représentant canonique de la classe d'équivalence de Q dans $\mathbb{Q}[X]/(P)$. De plus, si $\widetilde{Q} \neq 0$ et si P est irréductible, l'identité de Bézout dans $\mathbb{Q}[x]$ nous donne (par l'algorithme d'Euclide généralisé) deux polynômes R et S tels que $RQ + SP = 1$. Nous aurons alors $\widetilde{R}\widetilde{Q} = 1$

Jacques-Arthur Weil, Ariane Péladan-Germa, François Ollivier et Albert Shih, GAGE, Centre de mathématiques (URA 169 du CNRS), École polytechnique, F-91128 Palaiseau Cedex.

Encadré 1

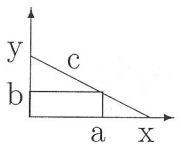
Résolution de systèmes d'équations polynomiales

Pour mieux comprendre ce qui suit, rappelons-nous la méthode de Gauss pour les systèmes d'équations linéaires : on ordonne les diverses variables, puis on transforme le système d'équations en un système triangulaire. On *élimine* progressivement des variables dans les équations ; cela donne de plus le rang du système (la dimension de l'espace vectoriel des solutions). Pour les systèmes non-linéaires à plusieurs variables, il existe une méthode qui généralise simultanément la méthode de Gauss et la division euclidienne des polynômes, comme nous allons le voir sur l'exemple suivant :

Supposons qu'on veuille poser une planche de longueur c sur le coin d'un rectangle de côtés a et b de façon à ce que ses extrémités x et y soient respectivement à l'horizontale de a et à la verticale de b (voir la figure). Quelles sont alors les valeurs possibles pour x et y ?

Cet énoncé se traduit par le système suivant :

$$(S) : \begin{cases} P_1(x,y) & := x^2 + y^2 - c^2 & = 0 \\ \text{(Pythagore)} & & \\ P_2(x,y) & := xy - bx - ay & = 0 \\ \text{(condition de contact sur le coin)} & & \end{cases}$$



On travaille sur l'ensemble des polynômes à deux variables sur le corps $\mathbb{Q}(a,b,c)$: considérons *l'idéal* $\mathcal{I}$ engendré par P_1 et P_2, c'est-à-dire l'ensemble des polynômes s'écrivant $SP_1 + QP_2$ (où S et Q sont des polynômes). Nous allons calculer des générateurs de cet idéal qui décrivent "plus simplement" les solutions en éliminant des variables.

Montrons, par exemple, comment éliminer la variable x. Nous avons un terme en x^2 dans P_1, et un terme en xy dans P_2. Pour les faire "disparaître", nous calculons $P_3 = yP_1 - xP_2 = y^3 - yc^2 + bx^2 + xay$. Mais P_3 fait encore intervenir un terme en x^2 et un terme en xy. Pour les éliminer, nous formons successivement $P_4 = P_3 - bP_1 = y^3 - yc^2 + xay - by^2 + c^2 b$, puis $P_5 = P_4 - aP_2 = c^2 b + \left(-c^2 + a^2\right) y - by^2 + y^3 + bax$. Notre nouveau polynôme P_5 ne contient maintenant plus qu'un terme en x. Nous pouvons encore l'éliminer en formant $P_6 = (y-b)P_5 - abP_2 = -c^2 b^2 + 2\,c^2 by + \left(-c^2 + a^2 + b^2\right) y^2 - 2\,by^3 + y^4$. Notons que, par construction, nos nouveaux polynômes sont encore dans l'idéal.

Ne pouvant plus rien réduire, nous nous arrêtons : nous avons complété le système de générateurs de notre idéal, de manière à décrire totalement ses racines : elles sont en nombre fini (on dit que la variété est de *dimension 0*). En effet, si (x_0, y_0) est solution de (S), alors y_0 est une racine de P_6 et x_0 est uniquement déterminé par la relation $P_5(x_0, y_0) = 0$. Réciproquement, on peut montrer facilement que (P_5, P_6) engendre l'idéal, c'est-à-dire que toute solution de $\{P_5 = 0, P_6 = 0\}$ est une solution de notre système initial. Outre qu'elle donne les solutions du système, cette base permet de tester si un polynôme quelconque appartient à l'idéal : il suffit d'y éliminer toutes les occurrences de x (par P_5), et de vérifier que le polynôme obtenu est un multiple de P_6. On dit alors que (P_5, P_6) forme une *base standard* de notre idéal de départ.

On pourrait montrer (ou le vérifier sur un dessin), que les configurations réelles possibles sont au nombre de 0, 1 ou 2. Les autres configurations algébriquement possibles n'existent pas physiquement (ce dont notre modèle ne rend pas compte, il eût fallu ajouter les contraintes $x > a$ et $y > b$ et traiter un problème *semi-algébrique*).

La méthode (simpliste) utilisée ci-dessus est un cas (très) particulier de l'algorithme de calcul de bases standard, dont les premières versions formalisées datent de Buchberger (1965). Le traitement de systèmes polynomiaux est actuellement au cœur du projet européen POSSO (POlynomial System SOlving).

modulo P : $\widetilde{R}$ est l'inverse de $\widetilde{Q}$ dans le quotient, qui sera ainsi muni effectivement d'une structure de corps (de la même manière que toute fraction en i peut s'exprimer comme un polynôme en i). Un nombre ainsi défini comme racine d'un polynôme irréductible est dit *algébrique*.

Dans le cas de problèmes à plusieurs variables, les choses se compliquent sensiblement. La division euclidienne sera remplacée par une réduction, sorte de "division généralisée" par une famille de polynômes. Considérons, par exemple, un système d'équations polynomiales

$$(S) : \{P_1(X_1, \ldots, X_n) = 0, \ldots, P_m(X_1, \ldots, X_n) = 0\}.$$

Pour manipuler (sans les expliciter) les solutions de (S), il nous faut considérer (comme plus haut) l'idéal $\mathcal{I}$ engendré les P_i, c'est-à-dire l'ensemble de toutes les combinaisons $\sum_i A_i P_i$ (où les A_i sont des polynômes). Nous devons donc expliciter un représentant unique de la classe de tout polynôme dans le quotient, c'est-à-dire savoir *réduire* un polynôme modulo $\mathcal{I}$. Pour ce faire, on peut compléter l'ensemble des générateurs de $\mathcal{I}$ en un ensemble plus grand de polynômes (des *bases standard*, ou des *ensembles caractéristiques*) qui "décrivent" assez bien la structure de l'idéal, ou du "lieu géométrique" formé par l'ensemble des solutions de (S) (la *variété* associée). Cela permet, par exemple, de décider si la variété est vide, de décider si elle n'a qu'un nombre fini de points (i.e. si le système a un nombre fini de solutions), d'éliminer des variables, etc. Sans rentrer dans le détail (voir l'encadré 1 pour un exemple), retenons que cela revient à ramener le calcul modulo un idéal, à de l'algèbre linéaire et à des divisions euclidiennes généralisées.

Ces méthodes, dites de *complétion* et de *réécriture*, résolvent donc des problèmes très généraux. La contrepartie de cette généralité est une certaine lourdeur des calculs, non envisageables à la main (sauf sur des exemples "jouet" comme dans l'encadré 1). Plus précisément, une famille d'exemples, due à Mayr et Mayer (1984), montre que, pour un système de polynômes de degré 2 en $O(n)$ variables, une base standard peut contenir des polynômes de degré total $2^{2^{O(n)}}$. On ne peut donc s'attendre en pratique à une efficacité systématique : la résolution d'un système très compliqué impliquera souvent de faire intervenir d'autres propriétés (géométriques, de symétrie, etc.) du système.

Pour plus de détails sur les techniques de calcul formel en algèbre commutative, on pourra par exemple consulter le livre de Cox, Little et O'Shea.

Manipulation des fonctions élémentaires

Sachant manipuler des quantités algébriques, on est naturellement enclin à vouloir traiter symboliquement les fonctions usuelles. L'idée, ici, consiste à étendre les techniques précédentes de passage au quotient pour modéliser des fonctions.

Historiquement, les premiers travaux dans ce sens remontent à Liouville (1833), qui désigne comme *fonction élémentaire*, une fonction construite récursivement de la manière suivante. Les fonctions rationnelles (quotients de polynômes) sont élémentaires ; ensuite, l'exponentielle ou le logarithme d'une fonction élémentaire sont élémentaires. Enfin, une fonction algébrique sur un corps de fonctions élémentaires (c'est-à-dire définie comme racine d'un polynôme à coefficients dans un corps de fonctions élémentaires déjà construites) est encore élémentaire.

Par exemple, si nous partons du corps $\mathbb{Q}(x)$ des fractions rationnelles en une variable, alors nous pouvons construire les fonctions élémentaires suivantes : $\sqrt{1+e^x}$ est élémentaire car définie comme racine de $Y^2-1-e^x=0$ (et e^x est élémentaire) ; la fonction $\log(\log(x))$ est aussi élémentaire (transcendante de deuxième espèce dans la terminologie de Liouville) ; enfin, si nous écrivons $\cos(x)=\dfrac{e^{ix}+e^{-ix}}{2}$, $\log(1+e^{\cos(x)})$ est aussi une fonction élémentaire.

Maintenant, nous voulons des représentations de ces fonctions qui nous ramènent à des manipulations de polynômes.

Pour une fonction algébrique, de même que l'on a construit le corps $\mathbb{C}$ des nombres complexes comme le quotient de $\mathbb{R}[X]$ par l'idéal engendré par X^2+1, on peut obtenir $\mathbb{Q}(x,\sqrt{x})$ comme quotient de $\mathbb{Q}(x)[Y]$ par l'idéal (Y^2-x) : les techniques décrites ci-dessus permettent de manipuler symboliquement de telles fonctions.

Pour introduire l'exponentielle, il faut agir plus finement. Nous voudrions pouvoir définir l'exponentielle comme une "racine de l'équation $y'-y=0$". Il nous faut donc formaliser algébriquement la notion de dérivation. On appelle *dérivation sur un corps* K un opérateur δ vérifiant les deux propriétés usuelles de $\frac{d}{dx}$:

$$\forall a,b\in K,\ \delta(a+b)=\delta(a)+\delta(b) \text{ et } \delta(ab)=\delta(a)b+\delta(b)a.$$

Nous dirons alors que K muni de δ est un *corps différentiel*. Comme dans l'algèbre commutative usuelle, introduisons les notions de polynômes et d'idéaux. Notons y' pour $\delta(y)$. Un *polynôme différentiel* en la variable (différentielle) y sera un polynôme (au sens algébrique) en les variables $y, y', y'', \ldots$ Ceci nous permet de construire l'anneau (commutatif, ne pas confondre avec les anneaux d'opérateurs) noté $K\{y\}$ des polynômes différentiels. Comme précédemment, nous allons considérer des idéaux dans cet anneau. Mais, quand une fonction est solution d'une équation différentielle, elle est aussi solution de toutes les équations obtenues par dérivations successives. Pour un polynôme différentiel P, nous appellerons donc *idéal différentiel engendré par* P l'ensemble des combinaisons $\sum_{i\geqslant 1} A_i P^{(i)}$ (où les A_i sont des polynômes différentiels et où les $P^{(i)}$ désignent les dérivées successives de P) : les solutions de $P=0$ sont des solutions de toutes ces équations différentielles.

À présent, il est aussi simple de "modéliser" $\exp x$ qu'il l'était de rajouter i à $\mathbb{R}$: il suffit d'adjoindre à $\mathbb{Q}(x)$ un élément y vérifiant $y'-y=0$. Formellement, on quotiente $\mathbb{Q}(x)\{y\}$ par l'idéal différentiel (premier) engendré par $y'-y$. Nous ne nous préoccuperons pas ici de conditions initiales. Ce que nous avons construit est un corps qui "ressemble" à $\mathbb{Q}(x,\exp x)$, au sens où toute propriété vraie dans $\mathbb{Q}(x,y)$ est vraie pour $\mathbb{Q}(x,\exp x)$. Les fonctions obtenues de cette manière sont dites *différentiellement algébriques*.

En particulier, nous pouvons maintenant donner un modèle algébrique des fonctions élémentaires. Le principe est d'empiler des extensions pour introduire une par une les fonctions intermédiaires dont on a besoin. Nous appellerons (par abus de langage) *corps de fonctions élémentaires* un corps $\mathbb{C}(t_1,\ldots,t_n)$ vérifiant :

$$\forall i=1,\ldots,n;\ \exists a_i\in\mathbb{C}(t_1,\ldots,t_{i-1}) \quad \text{tel que}$$

$$\begin{cases} t_i \text{ algébrique} & (t_i \text{ est algébrique sur } \mathbb{C}(t_1,\ldots,t_{i-1})),\\ \text{ou } t_i'=a_i'/a_i & (t_i \text{ modélise le logarithme de } a_i),\\ \text{ou } t_i'=a_i't_i & (t_i \text{ modélise l'exponentielle de } a_i). \end{cases}$$

Dans la suite, nous appellerons (encore par abus de langage) *fonction élémentaire*, tout élément d'un "corps de fonctions élémentaires". Dans ce cadre, une fonction élémentaire sera représentée par une fraction rationnelle en $t_1,\ldots,t_n$. Rigoureusement, cette façon de procéder ne construit à chaque étape que des classes de fonctions (car nous ne prenons pas de conditions initiales) ; mais on peut montrer que toute "fonction élémentaire" construite algébriquement de cette façon a une réalisation comme "vraie" fonction (i.e. méromorphe sur un ouvert).

Reprenons nos exemples précédents. Pour construire $\log(\log(x))$, on introduit t_1 avec $t_1'=\dfrac{1}{x}$, puis t_2 avec $t_2'=\dfrac{1}{xt_1}$; le représentant de $\log(\log(x))$ est alors t_2. Pour introduire $\log(1+e^{\cos(x)})$, on introduit successivement $t_1'=it_1, t_2'=(\dfrac{t_1^2+1}{2t_1})'t_2, t_3'=\dfrac{t_2'}{1+t_2}$ (et le représentant est alors t_3). Enfin, un dernier exemple : pour la tangente hyperbolique, on introduit $t_1'=t_1$, et alors le représentant de $\tanh(x)$ sera $\dfrac{t_1^2-1}{t_1^2+1}$.

Maintenant, pour pouvoir calculer, il faut savoir appliquer les quatre opérations arithmétiques (+,-,*,/) sur les objets qu'on manipule (ce que nous savons faire dans un quotient) et savoir tester l'égalité. Ce dernier point consiste à savoir détecter quand deux représentations définissent le même objet. Par exemple, si vous avez de bons souvenirs de trigonométrie (ou si vous disposez d'un système de calcul formel performant), vous pourrez constater que les deux expressions suivantes sont égales, mais ça n'est pas évident a priori :

$$f(x)=\frac{4tan(\frac{1+x^2}{2})}{x(1+tan^2(\frac{1+x^2}{2}))}+4xln(x)$$

$$g(x)=\frac{8xln(x)tan^2(\frac{1+x^2}{2})}{(1+tan^2(\frac{1+x^2}{2}))}+4xcos(x^2+1)ln(x)+\frac{2sin(x^2+1)}{x}$$

Il faut d'abord vérifier que ces deux expressions sont dans la même classe de fonctions élémentaires (c'est-à-dire tester qu'elles ont une même représentation dans

Encadré 2

Pourquoi e^{x^2} n'admet pas de primitive élémentaire

Démontrons que e^{x^2} n'admet pas de primitive élémentaire en utilisant l'algorithme d'intégration évoqué dans le texte (d'après M. Rosenlicht : *Integration in Finite Terms*, Amer. Math. Monthly, vol. 79, 1972, pp 963-972).

On considère le corps (différentiel) $\mathbb{C}(x,t)$ des fractions rationnelles en les indéterminées x et t, avec $x' = 1$ et $t' = 2xt$ (t modélise e^{x^2}) . Si t admet une primitive élémentaire alors, d'après le principe de Liouville, on peut trouver des $v_i \in \mathbb{C}(x,t)$ et des $c_i \in \mathbb{C}$ tels que :

$$(E) : \qquad t = v_0' + \sum_{i=1}^{n} c_i \frac{v_i'}{v_i}$$

Commençons par chercher à exprimer le dénominateur de v_0 (pris comme fraction rationnelle en t sur le corps $\mathbb{C}(x)$). Notons d'abord que, par factorisations, on peut supposer que les v_i ($i \geqslant 1$) qui ne sont pas dans $\mathbb{C}(x)$ sont distincts, unitaires, et irréductibles. Comme il n'y a pas de dénominateurs dans la partie gauche de (E), toute occurrence d'un dénominateur dans la partie droite de (E) devra être "compensée" par une autre occurrence de ce même dénominateur. Mais les v_i sont irréductibles. Il faut donc pouvoir écrire v_0' comme somme de fractions rationnelles dont tous les dénominateurs seraient irréductibles (un dénominateur non irréductible dans v_0' ne serait compensé par personne). Or si un terme de v_0 s'écrit $\frac{N}{D}$ (avec N, D premiers entre eux), alors sa dérivée est $\frac{N'}{D} - \frac{ND'}{D^2}$. Pour qu'un dénominateur D dans v_0 donne lieu uniquement à des dénominateurs irréductibles dans v_0', il est donc nécessaire que D divise D'.

A ce stade, il nous faut remarquer que si $f(t)$ est un polynôme unitaire irréductible de $\mathbb{C}(x)[t]$, alors sa dérivée est un polynôme de même degré. Celui-ci n'est un multiple de $f(t)$ que si $f(t) = at$ ($a \in \mathbb{C}(x)$). Le seul dénominateur possible pour v_0 est donc t. Or t n'apparaît pas dans les v_i car $\frac{t'}{t} = 2x$. Il n'y a donc pas de dénominateur dans la partie droite.

Notre équation (E) devient alors $t = (\sum_{i=0}^{l} d_i t^i)'$, avec $d_i \in \mathbb{C}(x)$. Or $(d_i t^i)' = d_i' t^i + i d_i t^{i-1} t' = (d_i' + 2ixd_i)t^i$. Si $l \geqslant 2$ et $d_l' = -2lxd_l$, alors $(d_l^{-\frac{1}{l}})' = 2x(d_l^{-\frac{1}{l}})$. On pourrait donc trouver une constante c telle que $e^{x^2} = cd_l^{-\frac{1}{l}}$ et e^{x^2} serait algébrique sur $\mathbb{C}(x)$, ce qui n'est pas possible, donc $l = 1$ et :

$$(E) \Rightarrow (R) : d_1' + 2xd_1 = 1.$$

Nous nous sommes donc ramenés à un problème dans $\mathbb{C}(x)$. Le dernier coefficient à calculer est donné par une *équation de Risch* (c'est-à-dire une équation différentielle de la forme $y' + f'(x)y = g(x)$). Si une fraction rationnelle $d_1(x)$ vérifie (R), alors une analyse similaire des dénominateurs montre que d_1 doit être un polynôme. Or, dériver un polynôme (en x) à coefficients constants abaisse son degré. Donc, le terme dominant dans $2xd_1$ devra être compensé par un terme de même degré dans le membre de droite de (R). Mais c'est impossible, car le membre de droite est de degré 0 et $2xd_1$ est au moins de degré 1.

En conséquence, (R) n'a pas de solution rationnelle, (E) n'a pas de solution dans $\mathbb{C}(x,t)$, et donc e^{x^2} n'admet pas de primitive élémentaire. Plus généralement, nous venons de montrer que fe^g (où f et g sont des fractions rationnelles) admet une primitive élémentaire si et seulement si il existe $y \in \mathbb{C}(x)$ tel que $y' + g'y = f$. La primitive est alors ye^g (à une constante près), ce que chacun vérifiera aisément.

notre formalisme, ce qui se ramène en fait aux techniques de calcul algébrique effectif de la partie précédente) ; pour vérifier qu'elles sont "vraiment" égales comme fonctions, il faudrait introduire des conditions initiales, ce qui dépasse notre propos.

Le calcul des dérivées découle mécaniquement de notre construction. Nous allons maintenant montrer comment cette représentation se prête au calcul des primitives.

Intégration en forme finie

L'énoncé du problème de *l'intégration en forme finie* est fort simple : étant donné une fonction élémentaire f, existe-t-il (et, si oui, la calculer) une fonction élémentaire F telle que $F' = f$?

Les fonctions élémentaires les plus simples sont les fractions rationnelles. Pour elles, le problème de l'intégration en forme finie a été initialement abordé par Leibnitz et Newton, puis résolu par J. Bernouilli qui a proposé d'utiliser la "décomposition en éléments simples" telle qu'on la pratique en premier cycle universitaire. Rappelons brièvement cette méthode. On considère une fraction rationnelle $f(x) = \frac{N(x)}{D(x)}$. Si on travaille sur le corps $\mathbb{C}$ des nombres complexes, on peut (théoriquement) factoriser le dénominateur en $D(x) = \prod_{i=1}^{n}(x - a_i)^{m_i}$. La fraction f peut alors se décomposer en éléments simples, c'est-à-dire qu'on peut trouver un polynôme $E(x)$ (la partie entière de la fraction) et des nombres $\alpha_{i,j}$ tels que : $f(x) = E(x) + \sum_{i=1}^{n}\sum_{j=1}^{m_i} \frac{\alpha_{i,j}}{(x-a_i)^j}$. Une primitive de f est alors

$$F(x) = \int E(x)dx + \sum_{i=1}^{n} \alpha_{i,1} \log(x - a_i) + \sum_{i=1}^{n}\sum_{j=2}^{m_i} \frac{\alpha_{i,j}}{(1-j)(x-a_i)^{j-1}}.$$

Le problème de cette méthode est qu'elle suppose qu'on dispose d'une factorisation explicite de $D(x)$, ce qui est rare. Les travaux, notamment, de Ostrogradsky, Hermite (au dix-neuvième siècle) et de nombreux mathématiciens depuis les années 70 ont donc consisté à développer (ou à améliorer) des méthodes permettant de calculer sans factoriser grâce à des outils simples de l'algèbre commutative comme la décomposition sans carré (écrire un polynôme comme produit de puissances de polynômes sans racines multiples) et le calcul de résultants. Ce genre de calculs est vite très lourd à la main mais se programme bien, et est disponible dans tous les systèmes de calcul formel que nous connaissons.

Pour les fonctions élémentaires, le problème a été convenablement posé par Liouville en 1833. Il avait compris les principaux mécanismes et énoncé (sans

le démontrer complètement) le résultat central de la théorie. Pour mieux comprendre, revenons un instant aux fractions rationnelles. Pour elles, nous avons vu plus haut qu'on pouvait trouver des fonctions rationnelles $v_0(x), v_1(x), \ldots, v_m(x)$ et des constantes $c_1, \ldots, c_m$ telles que $\int f(x)dx = v_0(x) + \sum_{i=1}^{m} c_i \log(v_i(x))$. Liouville a remarqué que cette propriété s'étendait aux autres fonctions élémentaires : si f appartient à un corps de fonctions élémentaires $C(t_1, \ldots, t_n)$ (où C est un corps de constantes) et si elle admet une primitive qui est elle-même une fonction élémentaire, alors il existe des constantes $c_1, \ldots, c_m$ algébriques sur C et des éléments $v_0, \ldots, v_m$ de $C(t_1, \ldots, t_n)$ tels que :

$$f = v_0' + \sum_{i=1}^{m} c_i \frac{v_i'}{v_i} \quad \text{ou encore} \quad \int f = v_0 + \sum_{i=1}^{m} c_i \log(v_i).$$

L'interprétation de ce résultat est que, s'il existe une primitive, alors elle sera d'une forme particulière, et on sait quel type de fonctions il faudra introduire pour exprimer une primitive. L'algorithme d'intégration consistera à reconnaître cette forme particulière. Notons que cette idée apparaît déjà chez Laplace.

Il a néanmoins fallu attendre Risch en 1969 pour que le résultat soit complètement démontré et conduise à un algorithme complet dont disposent maintenant la plupart des systèmes de calcul formel. Le principe est de procéder récursivement. Soit $f \in \mathbb{C}(t_1, \ldots, t_n)$ une fonction élémentaire. Nous voulons "éliminer" t_n pour nous ramener à des calculs dans $\mathbb{C}(t_1, \ldots, t_{n-1})$. Risch montre que le calcul d'une primitive de f se ramène au calcul de primitives d'éléments de $\mathbb{C}(t_1, \ldots, t_{n-1})$ et à la recherche de solutions dans $\mathbb{C}(t_1, \ldots, t_{n-1})$ d'équations de la forme $y' + Ay = B$ avec $A, B \in \mathbb{C}(t_1, \ldots, t_{n-1})$ (Risch donne un algorithme pour traiter ce dernier problème). De façon récursive, on "élimine" ainsi les t_i pour se ramener finalement à des calculs de primitives de fractions rationnelles. L'algorithme est détaillé sur un exemple classique dans l'encadré 2.

On pourra, pour plus de détails, consulter l'article de M. Bronstein dans le livre *C.A.D.E.* (Éditeur : E. Tournier).

Équations différentielles linéaires

Sachant calculer des primitives, on est naturellement enclin à chercher à "résoudre" des équations différentielles plus sophistiquées. La théorie n'a pas abouti dans le cas général, mais il existe des résultats pour les équations différentielles linéaires.

Posons $C = \overline{\mathbb{Q}}$ la clôture algébrique de $\mathbb{Q}$ (c'est-à-dire le corps de tous les nombres qui sont racines d'un polynôme à coefficients rationnels). Soit $K = C(x)$ muni de la dérivation usuelle $\frac{d}{dx}$). Dans ce qui suit, nous traiterons (pour simplifier la présentation) les équations différentielles linéaires sans second membre à coefficients dans $C[x]$. On considère donc l'équation

$$(L) : a_n(x)y^{(n)} + a_{n-1}(x)y^{(n-1)} + \ldots + a_0(x)y = 0.$$

Pour commencer, il nous faut donner un sens précis au mot "résoudre", c'est-à-dire décrire les classes de fonctions dans lesquelles nous cherchons une solution. Nous disons que (L) admet une *solution rationnelle* si elle admet une solution $y \in K$. Des algorithmes pour calculer de telles solutions existent depuis longtemps. Le premier est dû à Liouville (en 1833, encore). Le principe est de remarquer que, s'il y a une solution rationnelle, les racines de son dénominateur sont des racines de a_n ; on peut alors borner leur multiplicité, ce qui donne un candidat pour le dénominateur $D(x)$. Si maintenant on pose $y = \frac{N(x)}{D(x)}$ (où N est un polynôme inconnu) et que l'on remplace dans (L), on trouve des conditions sur le degré de N et on calcule alors ses coefficients par identification. Par exemple, l'équation $x^2(x-1)y'' + 2xy - 2y = 0$ admet $y = \frac{x}{x-1}$ et $y = \frac{x^2}{x-1}$ comme solutions rationnelles. Des variantes plus rapides ou plus générales ont été données en 1991 par S. Abramov, M. Bronstein ou M.F. Singer.

Ensuite, nous disons que (L) admet une *solution exponentielle* si elle admet une solution y dont la dérivée logarithmique $\frac{y'}{y}$ est rationnelle (c'est-à-dire telle que $y = fe^{\int g}$ avec $f, g \in K$) ; par exemple, l'équation $y'' - (2 + 4x^2)y = 0$ admet la solution $y = e^{x^2}$ qui vérifie $\frac{y'}{y} = 2x$. Là encore, il y a des algorithmes pour calculer de telles solutions, basés sur l'observation suivante. Soit y une solution de L ; posons $u = \frac{y'}{y}$. On a alors $y'' = u'y + uy' = (u' + u^2)y$; en continuant à dériver, on obtient $y^{(i)} = R_i(u, u', \ldots, u^{(i-1)})y$ (où R_i est défini par $R_i = u'R_{i-1} + R_{i-1}'$). Remplaçant dans (L), nous obtenons que u vérifie l'équation (non-linéaire) (R) : $a_nR_n(u, u', \ldots, u^{(n-1)}) + \ldots + a_2(u' + u^2) + a_1u + a_0 = 0$. Cette équation s'appelle *l'équation de Riccati associée à* (L). Par exemple, pour $n = 2$, l'équation de Riccati est $a_2u' = -a_0 - a_1u - a_2u^2$. Trouver les solutions exponentielles de (L) est équivalent à trouver les solutions rationnelles de l'équation de Riccati (R) : si u est une solution rationnelle de (R), alors $e^{\int u}$ est une solution exponentielle de (L). Là encore, des algorithmes existent pour calculer de telles solutions (voir l'encadré 4 pour un exemple).

Considérons maintenant une classe un peu plus générale que les fonctions élémentaires : nous dirons qu'une solution de L est une *solution liouvillienne* si elle appartient à un corps $K(t_1, \ldots, t_n)$ avec

$$\forall i = 1, \ldots, n;\ \exists a_i \in K(t_1, \ldots, t_{i-1}) \quad \text{tel que}$$

$$\begin{cases} t_i \text{ algébrique} & (t_i \text{ est algébrique sur } K(t_1, \ldots, t_{i-1})), \\ \text{ou } t_i' = a_i & (t_i = \int a_i, \text{ extension par une intégrale}), \\ \text{ou } t_i' = a_i t_i & (t_i = e^{\int a_i}, \text{ extension par l'exponentielle d'une intégrale}) \end{cases}$$

Comme nous l'avons fait pour l'intégration, nous allons utiliser un "théorème de structure" (dû à E. Kolchin) puis nous ramener à la recherche de solutions exponentielles. Le résultat de Kolchin est que (L) admet une solution liouvillienne y si et seulement si l'équation de Riccati associée admet une solution u qui est algébrique sur K (c'est-à-dire s'il existe un polynôme P à coefficients dans K tel que $P(u) = 0$). Par exemple, l'équation $2(x+1)y'' - y' - 2(x+1)^2y = 0$ admet les solutions

Encadré 3

Le degré des solutions algébriques d'une équation de Riccati

On considère une équation différentielle

$$(L) : a_n(x)y^{(n)} + a_{n-1}(x)y^{(n-1)} + \ldots + a_0(x)y = 0$$

à coefficients dans $K = \mathbb{C}(x)$. Si on pose $u = \dfrac{y'}{y}$, alors u satisfait l'équation de Riccati (R) décrite dans le texte.

On sait que (L) admet des solutions liouvilliennes si et seulement si il existe un polynôme $P \in K[u]$ irréductible de degré N dont toutes les racines u_i sont des solutions de (R) ; les $e^{\int u_i}$ sont alors des solutions liouvilliennes de (L). Cet encadré décrit informellement comment borner le degré N de P à l'aide d'une théorie "à la Galois".

Pour cela, il nous faut d'abord définir une extension de corps contenant toutes les solutions de (L). On sait que les solutions de (L) forment un $\mathbb{C}$-espace vectoriel V de dimension n. On appelle *extension de Picard-Vessiot* un corps différentiel qui est une extension de K notée EPV, dont le corps des constantes reste $\mathbb{C}$ et qui contient une base de l'espace V des solutions de (L). Si $(y_1, \ldots, y_n)$ est une telle base, alors $EPV = K(y_1, \ldots, y_1^{(n-1)}, \ldots, y_n, \ldots, y_n^{(n-1)})$. L'ensemble des automorphismes σ de EPV qui laissent K invariant (i.e. qui sont tels que $\sigma(a) = a$ pour tout $a \in K$) et qui commutent avec la dérivation forme un groupe G, le *groupe de Galois différentiel* de (L).

Soit maintenant u_1 une racine de P. Comme u_1 est une solution de (R), il existe une solution z_1 de (L) telle que $u_1 = \dfrac{z_1'}{z_1}$, et ainsi $u_1 \in EPV$. Donc, pour tout $\sigma \in G$, on a $P(\sigma(u_1)) = \sigma(P(u_1)) = \sigma(0) = 0$. On admettra que, comme P est irréductible, on obtient ainsi toutes les racines de P : le nombre de racines de P est donc le nombre de valeurs possibles pour $\sigma(u_1)$ (pour σ parcourant G). Considérons donc le sous-groupe H de G qui laisse u_1 fixe (i.e $\forall \sigma \in H, \sigma(u_1) = u_1$). Le nombre de racines de P est alors égal au nombre d'éléments du quotient G/H, c'est-à-dire l'indice $[G : H]$ de H dans G.

Pour caractériser H, remarquons que, comme $u_1 = \dfrac{z_1'}{z_1}$, on a :

$$\forall \sigma \in H, \sigma\left(\frac{z_1'}{z_1}\right) = \frac{z_1'}{z_1} \Leftrightarrow z_1\sigma(z_1)' = \sigma(z_1)z_1'$$
$$\Leftrightarrow \left(\frac{\sigma(z_1)}{z_1}\right)' = 0 \Leftrightarrow \exists c_\sigma \in \mathbb{C}, \sigma(z_1) = c_\sigma z_1.$$

Le groupe H laisse donc invariant le $\mathbb{C}$-espace vectoriel $< z_1 >$ engendré par z_1 (un tel groupe est dit *1-réductible*).

Pour caractériser les sous-groupes 1-réductibles de G, il nous faut un peu plus d'information sur G. L'idée est que tout élément σ de G transforme une solution de L en une autre solution de L ; ceci implique que, pour tout $\sigma \in G$, il existe des constantes $\sigma_{i,j}$ telles que $\sigma(y_i) = \sum \sigma_{i,j} y_j$. Or, si $y = c_1y_1 + \ldots + c_ny_n$, alors $\sigma(y) = c_1\sigma(y_1) + \ldots + c_n\sigma(y_n)$, donc l'action d'un élément du groupe est complètement déterminée par son action sur les éléments de la base. Ainsi, le groupe de Galois s'identifie à un sous-groupe de $GL_n(\mathbb{C})$, le groupe des matrices $n \times n$ inversibles sur $\mathbb{C}$. Plus précisément, on peut montrer que G est un groupe linéaire algébrique : les éléments de ses matrices sont liés par des contraintes polynomiales. Or ces groupes linéaires algébriques ont donné lieu à un grand travail de classification depuis les années 50 (la structure algébrique est compatible avec l'action du groupe). En particulier, on peut établir une liste des sous-groupes 1-réductibles d'indice fini dans $GL_n(\mathbb{C})$ ou au moins borner l'indice des éléments d'une telle liste ; on en déduit alors une borne sur le degré de P.

Par exemple, pour l'équation $y'' - ry = 0$ ($r \in \mathbb{C}(x)$), J. Kovacic a ainsi montré en 1977 que les degrés possibles pour P sont $\{1, 2, 4, 6, 12\}$; l'algorithme de Kovacic consiste donc, pour chaque N de cette liste, à chercher un candidat pour P par la méthode décrite dans le texte et l'encadré 5.

liouvilliennes $e^{\left(\pm\int\sqrt{1+x}\right)}$ qui vérifient $P(\frac{y'}{y}) = 0$ où P est donné par $P(u) = u^2 - x - 1$.

Le calcul d'une solution liouvillienne passe ainsi essentiellement par deux étapes : borner le degré de P, puis calculer ses coefficients. Le degré de P peut s'obtenir à l'aide du *groupe de Galois différentiel* (voir l'encadré 3) de l'équation. Supposons que nous connaissons ce degré N ; il nous reste à calculer les coefficients de P. Supposons que $P = u^N + p_{N-1}u^{N-1} + \ldots + p_0$ et montrons comment calculer p_{N-1}. Si $u_1, \ldots, u_N$ sont les racines de P, alors $p_{N-1} = -(u_1 + \ldots + u_N)$. Comme les u_i sont des solutions de l'équation de Riccati, il existe des solutions z_i de (L) telles que $u_i = \dfrac{z_i'}{z_i}$. On a donc $p_{N-1} = -(\dfrac{z_1'}{z_1} + \ldots + \dfrac{z_N'}{z_N}) = -\dfrac{(z_1z_2\ldots z_N)'}{(z_1z_2\ldots z_N)}$. Or on peut construire une équation différentielle linéaire, notée $L^{\circledS N}$, dont l'espace des solutions est engendré par tous les produits de N solutions de L. On a donc $p_{N-1} = -\dfrac{z'}{z}$ avec $L^{\circledS N}(z) = 0$: le calcul de p_{N-1} est ramené au calcul des solutions exponentielles de $L^{\circledS N}$. Comme nous avons (voir plus haut) un algorithme pour résoudre ce dernier problème, nous savons calculer p_{N-1}. Le calcul des autres coefficients se fait d'une manière similaire (mais plus compliquée en général). Un exemple est traité dans l'encadré 5.

Bien que la détermination du groupe de Galois reste un difficile problème de mathématiques, il existe un algorithme (J. Kovacic en 1986) qui calcule les solutions liouvilliennes à l'ordre 2. L'ordre 3 est résolu (M.F. Singer et F. Ulmer en 1993). Il existe aussi une méthode théorique à tout ordre (M.F. Singer en 1981) mais qui souffre encore d'une borne beaucoup trop lâche sur le degré de P, ce qui empêche pour l'instant une éventuelle implantation. Notons enfin que ces méthodes s'étendent (M.F. Singer en 1991) aux équations différentielles linéaires à coefficients liouvilliens.

Pour une introduction plus fournie (et des preuves de nos assertions), on pourra se reporter à l'article de synthèse de M.F. Singer (ou à celui, plus difficile, de J. Martinet & J.P. Ramis) dans *C.A.D.E* qui contient, de plus, une abondante bibliographie.

En guise de conclusion

Ce qui précède montre une toute petite partie des apports possibles du calcul symbolique à l'étude de systèmes

Encadré 4

Solutions exponentielles d'équations différentielles linéaires

Reprenons la question posée en tête d'article : considérons l'équation différentielle linéaire (L) : $16x^2y'' + 7y = 0$. On cherche à savoir si elle a des solutions liouvilliennes. On pose donc $u = y'/y$; alors u vérifie l'équation de Riccati (R) : $u' = \dfrac{-7}{16x^2} - u^2$. Nous allons montrer que (R) admet une solution rationnelle u, et donc que L a une solution exponentielle.

Si on décompose u en éléments simples (inconnus) et qu'on remplace dans l'équation, une simple comparaison des degrés les plus élevés en chaque terme va montrer que la partie entière est nulle et que tous les pôles sont simples. Supposons que a soit un pôle de multiplicité b. On a alors $u = \dfrac{\alpha}{(x-a)^b} + \cdots$; étudions les termes de plus haut degré en $\dfrac{1}{x-a}$ (pour $a \neq 0$) dans (R) :

$$u' = \frac{-\alpha b}{(x-a)^{b+1}} + \cdots = \frac{-7}{16x^2} - u^2 = \frac{-\alpha^2}{(x-a)^{2b}} + \cdots$$

En comparant les degrés des termes en $\dfrac{1}{x-a}$ on obtient $b+1 = 2b$ d'où $b = 1$ (et $\alpha = 1$). En poursuivant le raisonnement, on se convainc facilement que $a = 0$ est le seul pôle possible et qu'il est de degré 1. Si nous posons $u = \dfrac{\alpha}{x}$, alors α doit vérifier $16\alpha^2 - 16\alpha + 7 = 0$. On en déduit que (R) admet les deux solutions rationnelles $u_1 = \dfrac{2 \pm i\sqrt{3}}{4x}$. L'espace vectoriel des solutions de (L) est donc engendré par les deux fonctions $\exp(\displaystyle\int \frac{2 \pm i\sqrt{3}}{4x}\,\mathrm{d}x)$. On peut même en déduire une base de solutions élémentaires :

$$y_1(x) = \sqrt{x}\cos(\frac{\sqrt{3}}{4}\log x) \text{ et } y_2(x) = \sqrt{x}\sin(\frac{\sqrt{3}}{4}\log x).$$

L'algorithme de recherche de solutions rationnelles de (R) est plus compliqué en général et requiert un ordinateur pour être mis en œuvre.

Encadré 5

Solutions liouvilliennes d'équations différentielles linéaires

Considérons l'équation (L) : $y'' - ry = 0$ avec $r = \dfrac{3}{16x^2} + \dfrac{n^2-1}{4n^2(x-1)^2} - \dfrac{n^2-1}{4n^2x(x-1)}$ (où $n > 1$ est un entier). On peut montrer que l'équation de Ricatti $u' = r - u^2$ n'a pas de solution rationnelle. Supposons qu'elle ait une solution algébrique de degré 2, donc qu'il existe $P = u^2 + p_1u + p_0$ dont les racines soient des solutions de l'équation de Riccati.

Pour appliquer la méthode décrite dans le texte, posons $z = y^2$. On a alors $z' = 2yy'$, $z'' = 2yy'' + 2(y')^2 = 2ry^2 + 2(y')^2 = 2rz + 2(y')^2$, et $z''' = 2rz' + 2r'z + 4y'y'' = 2rz' + 2r'z + 4ryy' = 4rz' + 2r'z$. On a donc $L^{\circledS 2}(z) = z''' - 4rz' - 2r'z$. Or, l'algorithme de calcul de solutions exponentielles nous donne que $L^{\circledS 2}(z) = 0$ admet $z = (x-1)\sqrt{x}$ pour solution. On peut en déduire que $p_1 = -\dfrac{z'}{z} = -\dfrac{3x-1}{x(x-1)}$. On peut aussi calculer p_0 et en déduire que

$$P = u^2 - \frac{(3x-1)u}{2x(x-1)} + \frac{9n^2x^2 - 4x - 6n^2x + n^2}{16n^2x^2(x-1)^2}$$

Si on veut vraiment expliciter les solutions de (L), alors on applique les techniques d'intégration en forme finie et on obtient $y = e^{\int u} = \sqrt{x-1}\sqrt[4]{x}e^{\pm\frac{\operatorname{arctanh}(\sqrt{x})}{n}}$.

Pour les érudits, il s'agit de la première équation hypergéométrique de Schwartz. Son groupe de Galois différentiel $G \subset SL_2(\mathbb{C})$ est fini d'ordre $4n$ et est une extension centrale du groupe diédral D_n (i.e. $D_n = G/\{1,-1\}$).

différentiels. Pour compléter, on pourrait citer par exemple le calcul de développements en séries formelles, la recherche de solutions analytiques (resommation, méthodes de jets...), la recherche de formes normales de systèmes différentiels (par exemple, celles de Poincaré-Dulac) ou de matrices (Jordan, Frobénius...), les séries de Lie, les groupes de symétries, etc.

Nous avons introduit les *polynômes différentiels ordinaires* mais on peut considérer en suivant une démarche analogue des *polynômes aux dérivées partielles*. La théorie sous-jacente est *l'algèbre différentielle*. Elle consiste à étudier les systèmes de polynômes différentiels (ou les polynômes aux dérivées partielles) du point de vue algébrique. Ainsi on peut, d'une manière un peu similaire à ce qu'on fait avec de "vrais" polynômes, transformer les systèmes d'équations différentielles de manière à tirer des informations sur la structure de leurs solutions. La théorie est moins complète que pour les polynômes car elle recèle de terribles problèmes de complexité ou d'indécidabilité; elle a néanmoins apporté des résultats intéressants, notamment en automatique.

Nous espérons avoir convaincu le lecteur que passer par une étape où l'on manipule des objets en apparence plus abstraits que les objets originaux peut permettre de ramener à du calcul symbolique des questions qui pouvaient en paraître éloignées. Le traitement des équations différentielles linéaires est à cet égard exemplaire : une analyse fine du problème nous a d'abord fait remonter jusqu'à des mathématiques très abstraites (groupe de Galois différentiel); par un choix de représentation (plongement dans un groupe de matrices), nous sommes revenus au constructif; puis, en utilisant la théorie des groupes linéaires algébriques, nous avons obtenu un résultat effectif (une borne sur le degré du polynôme cherché), pour aboutir à un algorithme où tout ce travail théorique est transparent.

Le traitement formel procède donc d'un aller-retour entre une algébrisation (trouver un concept mathématique qui mesure les grandeurs recherchées), et une reformulation (choix d'une représentation pertinente pour le traitement envisagé). Néanmoins (bien que nous l'ayons peu montré ici), les méthodes formelles ne sont pleinement efficaces que quand, dans la phase d'abstraction, on n'oublie pas l'analyse ou la géométrie sous-jacentes au problème traité. Dans le cas (encore) des équations différentielles linéaires, l'approche décrite plus haut se complète par une analyse des singularités, de la monodromie, etc. Derrière le vocable froid de "calcul formel", ce sont donc toutes ces branches des mathématiques qui sont mises en œuvre.

Nous remercions M. Giusti, O. Piltant, M.F. Singer et F. Ulmer des judicieuses remarques dont ils nous ont fait part à la lecture d'une première version de cet article.

Les auteurs sont membres du GDR MÉDICIS.

Pour en savoir plus

Cox (D.), Little (J.), O'Shea (D.), *Ideals, Varieties, and Algorithms*, Undergraduate Texts in Math., Springer, 1992.

Tournier (E.) (éditeur), *C.A.D.E (Computer Algebra and Differential Equations)*, Academic Press, 1989.