# Identifiabilité des systèmes*

François Ollivier (CNRS)
GAGE, Centre de Mathématiques
École polytechnique, 91128 Palaiseau CEDEX, France
`ollivier@gage.polytechnique.fr`
`http://medicis.polytechnique.fr/gage/ollivier.html`

Le 9 mai 1997

**Résumé**

On donne un aperçu de quelques méthodes algébriques et géométriques permettant de tester l'identifiabilité des systèmes. Celles-ci reposent principalement sur l'algèbre différentielle de RITT, mais aussi sur la théorie des difiétés de VINOGRADOV, qui traduit le mieux l'accessibilité forte. Cette notion permet en effet de simplifier les tests.

On indiquera quelques pistes dans le cas de systèmes non accessibles, en particulier sans commandes. On s'attachera aussi à souligner le caractère générique de la commandabilité, et sa conséquence paradoxale : plus un système est complexe, plus il est probable qu'il soit identifiable, mais plus il est en général difficile de le prouver.

## 1 Introduction

Tester l'identifiabilité d'un système est une étape importante dans la validation théorique d'un modèle. L'algèbre différentielle donne une expression particulièrement simple de l'identifiabilité en terme de dépendence algébrique, qui débouche sur une méthode de test effectif, due à GLAD et LJUNG. De plus, les calculs peuvent être fortement allégés, quand il existe des solutions génériques. L'accessibilité forte est une condition suffisante d'existence pour laquelle on dispose de critères commodes. Dans le cas de systèmes non accessibles, on donnera quelques méthodes supplémentaires, soit calculatoires soit reposant sur des arguments de transcendance ou de géométrie.

On peut aussi aborder le problème en le linéarisant, ce qui est un moyen assez efficace de calcul, qui revient à considérer d'un point de vue conceptuel les symétries de Lie du système, c'est-à-dire ses déformations infinitésimales. La théorie des difiétés est un outil particulièrement adapté pour formaliser cette approche.

Ces méthodes ont l'intérêt de s'appliquer à tout système différentiel non-linéaire algébrique, ou faisant intervenir des fonctions transcendantes usuelles : sin, exp, Log etc.

Les critiques et suggestions de Daniel CLAUDE on beaucoup contribué à enrichir la présentation et le contenu de cet article. Qu'il en soit ici remercié.

*Avec le soutien de l'Action Incitative Modélisation et Contrôle du GDR Automatique, et du GDR MEDICIS du CNRS.

# 2 Identifiabilité et algèbre différentielle

## 2.1 Rudiments d'algèbre différentielle

*L'ouvrage fondateur de* RITT [1] *reste une excellente référence pour qui débute l'algèbre différentielle, et une source d'inspiration pour les initiés.*

L'algèbre différentielle est une extension de l'algèbre commutative usuelle. On complète la structure d'anneau par une dérivation, c'est-à-dire une application $\delta$ satisfaisant les axiomes suivants : $\delta(a+b) = \delta(a)+\delta(b)$ et $\delta(ab) = \delta(a)b+a\delta(b)$, qui reproduisent les propriétés usuelles de la dérivation dans le cadre analytique. On peut aussi considérer un ensemble fini de dérivations commutant entre elles. Par exemple, si l'on se donne un corps $k$, l'anneau $k[t]$ des polynômes en une variable $t$ à coefficient dans $k$ est un anneau différentiel, une fois muni de la dérivation habituelle $d/dt$. Nous considérerons ici le corps différentiel $k := \mathbf{R}(t)$.

Si l'on se donne un certain nombre d'indéterminées différentielles $x_1, \ldots, x_n$, on construit l'anneau des polynômes différentiels $k\{x_1, \ldots, x_n\}$, qui n'est autre que l'anneau des polynômes en les dérivées formelles des $x_i$ : $x_i, x_i', x_i'', \ldots, x_i^{(j)}, \ldots$ muni de l'unique dérivation $\delta$ telle que $\delta(c) = dc/dt$ si $c \in k$, et telle que $\delta(x_i^{(j)}) = x_i^{(j+1)}$. Par exemple, $P := x_1'x_2 + t(x_3')^2$ est un polynôme différentiel de $k\{x_1, x_2, x_3\}$ et $P' = x_1''x_2 + x_1'x_2' + (x_3')^2 + 2tx_3'x_3''$.

Beaucoup de systèmes rencontrés en pratique sont de ce type, en particulier les systèmes d'équations d'état de la forme : $x_i' = f_i(x_1, \ldots, x_n, u_1, \ldots, u_m)$ où les fonctions $f_i$ sont des polynômes ou des fractions rationnelles. Un tel système est un *ensemble caractéristique* de l'idéal différentiel premier qu'il engendre. Sans pénétrer dans les détails de la combinatoire qui permet de définir cette notion, cela signifie que l'on peut, à partir d'un tel ensemble et de conditions initiales $x_i(0)$, calculer en connaissant un développement en série des commandes $u_j$, un unique développement en série de la solution. Le quotient $k\{x_1, \ldots, x_n, u_1, \ldots, u_m\}/I$ de l'anneau des polynômes différentiels par l'idéal premier associé à ce système d'équations est un anneau intègre. On peut donc lui associer un corps de fractions, naturellement muni d'une structure différentielle. La donnée d'un système revient donc abstraitement à définir une extension de corps différentiel $K/k$. Les fonctions de commande $u_j$ constituent une base de transcendance différentielle de cette extension, c'est à dire une famille maximale, dont toutes les dérivées sont algébriquement indépendantes. Leur nombre $m$ est la dimension de la variété algébrique différentielle associée à l'idéal.

On considérera des modèles définis de la manière suivante :

$$\begin{aligned} x_i' &= f_i(x, u, \theta, t), \\ y_j &= g_j(x, u, \theta, t), \\ \theta_\ell' &= h_\ell(\theta), \end{aligned}$$

où les fonctions $f_i, g_j$ et $h_\ell$ sont algébriques. On rappelle que le temps $t$ est supposé appartenir au corps de base $k$ et qu'il y satisfait $t' = 1$. On désigne par $\theta$ un vecteur de paramètres. Ceux-ci sont en général des constantes, ce qui revient à poser $h_\ell = 0$, mais pourraient aussi être définies par des équations non triviales. Par exemple, si le système fait intervenir un synchronisateur de la forme $A\sin(\omega t + \phi)$, on peut le modéliser algébriquement en posant $\theta_1 = A\sin(\omega t + \phi)$, $\theta_2 = A\cos(\omega t + \phi)$ et $\theta_3 = \omega$. Auquel cas, $h_1 = \theta_3\theta_2$, $h_2 = -\theta_3\theta_1$ et $h_3 = 0$.

Les fonctions $g_j$ définissent les sorties du systèmes. Le comportement entrée-sortie est décrit par le sous-corps de $K$ engendré par les entrées $u$ et les sorties $y_j$, et qu'on note $k\langle u, y\rangle$. Un calcul d'élimination permet de décrire cette extension par un ensemble caractéristique, correspondant à un système d'équations d'état algébriques généralisé, implicitement définies par le système :

$$
\begin{gathered}
P_1(y_1, \ldots, y_1^{(r_1)}, u, \ldots, u^{(s_1)}) = 0, \\
P_2(y_2, \ldots, y_2^{(r_2)}, y_1, \ldots, y_1^{(r_1)}, u, \ldots, u^{(s_2)}) = 0, \\
\vdots \\
P_q(y_q, \ldots, y_q^{(r_q)}, \ldots, y_2, \ldots, y_2^{(r_2)}, y_1, \ldots, y_1^{(r_1)}, u, \ldots, u^{(s_q)}) = 0.
\end{gathered}
$$

Pour plus de détails sur les calculs d'élimination, on se reportera à BOULIER [1], BOULIER *et al.* [1] et OLLIVIER [2].

## 2.2 Définition analytique de l'identifiabilité

La notion d'identifiabilité correspond à l'idée intuitive suivante : étant fixée une commande $u$ supposée générique, les conditions initiales et le vecteur de paramètres étant également supposés génériques, la connaissance de la sortie permet-elle de déterminer $\theta$ de manière unique, ou localement unique?

On suppose ici que les paramètres $\theta_\ell$ sont des constantes. Dans un cadre analytique, il est aisé de se ramener à ce cas. En outre, on suppose que le système admet pour toute commande $u$ et toute condition initiale $x_0$ une solution $x$ définie sur tout $\mathbf{R}^+$. On peut en cas de besoin restreindre les domaines admissibles pour les commandes, les conditions initiales ou les valeurs des paramètres à des ouverts prédéfinis.

On considère que les fonctions de commande $u_i$ sont $\mathcal{C}^\infty$. On adopte la topologie telle que la suite $f_i$ de fonctions tend vers $f$ si pour tout ordre de dérivation $r$ et tout compact $\mathcal{K}$, $f_i^{(r)}$ tend uniformément vers $f^{(r)}$ sur $\mathcal{K}$.

On note $C_u$ l'application qui, étant fixé un vecteur de fonctions de commandes $u$, associe à tout vecteur de paramètres $\theta$ et à tout vecteur de conditions initiales le vecteur de fonctions $x(t) = C_u(\theta, x_0)$ solution.

DÉFINITION 1. — *On dit qu'un paramètre $\theta_i$ d'un système $S$ est localement identifiable si pour tout compact $\mathcal{K} \subset \mathbf{R}^+$, il existe un ouvert dense $U$ de $\mathcal{C}^\infty(\mathbf{R}^+, \mathbf{R}^m)$, un ouvert dense $V$ de $\mathbf{R}^n$ et un ouvert dense $W$ de $\mathbf{R}^p$ tel que pour tout $\theta \in W$ il existe un voisinage $\mathcal{O}$ de $\theta$ et une application $\phi$ de $\mathcal{C}^\infty(\mathbf{R}^+, \mathbf{R}^n)$ dans $\mathbf{R}^p$ tels que pour tout $u \in U$ tout $x_0 \in V$ et tout $\theta \in \mathcal{O}$, $\theta_i = \phi \circ C_u(\theta, x_0)$.*

*Si l'on peut prendre pour $\mathcal{O}$ l'ouvert dense $W$, $\theta_i$ est globalement identifiable. On dit qu'un système est localement (resp. globalement) identifiable si tous ses paramètres sont localement (resp. globalement) identifiables.*

Cette définition analytique de l'identifiabilité diffère de celle de WALTER [1], bien qu'elles soient équivalentes. Notre définition implique immédiatement celle de WALTER. La réciproque, en revanche, n'est pas immédiate, ce qui justifie notre choix.

Par commodité, on a imposé que les commandes soient $\mathcal{C}^\infty$. Le théorème de WEIERSTRASS-STONE ramène aisément au cas $\mathcal{C}^0$, voire $\mathcal{C}^0$ par morceaux, en montrant que si un système n'est pas identifiable, l'utilisation de telles commandes ne permet pas davantage la détermination des paramètres.

## 2.3 Caractérisation algébrique de l'identifiabilité

Dans Glad et Ljung [1] la caractérisation suivante de l'identifiabilité a été proposée.

THÉORÈME 2. — *Un système est localement identifiable ssi tout paramètre $\theta_i$ est algébrique sur le corps $k\langle u, y\rangle$.*

Cette dépendance peut elle aussi être explicitée par un calcul d'élimination, en calculant un nouvel ensemble caractéristique pour le corps $k\langle\theta, u, y\rangle$. En plus des équations $P_i(y_1, \ldots, y_i, u) = 0$ décrites ci-dessus, on obtient des équations de la forme $Q_\ell(\theta_1, \ldots, \theta_\ell, y, u) = 0$. Si l'un des $Q_\ell$ est égal à un multiple de $\theta'_\ell - h_\ell(\theta)$, alors le système n'est pas localement identifiable. Sinon, il l'est et tous les $Q_\ell$ sont d'ordre nul en les paramètres $\theta$, donnant ainsi explicitement les relations de dépendance algébrique.

La définition de l'identifiabilité fait intervenir des ouverts. En effet, pour certaines valeurs de $u$, $y$ et $\theta$, $S_\ell := \partial Q_\ell / \partial \theta_\ell$ est nul.

PREUVE. — Si tous les $S_\ell$ sont non nuls, ce qui est vrai sur un ouvert dense, les relations de dépendance algébrique impliquent l'unicité locale de $\theta_\ell$. En revanche, si l'un des $\theta_\ell$ est d'ordre 1 en $\theta_\ell$, il existe une variété de dimension positive de solutions, donc tout voisinage ouvert d'une solution contient une inifinité de solutions, contredisant l'existence de $\phi$. Ce qui prouve le théorème. ■

L'inconvénient de cette technique est la lourdeur des calculs. En effet, si l'état est de dimension $n$ et si l'on a $p$ paramètres, alors les relations de dépendance s'expriment à partir des équations d'état d'origine et de leurs dérivées jusqu'à l'ordre au plus $n + p - 1$. Cette borne est optimale. S'il y a $q$ sorties, il faut dériver *au minimum* $\lceil p/q \rceil$ fois, et *génériquement* $\lceil (n+p)/q \rceil - 1$ fois. On verra ci-dessous comment alléger les calculs, sous certaines hypothèses.

Notons qu'on peut déjà considérablement accélérer les calculs en changeant la présentation des équations, grâce à l'introduction de nouvelles variables $X_1, \ldots, X_n$ et $\Theta_1, \ldots, \Theta_p$, pour adopter le système suivant :

$$\begin{array}{ll} X'_i & = f_i(X, u, \Theta, t), \\ g_j(X, u, \Theta, t) & = g_j(x, u, \theta, t), \\ \Theta'_\ell & = h_\ell(\Theta), \end{array}$$

dans l'anneau $K\{X, \Theta\}$. Le système est identifiable ssi, modulo ce système, tous les $\Theta_i$ sont algébriques sur $K$.

L'accélération des calculs, expérimentalement constatée tient au fait que les relations de dépendance algébrique sont sous cette forme de tailles plus réduites, car elles n'expriment plus explicitement les $\Theta_\ell$ en fonction des entrées et des sorties. E.g., pour un système globalement identifiable, elles peuvent être de la forme $\Theta_\ell = \theta_\ell$. (Voir OLLIVIER [2] ch. II § 4 et ch. IV § 2 no 4.)

# 3 Identifiabilité et diffiétés

## 3.1 Diffiétés

Une diffiété est une variété $\mathcal{C}^\infty$, de dimension finie ou dénombrable et munie d'une dérivation. Par exemple, on associe à un système

$$x'_i = f_i(x_1, \ldots, x_n, u_1, \ldots, u_m, t),$$

la diffiété $\mathbf{R}^n \times (\mathbf{R}^{\mathbf{N}})^m \times \mathbf{R}$, où $\mathbf{R}^n$ représente les fonctions d'état, $(\mathbf{R}^{\mathbf{N}})^m$ représente les dérivations d'ordre $r \in \mathbf{N}$ des $m$ commandes, et le dernier terme le temps. Elle est munie de la dérivation dite *de Cartan*

$$d/dt = \sum_{i=1}^{n} f_i(x_1, \ldots, x_n, u_1, \ldots, u_m, t)\partial/\partial x_i + \sum_{j=1}^{m}\sum_{\ell \geq 0} u_j^{(\ell+1)}\partial/\partial u_j^{(\ell)} + \partial/\partial t,$$

qui correspond canoniquement au système ci-dessus. On ne s'autorise que des fonctions d'un nombre *fini* de variables, et on munit la variété de la topologie de Fréchet, topologie la plus grossière qui rende les projections sur une coordonnée continues. Les fonctions $f_i$ peuvent n'être définies que sur un ouvert. Dans ce cadre, les $f_i$ ne sont plus supposées algébriques. Mais à tout système algébrique différentiel, on peut associer une diffiété, en applicant le théorème d'inversion locale sur un ouvert convenable. Pour plus de détails sur cette notion voir KRASIL'SHCHIK, LYCHAGYN et VINOGRADOV [1]. En ce qui concerne son utilisation en automatique, voir FLIESS, LÉVINE, MARTIN et ROUCHON [1].

## 3.2 Symétries de Lie

On définit pour toute diffiété l'espace $S_0$ de ses symétries de Lie laissant le temps invariant, qui sont les dérivations commutant avec la dérivation de Cartan $d/dt$. Soit

$$\delta = \sum_{i=1}^{n} A_i\partial/\partial x_i + \sum_{1\leq j\leq m, \ell\geq 0} B_{j,\ell}\partial/\partial u_j^{(\ell)},$$

une dérivation. Un calcul simple montre que c'est une symétrie si et seulement si elle est telle que

$$\begin{aligned} dA_i/dt &= \textstyle\sum_{1\leq j\leq n,} \partial f_i/\partial x_j A_j + \sum_{1\leq j\leq m} \partial f_i/\partial u_j B_{j,0},\\ dB_{j,\ell}/dt &= B_{j,\ell+1}. \end{aligned}$$

On remarque que ces équations sont précisément celles du linéarisé tangent. Elles étendent la dérivation temporelle à l'espace tangent et s'obtiennent en appliquant l'opérateur « d » de Kähler aux équations d'état :

$$\begin{aligned} d\mathrm{d}x_i/dt &= \textstyle\sum_{1\leq j\leq n,} \partial f_i/\partial x_j \mathrm{d}x_j + \sum_{1\leq j\leq m} \partial f_i/\partial u_j \mathrm{d}u_j,\\ d\mathrm{d}u_j^{(\ell)}/dt &= \mathrm{d}u_j^{(\ell+1)}. \end{aligned}$$

Les symétries de Lie correspondent aux déformations infinitésimales des trajectoires solutions. Dans le cas où la diffiété est de dimension finie, l'exponentielle d'une symétrie engendre un groupe à un paramètre de transformations de Lie-Bäcklund, c'est-à-dire d'automorphismes de la diffiété. En dimension infinie, la situation est plus complexe, car la plupart des symétries n'admettent pas d'exponentielle. En revanche, si $g_s$ est un groupe à un paramètre de transformations de Lie-Bäcklund, $\partial g_s(\cdot)/\partial s_{|s=0}$ est une symétrie de Lie.

## 3.3 Symétries et identifiabilité

Si un système est identifiable, toute symétrie $\delta$ telle que $\delta u_i = 0$ et $\delta y_j = 0$ pour toute commande et toute sortie est telle que $\delta\theta_\ell = 0$ pour tout paramètre. La réciproque est généralement fausse, du moins si l'on se restreint classiquement à considérer des symétries dont les coefficients dépendent des fonctions de coordonnées de la diffiété d'origine.

Toutefois, si l'on considère un système paramétré comme celui du 2.1, et son linéarisé tangent exprimé par le système $\mathrm{d}S$ :

$$\begin{aligned}
\mathrm{d}x'_i &= \textstyle\sum_j \partial f_i/\partial x_j \mathrm{d}x_j + \sum_j \partial f_i/\partial u_i \mathrm{d}u_i + \sum_j \partial f_i/\partial \theta_j \mathrm{d}\theta_j,\\
\mathrm{d}y_i &= \textstyle\sum_j \partial g_i/\partial x_j \mathrm{d}x_j + \sum_j \partial g_i/\partial u_j \mathrm{d}u_j + \sum_j \partial g_i/\partial \theta_i \mathrm{d}\theta_i,\\
\mathrm{d}\theta'_i &= \textstyle\sum_j \partial h_i/\partial \theta_i \mathrm{d}\theta_j,
\end{aligned}$$

on obtient la condition nécessaire et suffisante suivante.

THÉORÈME 3. — *Un système $S$ est localement identifiable ssi le système $\mathrm{d}S$ et les équations $\mathrm{d}u = 0$ et $\mathrm{d}y = 0$ impliquent $\mathrm{d}\theta_i = 0$ pour tout paramètre $\theta_i$.* ∎

Cette approche permet de simplifier grandement les calculs dans la mesure où elle ramène à un système linéaire, de ce fait plus facile à résoudre. Cependant, l'ordre de dérivation nécessaire est identique à celui de la méthode de GLAD et LJUNG. Une autre difficulté est de calculer avec les dérivées partielles des $f_i$. En pratique, celle-ci sont des fonctions analytiques définies par des systèmes différentiels et des conditions initiales, pour lesquelles on peut utiliser les méthodes de A. PÉLADAN [1] et [2]. Remarquons que ces mêmes méthodes permettent de faire intervenir dans le système des relations algébriques dépendant des paramètres entre les conditions initiales, comme cela est esquissé dans OLLIVIER [3].

# 4 Identifiabilité des systèmes algébriques fortement accessibles

## 4.1 Un critère d'accessibilité forte

Un système est dit *fortement accessible* si pour presque toute valeur des conditions initiales, il existe une boule ouverte $B$ de rayon $\varepsilon > 0$ dans l'espace $\mathbf{R}^n \times \mathbf{R}^+$ telle que pour tout $(x_1, \ldots, x_n, t) \in B$ il existe une commande $u$ permettant d'atteindre le point $x = (x_1, \ldots, x_n)$ au temps $t$.

L'accessibilité forte est une propriété plus faible que la commandabilité, qui consiste à pouvoir atteindre tout point générique à partir de tout point initial générique en un temps fini. Ici, on ne peut choisir ni le centre de la boule ni son rayon.

THÉORÈME 4. — *Soit $S$ un système, les trois propositions suivantes sont équivalentes :*
*(i) $S$ est fortement accessible ;*
*(ii) pour toute fonction $F(x_1, \ldots, x_n, t)$, $dF/dt = 0$ implique $\partial F/\partial x_i = 0$ ;*
*(iii) l'algèbre de Lie engendrée par $d/dt$ et les dérivations partielles $\partial/\partial u_j^{(\ell)}$ contient $\partial/\partial x_i$ ;*
*(iv) le linéarisé tangent est un $k[d/dt]$-module sans torsion.*

PREUVE. — *(i) implique (ii).* Si l'on peut trouver une solution non triviale à l'équation $dF/dt = 0$, il est impossible de sortir de l'hypersurface $F(x, t) = F(x(0), 0)$. Le système n'est donc pas fortement accessible.

*(ii) implique (iii).* Cette algèbre de Lie contient toutes les équations que doit satisfaire $F$. Si elle ne contient pas $\partial/\partial x_i$ pour tout $i$, alors il existe des solutions $F$ non triviales.

*(iii) implique (iv).* On remarque tout d'abord que si $\partial/\partial x_i$ appartient à l'algèbre de Lie engendrée par $d/dt$ et les dérivations partielles $\partial/\partial u_j^{(\ell)}$, alors il appartient en fait à l'algèbre engendrée par $\partial/\partial u_j$, $[\partial/\partial u_j, d/dt]$, $[[\partial/\partial u_j, d/dt], d/dt]$, … car $d/dt$ est le seul terme à faire intervenir $\partial/\partial t$ qui n'apparaît pas dans l'expression de $\partial/\partial x_i$.

S'il existe un élément de torsion $\eta$ dans ce module, alors $\eta$ ne peut dépendre ni des $\mathrm{d}u_j$ ni de leurs dérivées temporelles. Cela signifie que $\eta$ est solution du système $\partial\eta/\partial \mathrm{d}u_j = 0$, $[\partial/\partial \mathrm{d}u_j, d/dt]\eta = 0$, $[[\partial/\partial \mathrm{d}u_j, d/dt], d/dt]\eta = 0$, ... Or, on remarque que si $P(d/dt, \partial/\partial u) = \sum A_i \partial/\partial x_i$, où $P$ est un polynôme de Lie, alors $P(d/dt, \partial/\partial \mathrm{d}u_1, \ldots, \partial/\partial \mathrm{d}u_m) = \sum A_i \partial/\partial \mathrm{d}x_i)$. La proposition (iii) implique donc qu'il ne peut exister d'élément de torsion non nul.

*(iv) implique (i).* Si le linéarisé est sans torsion, l'algèbre des symétries est paramétrable et donc particulièrement riche. On utilise ce fait pour remplir une boule ouverte en déformant une trajectoire générique de référence $x(t)$. L'idée de base est de fabriquer des symétries $\delta$, nulles pour $t = 0$ de manière à préserver les conditions initiales, et telles que la restriction de $\delta(x(t_1), u(t_1), t_1)$ à l'espace d'état soit égale à un vecteur arbitraire. Malheureusement, une telle symétrie ne donne pas en général un champ intégrable. Il existe même des systèmes commandables n'ayant aucune symétrie non nulle intégrable. Le problème se résoud en imposant aux commandes d'être des fonctions polynômes d'un degré suffisant. On perd ainsi la possibilité de paramétrer les symétries, mais en contrepartie celles-ci sont toujours intégrables et si le degré est assez grand on peut encore fixer la valeur de $\delta(x(t_1), u(t_1), t_1)(x_i)$ pour toute fonction d'état. ∎

Contrairement à l'identifiabilité et à l'observabilité, l'accessibilité forte ne peut pas être caractérisée comme une propriété de l'extension de corps $K/k$ décrivant le système, car en général les fonctions $F$ ne sont pas algébriques.

On trouvera d'autres développement sur ce sujet dans FLIESS, LÉVINE, MARTIN, OLLIVIER et ROUCHON [1].

## 4.2 Identifiabilité des systèmes génériques

On caractérise ici l'identifiabilité de systèmes algébriques sans expliciter les relations de dépendance algébrique des paramètres par rapport à l'entrée et à la sortie. Il nous faut pour cela une hypothèse de généricité : on impose au système d'admettre des solutions *génériques*, c'est-à-dire des solutions qui ne satisfassent aucune équation qui ne soit pas dans l'idéal de départ. Abstraitement, on démontre que tout idéal premier admet sur un corps convenable une solution générique. Mais nous travaillons ici dans un cadre où les solutions doivent être des fonctions réelles.

Considérons tout d'abord le cas où les paramètres sont des constantes. La généricité impose que toute constante (solution de l'équation $c' = 0$) soit un réel, donc appartienne au corps de base. Il faut pour cela que le corps des constantes de l'extension $k\langle x\rangle/k$ associée au système soit une extension *algébrique* du corps des paramètres $k\langle\theta\rangle$. Ainsi, la constante sera bien un réel, après spécialisation, c'est-à-dire après avoir affecté aux paramètres $\theta_\ell$ des valeurs réelles. Cette propriété est difficile à tester, mais d'après ce qui a été vu ci-dessus, l'accessibilité forte implique l'existence de solutions génériques. En revanche, le système $x_1' = u, x_2' = x_2 u$ admet des solutions génériques (toute solution telle que $x_2$ soit non nulle), bien qu'il ne soit pas fortement accessible car $d/dt(x_2 e^{-x_1}) = 0$.

Le rôle des constantes dans une extension de corps est l'une des clefs de la théorie de Galois différentielle et de l'intégration formelle (*c.f.* J.A. WEIL [1]).

Le cas de paramètres non constants nécessite plus de préliminaires, mais l'intérêt de pouvoir modéliser des synchronisateurs justifie cet effort. Posons $K := k\langle\theta, x\rangle$ et soit $I$ l'idéal premier associé à l'extension $K/k\langle\theta\rangle$ Soit $K_2 := K\langle\vartheta_{i,j}\rangle$ $i = 1, \ldots, p$, $j = 1, \ldots, r$ une extension de corps différentiel telle que $\vartheta_{i,j}' = h_j(\vartheta_{i,1}, \ldots, \vartheta_{i,r})$. On dira que $x$ est générique par rapport au système d'équations des paramètres $\vartheta_j' = h_j(\vartheta)$ si pour toute extension $K_2$ satisfaisant l'hypothèse, le noyau du morphisme

$$\begin{array}{rcl}\phi : k\langle\theta,\vartheta\rangle\{X\} & \mapsto & K_2\\ X_i & \mapsto & x_i\end{array}$$

est égal à $k\langle\vartheta\rangle I$.

Ce qui signifie que l'adjonction de nouvelles solutions du systèmes définissant les paramètres ne permet jamais d'abaisser l'ordre du système qui définit la solution $x$ du système paramétré.

PROPOSITION 5. — *Tout système fortement accessible admet des solutions génériques.* ∎

Voici comment utiliser cette notion. Partant d'un système

$$\begin{aligned} x_i' &= f_i(x,u,\theta,t),\\ y_j &= g_j(x,u,\theta,t),\\ \theta_\ell' &= h_\ell(\theta).\end{aligned}$$

On élimine seulement l'état pour obtenir un ensemble caractéristique de la forme

$$\begin{aligned} P_j(y,u,\theta,t) &= 0,\\ \theta_\ell' &= h_\ell(\theta),\end{aligned}$$

où l'ordre de $P_j$ en $y_j$ est $r_j$ et l'ordre de $P_j$ en $y_i$, est strictement inférieur à $r_i$ pour $i \neq j$. On considère les polynômes $P_j$ comme des polynômes en $t$ et les dérivées des $y$ et des $u$, dont les coefficients sont des polynômes $c_{j,\alpha}(\theta_\ell)$.

THÉORÈME 6. — *Si le système $S$ admet des solutions génériques, alors il est identifiable ssi pour tout $\ell$, $\theta_\ell$ appartient au corps $k\langle c_{j,\alpha}/c_{j,0}\rangle$.*

Cela signifie que les coefficients présents dans les équations engendrent toutes les fonctions identifiables des paramètres.

PREUVE. — Pour prouver le théorème, on remarque d'abord que si $x$ est générique, $y$ l'est aussi. Supposons que les paramètres $c_{j,\alpha}/c_{j,0}$ ne soient pas identifiables. Alors, on peut trouver deux vecteurs différents de paramètres $\theta_1$ et $\theta_2$ pour une même solution $y$. Il existe alors un indice $j$ maximal tel que $P_j(y,u,\theta_1,t)/c_{j,0}(\theta_1)$ et $P_j(y,u,\theta_2,t)/c_{j,0}(\theta_2)$ soient différents. Un calcul d'élimination fournit alors un polynôme $R(y,u,\theta_1,\theta_2,t)$ d'ordre en $y_j$ strictement inférieur à $r_j$ ce qui contredit la généricité. ∎

L'intérêt de cette méthode est de limiter le nombre de variables à éliminer, en abaissant de $\lfloor p/s \rfloor$ au minimum l'ordre de dérivation des équations de départ nécessaire pour conclure, si l'on compare à la méthode de GLAD et LJUNG ($p$ et $q$ sont respectivement les nombres de paramètres et de sorties).

*Exemple* 7. — Le système

$$\begin{aligned} x_1' &= [\theta_1(x_1^2+x_2^2)+\theta_2]x_2u,\\ x_2' &= -[\theta_1(x_1^2+x_2^2)+\theta_2]x_1u,\\ \theta_1' &= \theta_2' = 0,\end{aligned}$$

n'est pas identifiable. Pour s'en convaincre, on remarque d'abord qu'il n'est pas fortement accessible, car $d/dt(x_1^2+x_2^2)=0$. Le système est donc équivalent à celui décrit par le nouvel ensemble caractéristique :

$$\begin{aligned} x_1' &= [\theta_1 R+\theta_2]x_2u,\\ x_2^2+x_1^2 &= R,\\ \theta_1' &= \theta_2' = 0.\end{aligned}$$

(La notion d'ensemble caractéristique est fine et exclut implicitement les solutions parasites $x_1 = \pm 1$ et $x_2 = 0$, de sorte qu'il y a bien équivalence.)

Sous cette forme, il est clair qu'on peut déterminer $R$ et $\theta_1 R + \theta_2$ mais jamais $\theta_1$ et $\theta_2$.

### 4.3 Quelques remarques sur la généricité

La notion de généricité que nous venons d'utiliser fait référence à la topologie de Zariski différentielle, c'est-à-dire à la topologie dont les fermés sont définis par des systèmes algébriques différentiels. En ce sens, les solutions génériques sont des points denses dans la variété. Une propriété susceptible d'être écrite sous forme d'équations et d'inéquations algébriques et vraie en un tel point est donc vraie sur un ouvert dense, c'est à dire générique. Cette notion implique la généricité pour la topologie métrique usuelle.

On remarquera aussi que les systèmes identifiables sont en ce sens génériques : il suffit de modifier d'une quantité arbitrairement petite les coefficients des équations pour que le système devienne identifiable. Cela implique aussi que l'identifiabilité est une propriété robuste : tout système suffisament voisin d'un système identifiable est identifiable.

THÉORÈME 8. — *Soit un système décrit par une extension de corps différentiels $K/k$ avec un état de dimension $n$, $p$ paramètres et une unique sortie $y$. Soit $\lambda$ un élément de $k$ non constant, alors il existe un ouvert dense $U$ de $R^{n(n+p-1)}$ tels que pour tout $c \in U$ le système soit identifiable pour la nouvelle sortie $y + \sum_{i,j} c_{i,j} \lambda^j x_i$.*

PREUVE. — Il s'agit en fait d'une variante du théorème de l'élément primitif. Voir RITT [1] ch. II § 22 p. 34-36. ∎

L'accessibilité forte est également une propriété générique. Il suffit pour le montrer de poser $x_i' = f_i + c u_1^i$, *pour une constante générique* $c$.

## 5 Quelques idées pour les systèmes sans commande

### 5.1 Systèmes creux

On suppose que tous les paramètres sont constants et que les fonctions $f_i$ et $h_j$ sont des polynômes creux, c'est-à-dire présentant peu de monômes (des *oligonômes* selon la belle expression de M. DEMAZURE).

Imaginons que tout l'état est observé, c'est à dire que le système a la forme

$$\begin{aligned} x_i' &= \textstyle\sum_j a_{i,j}(\theta) m_{i,j}(x), \\ y_i &= x_i, \end{aligned}$$

où les $m_{i,j}$ sont des monômes. Dans ce cas, l'une des fonctions $a_{i,j}(\theta)$ n'est pas identifiable ssi il existe un indice $i$ et des constantes $c_j$ non toutes nulles telles que $\sum_j c_j m_{i,j} = 0$. Ceci se produit ssi le déterminant

$$\begin{vmatrix} m_{i,1} & \cdots & m_{i,q} \\ m_{i,1}' & \cdots & m_{i,q}' \\ \vdots & & \vdots \\ m_{i,1}^{(q-1)} & \cdots & m_{i,q}^{(q-1)} \end{vmatrix}$$

est une fonction identiquement nulle de $x$ et de $\theta$. Il suffit donc pour prouver l'identifiabilité de trouver un point tel que ce déterminant soit non nul. Bien des astuces permettent en outre de montrer qu'un tel déterminant est non nul sans devoir le calculer explicitement. Autrement la méthode est praticable dans les cas où le nombre de monômes est suffisament réduit pour permettre le calcul.

Tester la non nullité du déterminant peut se faire de manière particulièrement efficace en calculant le déterminant, non sous forme développée, mais sous la forme d'un programme d'évaluation, grâce à l'algorithme de BERKOWITZ [1]. Le résultat de HEINTZ et SCHNORR [1] permet ensuite de conclure par un nombre réduit d'évaluations. On se reportera à GIUSTI et HEINTZ [1] pour plus de détails sur ces techniques, à la base de résultats récents et prometteurs dans le domaine du calcul formel.

Remarquons que si le déterminant s'annule en un point, il n'est pas nécessairement identiquement nul sur toute la trajectoire passant par ce point.

*Exemple* 9. — Le système

$$x_i' = \theta_i x_i^r + \sum_{j\neq i} a_{i,j}(\theta) x_j,$$

où $r > 1$ est identifiable. Il suffit pour s'en convaincre de vérifier que le terme de degré maximal du déterminant est non identiquement nul.

## 5.2 Un argument de transcendance

Ici, on suppose qu'une fonction transcendante apparaît de manière isolée dans l'écriture du système. Illustrons ce cas par un exemple : le système

$$\begin{aligned} x_1' &= P(x_1, x_2, \theta) + \operatorname{Log} x_1, \\ x_2' &= Q(x_1, x_2, \theta), \end{aligned}$$

où $P$ et $Q$ sont des polynômes est identifiable. En effet, s'il ne l'était pas, il admettrait une intégrale première algébrique $R$, qui satisferait par définition $x_1'\partial R/\partial x_1 + x_2'\partial R/\partial x_2 = 0$ ce qui est impossible à cause du terme $\operatorname{Log} x_1$.

## 5.3 Un argument géométrique

On utilise l'existence d'un point singulier d'une forme particulière, qui interdit l'existence d'intégrales premières rationnelle.

Considérons le système

$$\begin{aligned} x_1' &= -\theta_1 x_1 + x_2 + P(x_1, x_2, \theta), \\ x_2' &= -\theta_1 x_2 - x_1 + Q(x_1, x_2, \theta), \end{aligned}$$

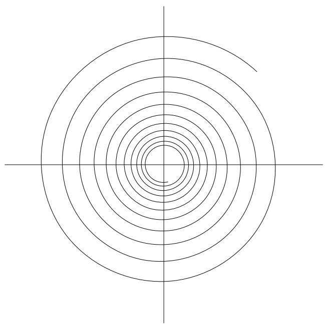

*fig.* 1

où les polynômes $P$ et $Q$ n'admettent pas de terme de degré inférieur à 2. La forme du système implique que le point $(0,0)$ est un point singulier stable autour duquel les trajectoires s'enroulent en spirale. Si le système n'était pas identifiable, les trajectoires épouseraient des courbes algébriques. Ceci est impossible car toute droite passant par l'origine coupe toute trajectoire une infinité de fois.

# 6 Conclusion

Concluons ce bref panorama par une tentative de méthodologie. Pour tester l'identifiabilité, on peut soit utiliser le système linéaire provenant des symétries de Lie, soit éliminer l'état et utiliser le théorème 4.2.6 ci-dessus. Alors, seuls les paramètres qui s'expriment en fonctions des coefficients des équations sont identifiables. Il se peut donc que le système ne soit pas identifiable parce que les sorties sont trop pauvres.

Pour utiliser le théorème 9, nous avons besoin de l'hypothèse de généricité, qui n'est pas sans importance pour la modélisation. En effet, si le système n'admet pas de solution générique, on peut, en introduisant plus de paramètres se ramener à un système algébrique d'ordre inférieur. En ce sens, à défaut d'un critère général de généricité, tester l'identifiabilité, en plus de l'intérêt propre de cette notion, est un moyen empirique pour chercher des intégrales premières polynômes.

Outre la simplification apportée, cette approche présente un intérêt conceptuel dans la mesure où l'absence de solution générique signifie que le vecteur de paramètres choisi n'a pas de sens physique.

Dans le cas d'un système sans commande, on peut soit utiliser la méthode de GLAD et LJUNG, soit les symétries, soit utiliser en fonction de la structure des équations l'une des astuces proposées dans la section 5.

# 7 Références bibliographiques


BERKOWITZ (S.J.),

[1] « On computing the determinant in small parallel time using a small number of processors », *Inf. Proc. Letters*, 18, 1984, p. 147-150.

BOULIER (François),

[1] *Étude et implantation de quelques algorithmes en algèbre différentielle*, thèse de l'Université des Sciences et Techniques de Lille, juin 1994.

BOULIER (François), LAZARD (Daniel), OLLIVIER (François) et PETITOT (Michel),

[1] « Representation for the radical of a finitely generated differential ideal », dans les actes de *ISSAC'95*, Montréal, Québec, 1995, A.H.M. Levelt éd., ACM Press, New York, ISBN : 0-89791-699-9, p. 158-166.

FLIESS (Michel), LÉVINE (Jean), MARTIN (Philippe), OLLIVIER (François) et ROUCHON (Pierre),

[1] « A remark on nonlinear accessibility conditions and infinite prolongations », soumis à *Systems Control Lett.*, 1997.

FLIESS (Michel), LÉVINE (Jean), MARTIN (Philippe) et ROUCHON (Pierre),

[1] « Flatness and defect of nonlinear systems: introductory theory and applications », *Internat. J. Control*, 61, 1995, p. 1327-1887.

GIUSTI (Marc) et HEINTZ (Joos),

[1] « La détermination des points isolés et de la dimension d'une variété algébrique peut se faire en temps polynomial », dans les actes de la conférence de Cortona *Computational Algebraic Geometry and Commutative Algebra*, D. Eisenbud et L. Robbiano éd., Symposia Matematica, vol. XXXIV, Istituto Nazionale di Alta Matematica, Cambridge University Press, 1993.

GLAD (S.T.) et LJUNG (L.),

[1] « Parametrization of Non-linear Model Structures as Linear Regressions », dans les actes de *IFAC World Congress*, Tallin, août 1990.

HEINTZ (Joos) et SCHNORR (C.P.),

[1] « Testing polynomials which are easy to compute », dans les actes de *12th Ann. ACM Symp. on Computing*, 1980, p. 262-268 ; reproduit dans *Logic and Algorithmic. An International Symposium held in Honour of Ernst Specker*, Monographie no 30 de l'Enseignement de Mathématique, Genève, 1982, p. 237-254.

I.S. KRASIL'SHCHIK (I.S.), LYCHAGIN(V.V) et VINOGRADOV (A.M.),

[1] *Geometry of Jet Spaces and Nonlinear Partial Differential Equations*, Gordon and Breach, New York, 1986.

OLLIVIER (François),

[1] « Inversibility of rational mappings and structural identifiability in automatics » dans les actes de *ISSAC'89*, Portland Oregon, ACM Press, New-York, 1989, p. 43-53.

[2] *Le problème de l'identifiabilité structurelle globale : étude théorique, méthodes effectives et bornes de complexité*, thèse de l'École polytechnique, juin 1990.

[3] « Generalized Standard Bases with Application to Control », dans les actes de ECC-91, Grenoble, HERMES Paris, 1991, p. 170-176.

PÉLADAN-GERMA (Ariane),

[1] « Testing Identities of Series Defined by Algebraic Partial Differential Equations », dans les actes de *AAECC'11*, Paris, France, Gérard Cohen, Marc Giusti et Teo Mora éd., Lecture Notes in Computer Science 948, Springer-Verlag, Berlin et Heidelberg, 1995, p. 393-407.

[2] *Tests effectifs de nullité dans les extensions d'anneaux différentiels*, thèse de l'École polytechnique, janvier 1997.

RITT (Joseph Fels),

[1] *Differential Algebra*, Amer. Math. Soc. Colloq. Publ., vol. 33, A.M.S., New-York, 1950.

WALTER (Éric),

[1] *Identifiability of State Space Models*, Lecture Notes in Biomathematics no 46, Springer-Verlag, Berlin et New-York, 1982.

WEIL (Jacques-Arthur)

[1] « De l'importance d'être constant », *Notes informelles de Calcul Formel* no 41, Laboratoire GAGE, École polytechnique, Palaiseau, 1992.

`http ://medicis.polytechnique.fr`