

Platitude différentielle de l'équation de la chaleur bidimensionnelle

Nader BELGHITH, Michel FLIESS,
François OLLIVIER, Alexandre SEDOGLAVIC
{Belghith, Fliess, Ollivier, Sedoglavic}@stix.polytechnique.fr
École Polytechnique, Laboratoire STIX, 91128 Palaiseau cedex, France.

Abstract

We introduce a method for solving the motion planning problem for one partial differential equation problem with more than one space dimension and with boundary control. Our method is illustrated by the classical heat equation and is based on integral transforms and operational calculus.

Résumé

Nous étudions le problème de la planification de trajectoires pour l'équation de la chaleur bidimensionnelle. Nous utilisons, en plus des techniques employées dans le cas mono-dimensionnel, telles que la platitude différentielle, les fonctions Gevrey et le calcul opérationnel, certains types de transformations de Fourier par rapport aux variables d'espace.

1 Introduction

Le problème de la planification de trajectoires, c'est-à-dire la construction d'un contrôle en boucle ouverte permettant de faire passer un système d'un état initial vers un état final tous deux supposés connus, est un problème fondamental en automatique. La notion de *platitude différentielle* a permis de résoudre ce problème pour un grand nombre de systèmes mono-dimensionnels, linéaires et non linéaires, de dimension finie et infinie.

Pour les systèmes linéaires de dimension finie, cette notion est équivalente à la contrôlabilité au sens classique. Pour les systèmes non linéaires de dimension finie, cette notion a été introduite en 1992 [2, 4, 9, 3]. De plus, les concepts de π -liberté et de π -platitude [6, 11, 9] ont permis d'étendre la platitude aux systèmes linéaires et non linéaires à retards.

Parmi les exemples d'applications de dimension infinie qui utilisent la platitude pour résoudre un problème de planification de trajectoires, on trouve notamment des systèmes qui dérivent de l'équation de la chaleur [8] ou de l'équation des ondes [13, 5].

Remarquons pour finir qu'on trouve dans [12] des applications de cette méthode à des problèmes aux dérivées partielles non linéaires.

Dans cette note, nous appliquons la notion de platitude différentielle à un problème de dimension d'espace supérieure à 1. Notre méthode est illustrée par l'équation de la chaleur.

La contrôlabilité approchée de l'équation linéaire de la chaleur, a été largement étudiée en utilisant des techniques d'analyse fonctionnelle [1]. Notre travail est lié aux travaux classiques de Gevrey et Holmgren [7, 18].

Grâce au calcul opérationnel et par le biais de transformations intégrales [17], nous obtenons une paramétrisation explicite des trajectoires. Ensuite, nous déduisons la solution du problème original par des théorèmes d'inversion.

Cette démarche est résumée par la figure 1, dit diagramme de Klampkin.

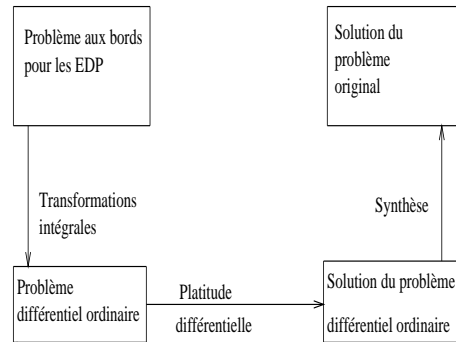


FIG. 1 – Diagramme de Klampkin.

2 Équation de la chaleur bidimensionnelle

Considérons la plaque chauffée représentée par la figure 2. On suppose que la température est imposée sur le bord $x = 0$. Les autres côtés sont supposés isolés. Ce système est régi par l'équation linéaire de la chaleur

$$\left(\frac{\partial^2}{\partial x^2} + \frac{\partial^2}{\partial y^2} - \nu \frac{\partial}{\partial t} \right) \omega(t, x, y) = 0, \quad (1)$$

pour $x \in [0, L]$, $y \in [0, \ell]$ et $0 < t$.

Le coefficient $1/\nu$ représente le terme de diffusion thermique. Pour simplifier notre présentation, nous

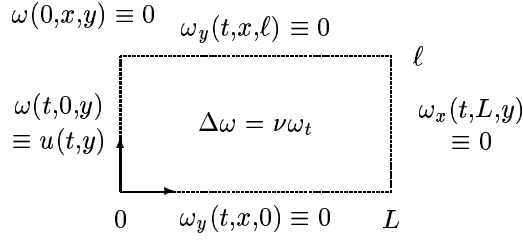


FIG. 2 – Plaque chauffée.

choisissons la condition de Cauchy suivante

$$\omega(0,x,y) = 0, \quad (2)$$

et les conditions aux bords

$$\begin{cases} \omega(t,0,y) = u(t,y), \\ \omega_x(t,L,y) = 0, \\ \omega_y(t,x,0) = 0, \\ \omega_y(t,x,l) = 0. \end{cases} \quad (3)$$

où $u(t,y)$ représente l'entrée et ω_x désigne $\partial\omega/\partial x$.

3 Transformations intégrales

Pour toute fonction f du temps et de l'espace, on notera dans la suite \bar{f} la transformée de Fourier de f par rapport à une variable spatiale et \hat{f} la transformée de Laplace de f par rapport à t .

3.1 Transformation de Fourier

Nous commençons par faire l'analyse de Fourier de la fonction ω , solution du problème précédent. On supposant que ω et u sont localement intégrables et nous considérons pour tout entier n leurs coefficients de Fourier :

$$\begin{cases} \bar{u}(t,n) = \frac{2}{\ell} \int_0^\ell u(t,y) \cos\left(\frac{n\pi y}{\ell}\right) dy, \\ \bar{\omega}(t,x,n) = \frac{2}{\ell} \int_0^\ell \omega(t,x,y) \cos\left(\frac{n\pi y}{\ell}\right) dy. \end{cases}$$

Le choix de la transformée de Fourier cosinus est guidé par la nature des conditions aux bords (si elles étaient de type Dirichlet, on aurait considéré la transformée de Fourier sinus). Pour notre cas, nous obtenons les développements de Fourier suivants

$$\begin{cases} \omega(t,x,y) = \sum_{n \in \mathbb{N}} \bar{\omega}(t,x,n) \cos\left(\frac{n\pi y}{\ell}\right), \\ u(t,y) = \sum_{n \in \mathbb{N}} \bar{u}(t,n) \cos\left(\frac{n\pi y}{\ell}\right). \end{cases} \quad (4)$$

Remarque 1 — En effectuant la transformation de Fourier de l'équation (1) on obtient les relations :

$$\forall n \in \mathbb{N}, \begin{cases} \left(\frac{\partial^2}{\partial x^2} - \nu \frac{\partial}{\partial t} - \left(\frac{n\pi}{\ell}\right)^2 \right) \bar{\omega}(t,x,n) = 0, \\ \text{pour } x \in [0,L], y \in [0,\ell] \text{ et } 0 < t. \end{cases} \quad (5)$$

De même, la condition initiale (2) et les conditions aux bords (3) induisent les conditions suivantes :

$$\forall n \in \mathbb{N}, \begin{cases} \bar{\omega}(0,x,n) \equiv 0, \\ \bar{\omega}(t,0,n) \equiv \bar{u}(t,n), \\ \bar{\omega}_x(t,L,n) \equiv 0. \end{cases} \quad (6)$$

Cette étape nous permet de réduire le nombre des variables indépendantes du système. Pour tout entier n , le problème de contrôle mono-dimensionnel (5)–(6) peut être résolu en utilisant la transformation de Laplace et la platitude différentielle [2].

En effet, la transformation de Laplace permet de se ramener à un problème linéaire de dimension finie, dont les trajectoires peuvent être paramétrisées par une fonction arbitraire.

3.2 Transformation de Laplace

Dans ce qui suit, s désigne la variable de Laplace. Considérons les transformées $\hat{\omega}(s,x,n)$ (resp. $\hat{u}(s,n)$) des fonctions $\bar{\omega}(t,x,n)$ (resp. $\bar{u}(t,n)$). Pour tout entier n et pour $x \in [0,L]$, le calcul opérationnel usuel nous permet d'aboutir aux relations différentielles ordinaires suivantes :

$$\left(\frac{\partial^2}{\partial x^2} - \left(\frac{n\pi}{\ell}\right)^2 - \nu s \right) \hat{\omega}(s,x,n) = 0, \quad (7)$$

avec les conditions aux bords

$$\begin{cases} \hat{\omega}(s,0,n) = \hat{u}(s,n), \\ \hat{\omega}_x(s,L,n) = 0. \end{cases} \quad (8)$$

Pour tout entier n , nous considérons le problème ordinaire (7)–(8) et nous allons paramétriser ses trajectoires à l'aide d'une fonction arbitraire.

4 Paramétrisation formelle de trajectoires

La solution du système (7)–(8) est donnée par

$$\hat{\omega}(s,x,n) = \frac{\cosh\left((L-x)\sqrt{\nu s + \left(\frac{n\pi}{\ell}\right)^2}\right)}{\cosh\left(L\sqrt{\nu s + \left(\frac{n\pi}{\ell}\right)^2}\right)} \hat{u}(s,n).$$

À partir de cette solution et au moyen d'une fonction arbitraire $\hat{\eta}(s,n)$, on obtient pour tout x et pour tout n , les paramétrisations formelles :

$$\begin{aligned} \hat{\omega}(s,x,n) &= \cosh\left((L-x)\sqrt{\nu s + \left(\frac{n\pi}{\ell}\right)^2}\right) \hat{\eta}(s,n), \\ \hat{u}(s,y) &= \cosh\left(L\sqrt{\nu s + \left(\frac{n\pi}{\ell}\right)^2}\right) \hat{\eta}(s,n). \end{aligned} \quad (9)$$

Remarquons que pour $x = L$, on a

$$\hat{\omega}(s,L,n) = \hat{\eta}(s,n). \quad (10)$$

La fonction $\widehat{\eta}(s,n)$ joue le rôle d'une *sortie plate* pour la plaque chauffée. C'est-à-dire, une fonction qui permet de paramétriser toutes les trajectoires du système qui sont solutions du problème (7)–(8).

Remarque 2 — La relation (10) montre que, pour chaque mode n , la fonction arbitraire $\widehat{\eta}(s,n)$ qui assure la paramétrisation, est liée à la valeur de la solution sur le bord droit, non contrôlé de la plaque. En effectuant la sommation sur tous les modes, on obtient à l'aide de (9)

$$\begin{cases} \widehat{\omega}(s,L,y) &= \widehat{\eta}(s,y), \\ \widehat{u}(s,y) &= \widehat{\omega}(s,0,y). \end{cases}$$

On trouve dans ces relations un sens physique aux sorties plates associées à chaque modes.

À ce stade, il nous est possible d'émettre deux hypothèses sur le contrôle.

5 Hypothèses sur le contrôle

Le contrôle qui s'exerce sur le bord de la plaque peut être soit réparti, soit de la forme $u(t)h(y)$ où h une fonction de répartition.

5.1 Contrôle réparti

L'expression (9) nous permet de paramétriser formellement chaque mode $\widehat{\omega}(s,x,n)$ en fonction d'une fonction arbitraire $\widehat{\eta}(s,n)$.

En suivant la méthode présentée dans [8], on peut montrer que ces paramétrisations définissent dans le domaine temporel des paramétrisations convergentes. Ainsi, si l'on fait l'hypothèse que le contrôle est réparti, toutes les sorties plates arbitraires sont indépendantes. Notre plaque peut être formellement considérée comme une infinité de problèmes monodimensionnel (7)–(8). Ces systèmes sont tous plats au sens de [8] et peuvent être contrôlé séparément.

En considérant un nombre fini de modes, nous obtenons à partir des séries (4) une planification approchée des trajectoires. Le lecteur intéressé peut toutefois se reporter à l'article [8]. Un problème mono-dimensionnel semblable au système (7)–(8) y est traité.

Nous consacrons les sections à venir à un autre cas où on obtient une planification approchée.

Dans ce deuxième cas, il nous est possible d'obtenir, contrairement au cas réparti, une expression du contrôle indépendante du choix des modes.

5.2 Contrôle non réparti

Dans cette section, on suppose que l'expression du contrôle sur le bord de la plaque, s'écrit sous la forme $u(t)h(y)$. Pour tout n , on note par $\bar{h}(n)$ le n ème coefficient de Fourier du développement

de $h(y)$. En appliquant une transformation de Fourier puis une transformation de Laplace on obtient

$$\forall n \in \mathbb{N}, \widehat{u}(s)\bar{h}(n) = \cosh\left(L\sqrt{\nu s + \left(\frac{n\pi}{\ell}\right)^2}\right)\widehat{\eta}(s,n).$$

Ces relations montrent que Contrairement au cas évoqué dans la section 5.1, les sorties plates ne sont plus indépendantes les unes des autres. Notre objectif est de trouver une loi de commande qui soit indépendante des modes n . On cherche à écrire $\widehat{u}(s)$ sous la forme $\widehat{u}(s) = U(s)G(s)$ avec $U(s)$ une fonction dépendante du problème et $G(s)$ une fonction arbitraire. Pour ce faire, on note pour tout n

$$\begin{cases} H(n) &= \prod_{j=0, j \neq n}^{\infty} \bar{h}(j), \\ \widehat{\eta}(s,n) &= \widehat{\xi}(s,n)G(s), \end{cases} \quad (11)$$

avec la fonction auxiliaire

$$\widehat{\xi}(s,n) = \frac{\prod_{j=0, j \neq n}^{\infty} \cosh\left(L\sqrt{\nu s + \left(\frac{j\pi}{\ell}\right)^2}\right)}{H(n)} \quad (12)$$

et $G(s)$ une fonction arbitraire. Dans ce cas, on a

$$U(s) = \frac{\prod_{j=0}^{\infty} \cosh\left(L\sqrt{\nu s + \left(\frac{j\pi}{\ell}\right)^2}\right)}{H(n)\bar{h}(n)}.$$

Ce contrôle formel est bien indépendant du choix du mode. Pour pouvoir appliquer notre méthode, nous considérons dans (11) et (12) un nombre fini de modes ; on note $H_N(n)$, $\widehat{\xi}_N(s,n)$, $\widehat{\eta}_N(s,n)$ les expressions correspondantes tronquées à N modes. En utilisant ces notations, le système (9) s'écrit

$$\begin{cases} \widehat{\omega}(s,x,n) &= \Omega_N(s,x,n)G(s), \\ \widehat{u}(s,n) &= U_N(s,n)G(s), \end{cases} \quad (13)$$

avec

$$\begin{cases} \Omega_N = \cosh\left((L-x)\sqrt{\nu s + \left(\frac{n^2\pi^2}{\ell^2}\right)}\right)\widehat{\xi}_N(s,n), \\ U_N = \cosh\left(L\sqrt{\nu s + \left(\frac{n\pi}{\ell}\right)^2}\right)\widehat{\xi}_N(s,n). \end{cases} \quad (14)$$

Nous considérons, à partir de (9) les approximations suivantes pour tout entier n

$$\begin{cases} \widehat{\omega}(s,x,n) \simeq \cosh\left((L-x)\sqrt{\nu s + \left(\frac{n\pi}{\ell}\right)^2}\right)\widehat{\eta}_N(s,n), \\ \widehat{u}(s,n) \simeq \cosh\left(L\sqrt{\nu s + \left(\frac{n\pi}{\ell}\right)^2}\right)\widehat{\eta}_N(s,n). \end{cases} \quad (15)$$

On vérifie que pour $x = 0$ et tout entier n , on a

$$\widehat{\omega}(s,0,n) = \widehat{u}(s,n),$$

c'est-à-dire que pour chaque mode n , le contrôle reste exercé sur le bord gauche. Il nous reste maintenant à montrer que ces expressions formelles permettent effectivement de définir un contrôle i.e. que le système (15) définit bien des expressions convergentes.

6 Paramétrisation dans le domaine temporel

Dans l'interprétation du calcul formel due à Mikusiński [10], on définit l'opérateur $\cosh(\sqrt{s})$. À une fonction $f(t)$, cet opérateur fait correspondre, sous certaines conditions, la série $\sum_{i \in \mathbb{N}} \alpha_i f^{(i)}(t)$, où α_i désignent les coefficient de s^i dans le développement de $\cosh(\sqrt{s})$ par rapport à s . Le lecteur intéressé peut consulter [5, 6, 3] pour plus de détails sur l'application de ces techniques en théorie du contrôle.

En appliquant ceci au système (15), on obtient

$$\begin{cases} \bar{\omega}(t, x, n) = \cosh\left((L-x)\sqrt{\nu \frac{\partial}{\partial t} + \left(\frac{n\pi}{l}\right)^2}\right) \bar{\eta}_N(t, n) \\ \bar{u}(t, n) = \cosh\left(L\sqrt{\nu \frac{\partial}{\partial t} + \left(\frac{n\pi}{l}\right)^2}\right) \bar{\eta}_N(t, n). \end{cases} \quad (16)$$

Ce pose maintenant le problème de convergence des séries dans l'expression (16). Nous donnons la définition d'une fonction de classe Gevrey introduite dans [7] et nous montrerons que pour une telle fonction, les expressions (16) convergent.

Définition 1 ([14]) Une fonction $y(t)$ définie sur $[0, 1]$ est de classe Gevrey σ si elle est C^∞ et s'il existe M et R , deux réels positifs tels que

$$\forall j \in \mathbb{N}, \quad \sup_{t \in [0, 1]} |y^{(j)}(t)| \leq M \frac{(j!)^\sigma}{R^j}.$$

Ce type de fonctions a été introduit pour l'étude de certaines équations aux dérivées partielles.

Proposition 1 — Si $G(t)$ est une fonction Gevrey de classe $\sigma < 2$ alors la fonction $\bar{\eta}_N(t, n)$ est Gevrey d'ordre σ en t et d'ordre $\sigma/2$ en n . De plus, la série des dérivées de $G(t)$ est convergente par rapport à L .

Preuve. on a

$$\begin{aligned} \widehat{\eta}_N(s, n) &= \widehat{\xi}_N(s, n) G(s). \\ \widehat{\xi}_N(s, n) &\leq \frac{\cosh\left(L\sqrt{s}\sqrt{N\nu + \sum_{j=0, j \neq n}^N \left(\frac{j\pi}{l}\right)^2}\right)}{H_N(n)}. \end{aligned}$$

Notons

$$A(N) = L\sqrt{N\nu + \sum_{j=0, j \neq n}^N \left(\frac{j\pi}{l}\right)^2}.$$

En développant en série les dérivées de $G(t)$, on obtient

$$\bar{\eta}_N(t, n) \leq \frac{1}{H_N(n)} \sum_{i \geq 0} \frac{A(N)^{2i}}{(2i)!} G(t)^{(i)}.$$

Cette dernière somme converge car $G(t)$ est Gevrey d'ordre σ . La dérivée d'ordre m de $\bar{\eta}_N(t, n)$ vérifie l'inégalité suivante

$$\bar{\eta}_N(t, n)^{(m)} \leq \sum_{i \geq 0} \frac{A(N)^{2i}}{H_N(n)(2i)!} G(t)^{(i+m)}.$$

On utilise les constantes M et R de la définition pour trouver la majoration suivante

$$\frac{A(N)^{2i}}{(2i)!} G(t)^{(i+m)} \leq \frac{A(N)^{2i}}{(2i)!} \frac{M}{R^{i+m}} ((i+m)!)^\sigma.$$

En utilisant la relation $(i+m)! \leq 2^{i+m} i! m!$, on obtient

$$\frac{1}{(m!)^\sigma} \bar{\eta}_N(t, n)^{(m)} \leq \sum_{i \geq 0} \frac{A(N)^{2i}}{H_N(n)} \frac{M}{R^{i+m}} \left(\frac{(i+m)!}{i! m!}\right)^\sigma \frac{(i!)^2 (i!)^{\sigma-2}}{(2i)!}.$$

En notant $\tilde{R} = \frac{R}{2^\sigma}$, l'inégalité précédente devient

$$\frac{1}{(m!)^\sigma} \bar{\eta}_N(t, n)^{(m)} \leq \sum_{i \geq 0} \frac{1}{H_N(n)} A(N)^{2i} \frac{M}{\tilde{R}^m} \frac{(i!)^{\sigma-2}}{\tilde{R}^i}.$$

soit

$$\widetilde{M} = \frac{1}{H_N(n)} \sum_{i \geq 0} A(N)^{2i} M \frac{(i!)^{\sigma-2}}{\tilde{R}^i}.$$

En notant γ_i le terme général de cette série on obtient :

$$\frac{\gamma_{i+1}}{\gamma_i} = \frac{A(N)^2 (i!)^{\sigma-2}}{\tilde{R}}$$

pour $\sigma < 2$, $\frac{\gamma_{i+1}}{\gamma_i} \rightarrow 0$ quand $i \rightarrow \infty$. D'où

$$\bar{\eta}_N(t, n)^{(m)} \leq \frac{\widetilde{M} (m!)^\sigma}{\tilde{R}^m}.$$

Cette dernière inégalité montre que $\bar{\eta}_N(t, n)$ est Gevrey d'ordre σ en t . \square

On utilise maintenant les deux relations dans (14) pour avoir des développements en séries par rapport à s . Ensuite, nous écrivons $\bar{u}(t, n)$ et $\bar{\omega}(t, x, n)$ sous la forme suivante

$$\begin{cases} \bar{u}(t, n) = \sum_{j=0}^{\infty} \alpha_j G(t)^{(j)}, \\ \bar{\omega}(t, x, n) = \sum_{j=0}^{\infty} \beta_j G(t)^{(j)}. \end{cases} \quad (17)$$

α_j et β_j sont respectivement les coefficients de s^j dans les développements de $U_N(s, n)$ et $\Omega_N(s, x, n)$. La solution du problème initial et l'expression du contrôle sont donc données par

$$\begin{cases} u(t, y) = \sum_{n=0}^{\infty} \bar{u}(t) \bar{h}(n) \cos\left(\frac{n\pi y}{l}\right), \\ \omega(t, x, y) = \sum_{n=0}^{\infty} \bar{\omega}(t, x, n) \cos\left(\frac{n\pi y}{l}\right). \end{cases} \quad (18)$$

7 Résultats de simulations

Nous considérons les expressions dans (18) avec un nombre N de modes égal à 3. Dans le premier exemple, nous considérons la fonction de répartition $h(y) = \cos(y)$, dont la série de Fourier cosinus est donnée par la figure 3. Nous présentons le profil de température à l'instant $t = 0.9$ en utilisant la sommation de Fourier et on obtient la figure 4. Ensuite,

nous injectons l'expression de la commande dans un modèle de semi-discrétisations et nous présentons le profil au même instant. Celui-ci est donné par la figure 5. Le deuxième exemple est étudié avec la fonction $1/(y+1) + y^2$ définie sur l'intervalle $[0,1]$ et représentée par la figure 6. Avec cette fonction nous obtenons la figure 7 avec la sommation de Fourier et la figure 8 avec la semi-discrétisation. Comme nous pouvons le constater, pour chacune de ces deux fonctions, les deux profils sont semblables même avec une faible discrétisation.

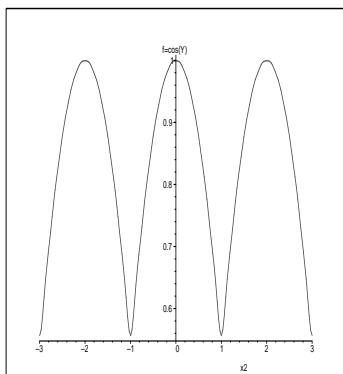


FIG. 3 – Exemple 1.

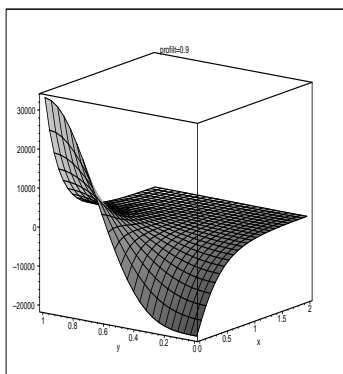


FIG. 4 – Profil avec sommation de Fourier.

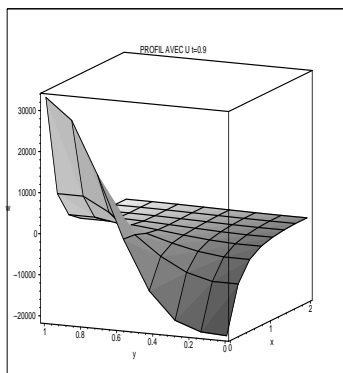


FIG. 5 – Profil avec discrétisations.

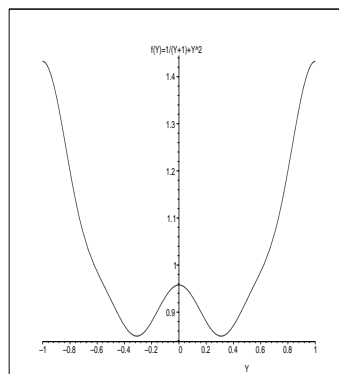


FIG. 6 – Exemple 2.

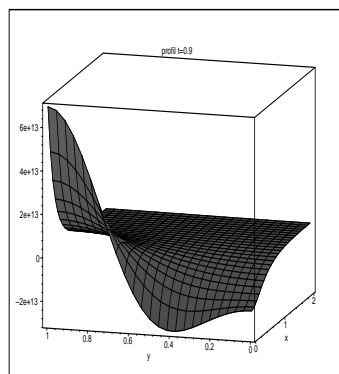


FIG. 7 – Profil avec sommation de Fourier.

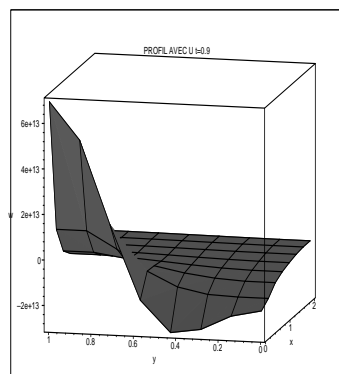


FIG. 8 – Profil avec discrétisation.

8 Conclusion

En effectuant une transformation de Fourier cosinus, tronquée à un ordre N , sur le système défini par l'équation de la chaleur bidimensionnelle, on parvient à résoudre le problème de la planification de trajectoires avec une précision arbitraire.

Références

- [1] C. Fabre, J. P. Puel, and E. Zuazua. Approximate controllability of the semilinear heat equation. *Proceedings of the Royal Society of Edinburgh. Section A. Mathematics*, 125(1):31–61, 1995.

- [2] M. Fliess, J. Lévine, P. Martin, and P. Rouchon. Flatness and defect of non-linear systems: introductory theory and examples. *Internat. J. Control*, 61:1327–1361, 1995.
- [3] M. Fliess. Variations sur la notion de contrôlabilité. In *Quelques Aspects de la Théorie du Contrôle. Journée Annuelles Soc. Math. France*, pages 47–86, Paris, France, 2000.
- [4] M. Fliess, J. Lévine, P. Martin, and P. Rouchon. A Lie-Bäcklund approach to equivalence and flatness of nonlinear systems. *IEEE Trans. Automat. Control, AC-*, 44:922–937, 1999.
- [5] M. Fliess, P. Martin, N. Petit, and P. Rouchon. Commande de l'équation des télégraphistes et restauration active d'un signal. *Traitement du signal*, 15:619–625, 1998.
- [6] M. Fliess and H. Mounier. Tracking control and π -freeness of infinite dimensional linear systems. In G. Picci and editors D. S. Gilliam, editors, *Dynamical Systems, Control, Coding, Computer Vision*, pages 45–68, Birkhauser, 1999.
- [7] M. Gevrey. La nature analytique des solutions des équations aux dérivées partielles. *Annales scientifiques de l'École Normale Supérieure*, 35:129–190, 1918.
- [8] B. Laroche, P. Martin, and P. Rouchon. Motion planning for the heat equation. *International journal of robust and nonlinear control*, 10(8):629–643, 2000.
- [9] P. Martin, R. M. Murray, and P. Rouchon. Flat systems. In G. Bastin and editors M. Gevers, editors, *Plenary Lectures and Mini-Courses, 4th European Control Conference*, pages 211–264, Brussels, Belgium, 1997.
- [10] J. Mikusiński and Th. K. Boehme. *Operational Calculus*, volume 2. Pergamon, Oxford & PWN, Warszawa, 1987.
- [11] H. Mounier and J. Rudolph. Flatness based control of nonlinear delay systems: A chemical reactor example. *Internat. J. Control*, 71:871–890, 1998.
- [12] F. Ollivier and A. Sedoglavic. A generalization of flatness to nonlinear systems of partial differential equations. Application to the command of a flexible rod. In *Proceedings of the 5th IFAC Symposium "Nonlinear Control Systems"*, volume 1, pages 196–200, Saint Petersburg, Russia, July 4–6 2001. Elsevier.
- [13] N. Petit and P. Rouchon. Motion planning for heavy chain systems. *SIAM J. Control Optim.*, 40:475–495, 2001.
- [14] J.-P. Ramis. *Séries Divergentes et Théorèmes Asymptotiques*, volume 121. Soc.Math.France, 1993.
- [15] J. Rudolph. *Flatness Based Control of Distributed Parameter Systems*. Shaker Verlag, 2003.
- [16] J. Rudolph, J. Winkler, and F. Woitennek. *Flatness Based Control of Distributed Parameter Systems: Examples and Computer Exercises from Various Technological Domains*. Shaker Verlag, 2003.
- [17] I. N. Sneddon. *The Use of Integral Transforms*. MacGraw-Hill, 1972.
- [18] G. Valiron. *Équations fonctionnelles : applications*. Masson, Paris, 2 edition, 1950.