Conclusion

Au terme de ce travail, il paraît opportun de faire un bilan des résultats obtenus. Ceci revient en un sens à dresser la liste des questions ouvertes, des difficultés qui ont pu être contournées pour parvenir quand même aux buts fixés, parfois au prix d'une perte de généralité, tout en soulignant la portée des résultats obtenus. Un certain nombre de ces problèmes me paraissent dignes d'intérêt, par les possibilités nouvelles qu'apporterait leur résolution, tant sur le plan théorique que pratique.

1. Implantations. Problèmes algorithmiques

Des algorithmes décrits ici, seuls ont été implantés la méthode utilisant l'idéal Δ, et les manipulations de structures linéaires stationnaires, sans oublier un package de construction de base canonique. Une implantation de la procédure de construction de base standard différentielle, et de l'algorithme de construction d'ensemble caractéristique du chapitre IV sont indispensables pour se faire une idée précise des problèmes rencontrés dans leur mise en œuvre, de leur efficacité potentielle, et surtout pour traiter des exemples permettant de cerner les mauvais cas, d'épurer et de compléter les méthodes algorithmiques.

Au cours de mon travail d'implantation, j'ai rencontré les problèmes suivants.

A) En ce qui concerne les tests d'inversibilité, on a vu à travers des exemples que la méthode de l'idéal Δ, et celle utilisant les bases canoniques losrqu'elle s'applique, sont plus rapides que la méthode du graphe. Cependant, elle ne donnent pas l'expression de l'inverse qu'on peut néanmoins souhaiter connaître. C'est la rançon de l'efficacité, car la lenteur des calculs pour le graphe est sans doute très liée à la taille de l'inverse. Si l'on peut se passer d'une expression développée de l'inverse, la trace des calculs de base canonique est souvent de taille plus raisonnable et constitue un "programme de calcul de l'inverse" mieux adapté aux besoins pratiques. Mon implantation permet de conserver cette trace, mais des efforts restent à faire pour la rendre lisible et utilisable.

Dans le cas de l'idéal $\Delta(K)$, les coefficients des polynômes présents à chaque étape du calcul de la base standard engendrent le corps K, de sorte que ce corps est au même titre que l'idéal un des invariants de l'algorithme. La trace des calculs réalisés sur le corps K permettrait donc d'obtenir aussi un programme de calcul de l'inverse. Toutefois, mes tentatives d'implantations se sont révélées infructueuses. La trace complète, trop grande et comportant de nombreuses opérations inutiles, ne tarde pas à saturer la mémoire. Si l'on tente un nettoyage de la trace en cours de calcul, les temps deviennent prohibitifs. Je suis néanmoins convaincu que cette méthode devrait aboutir, avec une meilleure approche de son implantation.

B) La détermination des superpositions dans l'algorithme de base canonique, ainsi que des syzygies dans l'algorithme de base standard généralisé pose le problème de résoudre certaines équations diophantiennes. La méthode que j'ai utilisée pour les bases canoniques, par un calcul préalable de base standard paraît raisonnable en pratique et possède ses avantages. Il serait pourtant utile de la comparer avec d'autres méthodes, comme celles de HUET.

C) La détermination des syzygies pour les bases standard d'idéaux différentiels pose aussi un problème algorithmique, dont la solution proposée ici ne me satisfait guère par sa brutalité.

2. Problèmes de finitudes. Calcul des ensembles caractéristiques

On a rencontré des problèmes de finitude pour deux types de généralisation des bases standard : les bases caconiques et les bases standard d'idéaux différentiels. Dans le premier cas, on a donné une conjecture. Supposons qu'on puisse en donner une preuve effective, c'est-à-dire déterminer explicitement un élément de la clôture intégrale non présent dans l'algèbre, si la base canonique n'est pas de type fini. On a alors montré au chapitre III § 3, comment on pourrait tester l'appartenance à la sous-algèbre par le calcul de base canonique finie, et d'une base standard généralisée.

Dans le cas des idéaux différentiels, bien des efforts restent à faire sans doute pour définir un test d'appartenance. On a souligné au chap. IV § 1 quelques cas sympathiques où l'on peut conclure même si la base est infinie.

Enfin, le problème reste ouvert de déterminer l'ensemble caractéristique d'un idéal. Par chance, pour les applications du chapitre V, on pouvait déjà partir d'un ensemble caractéristique. Dans le cas général, une méthode reste à inventer.

3. Problèmes de complexité

On a pu donner des résultats de complexité pour tester l'existence de l'inverse d'une application rationnelle différentielle, et exprimer l'inverse d'une application rationelle *algébrique* $f : \mathbf{A}^n \mapsto \mathbf{A}^n$. On souhaiterait pouvoir les étendre, sous une forme que j'ignore, à des applications rationelles plus générales, par exemple en bornant aussi le degré de l'inverse d'une application rationnelle différentielle, ou en considérant aussi des applications $f : X \subset \mathbf{A}^n \mapsto \mathbf{A}^m$.

Pour les applications à l'automatique, on souhaiterait avoir une estimation de la taille des résumés exhaustifs obtenus par la méthode du chap. V § 6, ce qui n'est pas évident.

Un problème de base serait d'obtenir un nullstellensatz effectif différentiel, sous la forme suivante. Si

$$1 = \sum_{i=1}^{r} R_i\,\theta_i\,P_{j_i} \in [P_j\; j = 1, \ldots, s]_{\mathcal{F}\{x_1,\ldots,x_n\}}$$

majorer l'ordre et le degré des $m_i\theta_i P_{j_i}$ en fonction de s, de l'ordre et du degré maximal des P_j. Une majoration sur l'ordre permettrait d'ailleurs une majoration brutale du degré en appliquant le nullstellensatz effectif algébrique, comme on l'a fait en IV.1.

4. Calcul de résumés exhaustifs

Comme on l'a évoqué à la fin du chapitre V, un certain nombre de problèmes restent en suspens. L'un d'eux est de savoir si le fait d'autoriser des commandes non génériques peut changer les conclusions, ce qui paraît intuitivement peut probable.

Il serait très fructueux de pouvoir déterminer si la solution définie par les conditions initiales est générique. On pourrait alors élargir le champ des applications, et surtout traiter des structures très générales si l'on savait aussi dans les mauvais cas déterminer un idéal plus petit, définissant une structure "minimale" correspondant au processus modélisé.

On a brièvement évoqué le test de discernabilité, qui revient en fait à tester l'inclusion de deux variété algébriques différentielles. Parmis d'autres, cette question montre que les besoins de l'automatique peuvent introduire ou motiver des problèmes théoriques difficiles et en eux-mêmes très interessants.