PREMIÈRE PARTIE

Approche théorique

CHAPITRE I

Algèbre différentielle

Dans ce chapitre, $\mathcal{F}$ désignera un corps différentiel simple ou aux dérivées partielles. On ne considérera que des anneaux et des corps commutatifs. On notera $\mathcal{F}^*$ le groupe des éléments inversibles de $\mathcal{F}$. Si E est un espace vectoriel, on notera $E_\star$ l'ensemble $E \setminus \{0\}$. Pour tout anneau intègre A, $\mathrm{Fr}A$ sera le corps de fractions de A.

§ 1. ANNEAUX DIFFÉRENTIELS

1. Définitions

DÉFINITION 1. — *Soit A un anneau, on appelle dérivation sur A une application $\delta : A \mapsto A$ telle que pour tout $(x, y) \in A^2$*

$$\delta(x+y) = \delta(x) + \delta(y) \tag{1}$$

$$\delta(xy) = x\delta(y) + y\delta(x). \tag{2}$$

On appelle anneau (resp. corps) différentiel un anneau (resp. un corps) muni d'un ensemble Δ de dérivations commutant entre elles, et anneau de Ritt un anneau différentiel contenant un sous-anneau isomorphe à **Q**. *Lorsqu'on voudra faire explicitement référence à l'ensemble de dérivations considéré, on notera A_Δ. Dans le cas où il n'y a qu'une dérivation, on parlera d'un anneau différentiel ordinaire et autrement d'un anneau aux dérivées partielles.*

On notera Θ le monoïde commutatif libre engendré par les dérivations. Ses éléments seront appelés opérateurs de dérivation.

DÉFINITION 2. — *Soit A_Δ un anneau différentiel, on appelle module différentiel sur A_Δ, un A-module M muni d'un ensemble d'applications internes commutant entre elles Δ', en bijection avec Δ par ϕ, tel que*

$$\forall (x, y) \in M^2\ \forall \delta \in \Delta' \quad \delta(x+y) = \delta(x) + \delta(y)$$

et

$$\forall (a,x) \in A \times \mathrm{M}\, \forall \delta \in \Delta' \quad \delta(ax) = \phi(\delta)(a)x + a\delta(x).$$

Les applications de Δ' sont appelées dérivations sur M. On conviendra à l'avenir d'identifier Δ et Δ'.

On peut alors définir de manière immédiate les notions d'espace vectoriel différentiel, algèbre différentielle, etc.

DÉFINITION 3. — *Soit A un anneau différentiel, on appelle idéal différentiel de A, un sous-module différentiel de A considéré comme module différentiel sur lui-même, c'est donc en particulier un idéal algébrique.*

On s'assure aisément que les idéaux différentiels sont les idéaux $\mathcal{I}$ tels que $\Delta\mathcal{I} \subset \mathcal{I}$.

DÉFINITION 4. — *Soit A_Δ et $B_{\Delta'}$ deux anneaux différentiels, on appelle morphisme d'anneaux différentiels la donnée d'un morphisme d'anneaux $\phi : A \mapsto B$ et d'une bijection $\psi \colon \Delta \mapsto \Delta'$ tels que pour tout $(a,\delta) \in A \times \Delta$ $\phi(\delta\, a) = (\psi(\delta))\, \phi(a)$.*

Lemme 1. — *Soit δ une dérivation d'un anneau différentiel A, alors $\delta\, 0 = 0$. Si A est unitaire, $\delta\, 1 = 0$.*

PREUVE. $\delta\, 0 = \delta\,(0+0) = 2\,\delta\, 0$. $\delta\, 1 = \delta(1^2) = 2\,\delta\, 1$.

PROPOSITION 1. — *L'image d'un morphisme d'anneaux différentiels $\phi : A \mapsto B$ est un sous-anneau différentiel de B.*

Le noyau d'un morphisme d'anneaux différentiels est un idéal différentiel. Réciproquement, pour tout idéal différentiel Σ de A, l'anneau quotient A/Σ est canoniquement muni d'une structure d'idéal différentiel et Σ est le noyau du morphisme canonique de A dans A/Σ. ∎

PROPOSITION 2. — *Si E est un sous-ensemble d'un anneau différentiel A, il existe un unique idéal différentiel Σ contenant E qui soit minimal pour l'inclusion.*

PREUVE. Il suffit de prendre pour Σ l'intersection des idéaux contenant E. ∎

DÉFINITION 5. — *On appelle idéal différentiel engendré par E et l'on note $[E]$ le plus petit idéal différentiel contenant E.*

Lemme 2. — *L'idéal différentiel $[E]$ est égal à l'idéal algébrique $(\Theta\, E)$.* ∎

DÉFINITION 6. — *Un idéal différentiel $\mathcal{I}$ de A est dit radiciel* [1]*, si*

$$\forall a \in A\ \exists n \in \mathbf{N}_\star\ a^n \in \mathcal{I} \implies a \in \mathcal{I}.$$

Lemme 3. — *Si E est un sous-ensemble d'un anneau différentiel A, il existe un unique idéal différentiel radiciel contenant E, qui soit minimal pour l'inclusion.*

PREUVE. Il suffit de prendre l'intersection des idéaux radiciels contenant E, en remarquant qu'il en existe au moins un, puisque [1] est radiciel, et que l'intersection d'une famille d'idéaux radiciels est un idéal radiciel. ∎

---

(1) On dit aussi *parfait*, selon la terminologie de Ritt.

DÉFINITION 7. — *On appelle idéal radiciel engendré par un sous-ensemble E de l'anneau différentiel A, et l'on note $\{E\}$, le plus petit idéal radiciel contenant E.*

PROPOSITION 3. — *Si A est un anneau de Ritt, alors, pour tout idéal Σ de A, $\{\Sigma\} = \sqrt{\Sigma}$.*

PREUVE. On a manifestement $\sqrt{\Sigma} \subset \{\Sigma\}$. Pour prouver qu'on a l'inclusion inverse, il faut montrer que $\sqrt{\Sigma}$ est un idéal différentiel. Pour cela, il suffit de montrer que si a^n est dans Σ alors il existe une puissance de $\delta\, a$ dans Σ, ce qui résulte du lemme suivant. ∎

Lemme 4. — *Soient a un élément d'un anneau différentiel A et δ une dérivation de A, alors pour tout $n \in \mathbf{N}$ $(\delta\, a)^{2n-1} \in [a^n]$.*

PREUVE. Voir [Ri2 I.8 p. 8]. ∎

En particulier, un idéal différentiel premier est radiciel.

DÉFINITION 8. — *Soit $\mathcal{I}$ et $\mathcal{J}$ deux idéaux, on notera $\mathcal{I} : \mathcal{J}^\infty$ l'idéal $\{P \in \mathcal{F}\{n\} | \exists(a, Q) \in \mathbf{N} \times \mathcal{J}\ P Q^a \in \mathcal{I}\}$. On notera $\mathcal{I} : \Sigma^\infty$ l'idéal $\mathcal{I} : (\Sigma)^\infty$.*

Lemme 5. — *Si $\mathcal{I}$ est un idéal différentiel, alors $\mathcal{I} : \mathcal{J}^\infty$ est aussi un idéal différentiel.* ∎

2. Propriétés. Exemples

Tout anneau peut être muni d'une structure d'anneau différentiel triviale en prenant pour dérivation l'application nulle.

PROPOSITION 4. — *Soit A un anneau différentiel intègre et K son corps de fractions, alors il existe une unique dérivation sur K qui prolonge la dérivation de A. Elle est telle que $\delta(a/b) = \delta\, a/b - a\, \delta\, b/b^2$.*

PREUVE. Voir [ZS vol I ch. II § 17 p. 120]. ∎

En utilisant le lemme 1.1, on en déduit que la seule dérivation sur $\mathbf{Q}$ est la dérivation triviale.

THÉORÈME 1. — *Soit k un corps différentiel de caractéristique 0, alors pour toute extension algébrique K de k il existe une unique dérivation sur K qui prolonge la dérivation sur k.*

PREUVE. Voir [ZS vol. I ch. II § 17 cor. 2′ p. 125]. ∎

Exemples. — 1) L'anneau des polynômes (resp. le corps des fractions) en une variable est un anneau (resp. un corps) différentiel pour l'opération de dérivation usuelle. On voit que la dérivation sur le corps des fractions prolonge celle sur l'anneau.

2) L'anneau des polynômes (resp. le corps des fractions) en n variables x_i est un anneau (resp. un corps) différentiel pour chacune des n opérations de dérivation partielle $\frac{\partial}{\partial x_i}$.

3) Pour tout corps différentiel $\mathcal{F}$ de caractéristique 0, la clôture algébrique $\overline{\mathcal{F}}$ possède une unique structure de corps différentiel compatible avec celle de $\mathcal{F}$. En particulier, la seule dérivation sur la clôture algébrique de $\mathbf{Q}$ est la dérivation triviale. Par densité, on en déduit que c'est la seule dérivation continue sur $\mathbf{C}$ ou sur $\mathbf{R}$.

DÉFINITION 9. — *Si B est une algèbre différentielle sur A et E un sous-ensemble de B, la sous-algèbre différentielle engendrée par E sera notée $A\{E\}$. Si $\mathcal{G}$ est un sur-corps différentiel de $\mathcal{F}$, le sur-corps de $\mathcal{F}$ engendré par une partie η de $\mathcal{G}$ est noté $\mathcal{F}\langle\eta\rangle$.*

Lemme 6. — *Sous les hypothèses de la définition précédente,* $A\{E\} = A[\Theta\, E]$ *et* $\mathcal{F}\langle\eta\rangle = \mathcal{F}(\Theta\,\eta)$. ■

§ 2. POLYNÔMES DIFFÉRENTIELS

1. Construction

On va définir les algèbres de polynômes différentiels sur un anneau différentiel A_Δ. Remarquons tout d'abord qu'on peut considérer des polynômes au sens usuel en une infinité de variables. Si S est un ensemble, on peut considérer $A[S]$ où A est un anneau comme la A-algèbre associée au monoïde $\mathbf{N}^{(S)}$ des applications à valeur dans $\mathbf{N}$ à support fini. On se donne maintenant un ensemble X de variables et l'on définit l'ensemble des dérivées $\Theta \times X$, que l'on notera Υ. L'élément (θ, x) de Υ sera noté $x_{(\theta)}$ et l'on définit une action de Θ sur Υ en posant $\theta'\, x_{(\theta)} = x_{(\theta'\theta)}$. L'ordre de l'opérateur de dérivation $\theta = \prod_{i=1}^{p} \delta_i^{\alpha_i}$ sera $\sum_{i=1}^{p} \alpha_i$, l'ordre de la dérivée $x_{(\theta)}$ sera l'ordre de θ. On notera $\mathrm{ord}\,\theta$ ou $\mathrm{ord}\,v$ l'ordre d'un opérateur de dérivation ou d'une dérivée.

On notera Θ_r l'ensemble des opérateurs différentiels d'ordre inférieur ou égal à r.

DÉFINITION 1. — *Soit* A_Δ *un anneau différentiel,* X *un ensemble, on appellera algèbre de polynômes différentiels sur* A *en les variables* X *l'algèbre* $A[\Upsilon]$, *qui sera notée* $A\{X\}_\Delta$, *ou* $A\{X\}$ *lorsqu'il n'y aura pas ambiguïté.*

On appellera monôme un produit de dérivées, et l'on notera $\mathcal{M}$ *l'ensemble des monômes.*

PROPOSITION 1. — *Soient* A_Δ *est un anneau différentiel,* X *un ensemble, il existe un unique ensemble* Δ' *d'opérations de dérivation sur* $A\{X\}$ *qui prolongent les dérivations de* A *et l'action de ces dérivations sur les dérivées, c'est à dire qu'identifiant* Δ *et* Δ' *on a bien* $\delta(1.x_\theta) = 1.x_{\delta\theta}$.

En outre, ces dérivations en font une algèbre différentielle sur A *et satisfont pour tout polynôme* $P = \sum_{i=1}^{p} c_i\, m_i$, *où les* m_i *sont des monômes et les* c_i *des coefficients dans* A,

$$\delta\, P = \sum_{i=1}^{p} \delta\, c_i\, m_i + \sum_{v \in \Upsilon} \frac{\partial\, P}{\partial\, v}\, \delta\, v.$$

PREUVE. Voir [BA V.16.1, prop. 1, p. 121]. ■

Pour tout anneau A, l'anneau des polynômes en n variables est l'anneau $A\{[1,n]\}$, que nous noterons conventionnellement $A\{n\}$, ou $A\{x_1, \ldots, x_n\}$ selon l'usage, lorsque le besoin se fera sentir d'individualiser les variables. Suivant les notations de Ritt, on notera $x_{i,(j)}$ la $j^{\text{ème}}$ dérivée de x_i pour des polynômes différentiels ordinaires et, par exemple, $x_{j,(111233)}$ la dérivée partielle $\delta_1^3 \delta_2 \delta_3^2 x_j$.

DÉFINITION 2. — *Si $\mathcal{F}$ est un corps différentiel, on appelle corps des fractions différentielles en n variables, et l'on note $\mathcal{F}\langle n\rangle$ le corps des fractions de $\mathcal{F}\{n\}$ muni de la dérivation induite.*

Conventionnellement, si A est un anneau sans dérivation, on pourra le considérer comme un anneau différentiel avec un ensemble de dérivation vide. Idéaux différentiels et algébriques coïncident alors trivialement, ce qui permet alors d'identifier les notations (S) et $[S]$; on identifiera de même $A[X]$ et $A\{X\}$, $k(X)$ et $k\langle X\rangle$. D'une manière générale, pour énoncer des résultats strictement identiques dans le cas algébrique et dans le cas différentiel, on utilisera les notations du cas différentiel.

AVERTISSEMENT. — **L'algèbre différentielle, initiée par Ritt, est une théorie distincte de celle des anneaux d'opérateurs différentiels. Il importe en particulier de ne pas confondre l'anneau des polynômes différentiels sur $A\{n\}$ avec l'algèbre de Weyl $A[x_1,\ldots,x_n,\frac{\partial}{\partial x_1},\cdots\frac{\partial}{\partial x_n}]$.** Une différence essentielle, tant d'un point de vue théorique que pour les applications effectives, est que $A\{n\}$ est une A algèbre commutative, mais pas de type fini, tandis que l'algèbre de Weyl est non commutative mais de type fini.

2. Graduations admissibles

DÉFINITION 3. — *Soient $\nu_1,\ldots,\nu_n$ et $\mu_1,\ldots,\mu_m$ des réels positifs ou nuls, pour toute dérivée $v=\delta_1^{a_1}\cdots\delta_m^{a_m}x_i$, on définit $g_{\nu,\mu}(v)=\nu_i+\sum_{j=1}^m a_j\mu_j$. Pour un monôme $M=\prod_{i=1}^p v_i^{a_i}$, on définit $g_{\nu,\mu}(M)=\sum_{i=1}^p a_i\,g(v_i)$.*

Si $\mu=0$ et $\nu_i=1$, g correspond au degré. En prenant $\mu_i=1$ et $\nu=0$, on appellera g le poids. On notera $\operatorname{wt}P$ le poids maximal des monômes de P.

En désignant par A_r le sous-espace vectoriel — algébrique ! — engendré par les monômes M tels que $g(M)=r$, on obtient une graduation $\mathcal{F}\{n\}=\sum_{r\in g(\mathcal{M})}A_r$. Les graduations ainsi définies seront appelées graduations admissibles et les vecteurs ν et μ les systèmes de poids de la graduation. Les polynômes homogènes pour le poids seront dits isobares.

Une graduation différentielle est une graduation telle que $\delta A_r\subset A_r$.

Lemme 1. — *Une graduation admissible est différentielle ssi $\mu=0$.*

PREUVE. On s'assure aisément qu'il est nécessaire et suffisant, pour qu'une graduation soit différentielle, que $g\delta_i v=gv$ pour toute dérivée v. Or $g\delta_i v=gv+\mu_i$, d'où la conclusion. ∎

Lemme 2. — *Soit P un polynôme différentiel, homogène pour une graduation admissible g. Alors pour toute dérivation δ, δP est homogène pour g, ssi les coefficients de P appartiennent au corps des constantes de $\mathcal{F}$.*

PREUVE. Il suffit de vérifier que pour un terme $M=c\prod_{i=1}^p v_i^{\alpha_i}$, $\delta_j M$ est homogène de poids $g\,M+\mu_j$, ssi $\delta_j\,c=0$. ∎

PROPOSITION 2. — *Un idéal différentiel $\mathcal{I}$ engendré par un ensemble Σ de polynômes à coefficients constants et homogènes pour une graduation admissible g est gradué pour g.*

PREUVE. On a $\mathcal{I}=(\Theta\,\Sigma)$ et en utilisant le lemme précédent ont peut donc décomposer tout polynôme de $\mathcal{I}$ en une somme d'éléments de $\mathcal{I}$ homogènes. ∎

Remarques. — 1) Si la graduation est différentielle, il est clair que l'on n'a guère besoin de supposer que les coefficients des générateurs soient constants.

2) Si l'idéal $\mathcal{I}$ est homogène pour une graduation différentielle, alors $\{\mathcal{I}\}$ et ses composantes sont homogènes.

3) En caractéristique 0, si $P \notin \mathcal{F}$, $\mathrm{wt}\,\theta P = \mathrm{ord}\,\theta + \mathrm{wt}\,P\ \theta \in \Theta$.

§ 3. GÉOMÉTRIE ALGÉBRIQUE DIFFÉRENTIELLE

1. Théorème de la base finie. Décomposition des idéaux radiciels

L'anneau différentiel $\mathcal{F}\{n\}$ n'est pas noetherien, même en ne considérant que les idéaux différentiels. Déjà en une variable, on peut montrer que les idéaux $\mathcal{I}_i = [x^2, \ldots, x_{(i)}^2]$ forment une chaîne d'idéaux emboîtés strictement croissante. Cependant, il existe une propriété de noetherianité pour l'ensemble des idéaux différentiels radiciels.

DÉFINITION 1. — *Un anneau de Ritt est dit radiciellement noetherien, si toute chaîne strictement croissante d'idéaux différentiels radiciels emboîtés est finie.*

THÉORÈME 1 (Théorème de la base finie de Ritt–Raudenbush). — *Soit A un anneau de Ritt, radiciellement noetherien, alors $A\{x\}$ est radiciellement noetherien.*

PREUVE. Voir [Ko2 chap. III § 4 th. 1 p. 126]. ∎

COROLLAIRE 1. — *L'anneau $\mathcal{F}\{n\}$ est radiciellement noetherien.*

PREUVE. La preuve par récurrence est immédiate, en utilisant le théorème. ∎

Lemme 1. — *Soit $\mathcal{I}$ un idéal radiciel de $\mathcal{F}\{n\}$, A et B deux polynômes tels que $AB \in \mathcal{I}$, alors $\mathcal{I} = \{\mathcal{I}, A\} \cap \{\mathcal{I}, B\}$.*

PREUVE. L'inclusion de gauche à droite est immédiate. Soit P dans $\{\mathcal{I}, A\} \cap \{\mathcal{I}, B\}$, $P^a = M + NA$ avec $M \in \mathcal{I}$ et $P^b = M' + N'B$ avec $M' \in \mathcal{I}$. En multipliant ces égalités membre à membre, on trouve $P^{a+b} = MM' + N'BM + NAM' + NN'AB \in \mathcal{I}$. Donc P appartient à $\mathcal{I}$. ∎

THÉORÈME 2. — *Soit $\mathcal{I}$ un idéal radiciel de $\mathcal{F}\{n\}$, il existe un unique ensemble fini E d'idéaux premiers tel que*

$$\mathcal{I} = \bigcap_{\Omega \in E} \Omega$$

et

$$\forall (\Omega, \Omega') \in E^2 \quad \Omega \subset \Omega' \Longrightarrow \Omega = \Omega'.$$

PREUVE. Supposons le théorème faux. En utilisant le cor. 1 du théorème de la base finie de Ritt-Raudenbush, on peut alors trouver un idéal radiciel $\mathcal{I}$ de $\mathcal{F}\{n\}$ ne vérifiant pas la conclusion et maximal. $\mathcal{I}$ n'est pas premier. Soient A et B deux polynômes tels que $AB \in \mathcal{I}$, $A \notin \mathcal{I}$ et $B \notin \mathcal{I}$. Alors $\{\mathcal{I}, A\}$ et $\{\mathcal{I}, B\}$ admettent une décomposition comme intersection finie d'idéaux premiers, sinon $\mathcal{I}$ ne serait pas maximal. Comme d'après le lemme 1, $\mathcal{I} = \{\mathcal{I}, A\} \cap \{\mathcal{I}, B\}$, $\mathcal{I}$ se décompose en une intersection finie d'idéaux premiers.

On peut alors retirer de l'ensemble de ces idéaux tous ceux qui sont inclus dans un autre. On obtient bien un ensemble vérifiant la conclusion du théorème. Soit maintenant deux ensembles d'idéaux premiers S et S' vérifiant la conclusion. Alors, pour tout $\Omega \in S$, il existe $\Omega' \in S'$ tel que $\Omega \subset \Omega'$ et il existe de même $\Omega'' \in S$ tel que $\Omega' \subset \Omega''$. On en déduit $\Omega = \Omega''$ et donc $\Omega = \Omega'$, ce qui assure l'unicité. ∎

2. Variétés. Composantes

Avant de définir des variétés algébriques différentielles, il est nécessaire de se livrer à quelques préliminaires. RITT définissait la variété associée à un ensemble de polynômes algébriques différentiels comme la classe de ses zéros, sur toutes les extensions possibles du corps de base. Mais ceci ne constitue pas un ensemble. KOLCHIN a remédié à cet inconvénient (cf. [Ko1]) en montrant qu'on pouvait se restreindre à prendre des zéros dans une extension universelle (cf. [Ko2 chap. III § 7 p.133]), notion que nous allons introduire.

Cette présentation, quelque peu technique offre une sorte d'analogue de la clôture algébrique, mais il s'agit en fait d'un objet beaucoup plus grand. On peut également le définir dans le cas algébrique, en prenant un ensemble de dérivations vide ; il a alors, comme dans le cas différentiel un degré de transcendance infini par rapport au corps de base.

DÉFINITION 2. — *Soit $\mathcal{I}$ un idéal de $\mathcal{F}\{n\}$, on appelle zéro de $\mathcal{I}$ un doublet $(\mathcal{G}, \eta)$, où $\mathcal{G}$ désigne une extension de $\mathcal{F}$ et η un élément de $\mathcal{G}^n$, tel que $P(\eta) = 0$ pour tout polynôme P de $\mathcal{I}$. On appelle zéro générique de $\mathcal{I}$ un zéro $(\mathcal{G}, \eta)$ tel que $\{P \in \mathcal{F}\{n\} | P(\eta) = 0\} = \mathcal{I}$.*

Lemme 2. — Tout idéal premier $\mathcal{I}$ de $\mathcal{F}\{n\}$ admet un zéro générique.

PREUVE. Comme $\mathcal{I}$ est premier, l'anneau différentiel $\mathcal{F}\{n\}/\mathcal{I}$ est intègre. Soit $\mathcal{G}$ son corps de fractions. On peut prendre pour zéro générique $(\mathcal{G}, \eta)$ où η_i désigne l'élément de $\mathcal{G}$ associé à x_i par le morphisme canonique de $\mathcal{F}\{n\}$ dans $\mathcal{G}$. ∎

DÉFINITION 3. — *indeExtension universelle Soit $\mathcal{F}$ un corps différentiel, on appelle extension universelle de $\mathcal{F}$ une extension $\mathcal{U}$ telle que pour toute extension finie $\mathcal{F} \subset \mathcal{G} \subset \mathcal{U}$ tout entier $n > 0$ et tout idéal $\mathcal{I} \neq \{1\}$ de $\mathcal{G}\{n\}$, il existe un zéro générique de $\mathcal{I}$ dans $\mathcal{U}$.*

PROPOSITION 1. — *Si $\mathcal{U}$ est une extension universelle de $\mathcal{F}$, $\mathcal{U}$ est une extension universelle de toute extension finie de $\mathcal{F} \subset \mathcal{G} \subset \mathcal{U}$.*

PREUVE. Voir [Ko2 p. 133] ∎

PROPOSITION 2. — *Si $\mathcal{U}$ est une extension universelle de $\mathcal{F}$, $\mathcal{U}$ est algébriquement clos et son corps des constantes est un corps algébriquement clos contenant la clôture algébrique du corps des constantes de $\mathcal{F}$.* ∎

THÉORÈME 3 (Kolchin). — *Tout corps différentiel admet une extension universelle.*

PREUVE. Voir [Ko2 p. 134]. ∎

Remarque 1. — Il n'est pas gênant que l'extension universelle ne soit pas unique. En effet, il suffit d'en choisir une et de la conserver. Par définition même, on n'aura jamais besoin d'une extension plus grande. D'autre part, la démonstration de Kolchin construit pour tout corps $\mathcal{F}$ une extension universelle définie de manière unique.

Ces préliminaires permettent de définir les variétés algébriques différentielles. Cette construction, bien que nécessaire pour travailler en toute rigueur, est sans grande conséquence sur le fond. À part le fait qu'elle permet de recourir à des éléments génériques, ce qui est parfois commode, elle nous ramène surtout à travailler avec des idéaux premiers, les composantes associées n'en étant que le reflet.

Par la suite on supposera choisie une extension universelle $\mathcal{U}$ de $\mathcal{F}$.

DÉFINITION 4. — *Soit Σ un sous-ensemble de $\mathcal{F}\{m\}$, on appelle variété algébrique différentielle associée à Σ l'ensemble $V(\Sigma)$ des zéros des polynômes de Σ dans une extension universelle de $\mathcal{F}$, qui seront appelés les points de la variété.*

On appellera espace affine différentiel de dimension p sur $\mathcal{F}$, et l'on notera $\mathbf{A}^p_{\mathcal{F}}$, l'ensemble des zéros de l'idéal $[0]_{\mathcal{F}\{p\}}$, c'est-à-dire $\mathcal{U}^p$.

Donnons quelques propriétés élémentaires des variétés algébriques différentielles (par la suite, nous dirons seulement variété, lorsqu'il n'y aura pas d'ambiguïté). Elles généralisent exactement la situation algébrique.

PROPOSITION 3. — *L'intersection de deux variétés algébriques V_1 et V_2 définies par $\mathcal{I}$ et $\mathcal{I}'$ est une variété algébrique définie par $\mathcal{I}+\mathcal{I}'$. L'union de V_1 et V_2 est elle aussi une variété, définie par $\mathcal{I}\cap\mathcal{I}'$.* ■

THÉORÈME 4 (Théorème des zéros). — *Soit V une variété définie par un sous-ensemble Σ de $\mathcal{F}\{n\}$, alors l'ensemble $\{P \in \mathcal{F}\{n\} | \forall \eta \in V P(\eta) = 0\}$ est un idéal radiciel de $\mathcal{F}\{n\}$, égal à $\{\Sigma\}$.*

PREUVE. Voir [Ko2 chap IV § 2 p. 146].

DÉFINITION 5. — *On appelle variété irréductible, une variété qui ne peut pas s'exprimer comme réunion de deux variété non vides.*

COROLLAIRE 1. — *Toute variété V peut s'exprimer comme une réunion finies de variétés irréductibles, qu'on appellera les composantes de V.*

PREUVE. Soit $\mathcal{I}$ l'idéal radiciel définissant V, $\mathcal{I}$ peut se décomposer en une intersection finie d'idéaux premiers $\mathcal{I}_i$ définissant chacun une variété irréductible V_i. V est manifestement égal à la réunion des V_i. ■

COROLLAIRE 2. — *Tout idéal $\mathcal{I} \neq \{1\}$ définit une variété algébrique non vide.*

PREUVE. Si $\mathcal{I}$ est différent de $\{1\}$, $\mathcal{I}$ s'exprime comme intersection finie d'idéaux premiers tous différents de $\{1\}$. Chacun d'entre eux admet un zéro générique, qui est aussi un zéro de $\mathcal{I}$. ■

3. Espace projectif

DÉFINITION 6 (Espace projectif, variétés projectives). — *Soit $\mathcal{F}$ un corps différentiel, $\mathcal{U}$ une extension universelle de $\mathcal{F}$, on appellera espace projectif de dimension p sur $\mathcal{F}$, $\mathbf{P}_p$, l'ensemble des classes d'équivalence de $\mathcal{U}^{p+1} \setminus \{0\}$ par la relation identifiant les $p+1$-uplets multiples l'un de l'autre.*

On appellera variété différentielle projective, l'ensemble $V(\Sigma)$ des classes d'équivalence des zéros dans $\mathcal{U}^{p+1} \setminus \{0\}$ d'un ensemble de polynômes homogènes Σ de $\mathcal{F}\{p+1\}$. Ces classes d'équivalences seront appelées les points de la variété projective. L'ensemble Σ sera dit définir la variété.

On identifiera $\mathbf{A}^p_{\mathcal{F}}$ avec l'ensemble des éléments de $\mathbf{P}_p$ dont les représentants ont une première coordonnée non nulle, qui seront dits *points à distance finie.*

Lemme 3. — *L'ensemble des polynômes qui s'annulent sur tous les représentants des classes d'équivalence formant une variété projective différentielle V, définie par un idéal homogène $\mathcal{J}$, est un idéal différentiel radiciel homogène $\mathcal{I}$ définissant V. On notera cet idéal $\mathcal{I}(V)$. L'idéal $\mathcal{I} \cap \mathcal{J}$ définit également la variété.*

PREUVE. Cet ensemble est manifestement un idéal. Soit un polynôme $P \in \mathcal{I}$ de degré d, on peut le décomposer en une somme de polynômes homogènes P_i de degré i. Comme on est en caractéristique 0, on peut trouver $d+1$ constantes a_j distinctes et non nulles dans $\mathcal{F}$. L'ensemble des classes de V est invariant par multiplication par un élément non nul, donc $P(a_j x) \in \mathcal{I}$ $j \in [1, d]$. Comme a_j est une constante $P(a_j x) = \sum_{i=1}^{d} a_j^i P_i$. Par un argument classique d'algèbre linéaire, on conclut que les P_i appartiennent à $\mathcal{I}$. Donc $\mathcal{I}$ est homogène.

Pour s'assurer que $\mathcal{I}$ définit bien V, il suffit de vérifier que l'ensemble W constitué des représentants de V et de l'origine forme une variété différentielle algébrique affine. $\mathcal{I}$ est un idéal dans $\mathcal{F}\{x_0, \ldots, x_n\}$; prenons une variable supplémentaire y et considérons l'idéal $\mathcal{I}' = [P(y\, x_0, \ldots, y\, x_n) | P \in \mathcal{I}] : (y)^\infty$ dans $\mathcal{F}\{X, y\}$. W est manifestement la variété définie par $\mathcal{I}' \cap \mathcal{F}\{X\}$.

Le fait que $\mathcal{I} \cap \mathcal{J}$ définisse V est immédiat puisque $V(\mathcal{J}) \subset W$. ∎

Remarques. — 1) Cette définition contient en particulier le cas algébrique pur en prenant un ensemble de dérivation vide.

2) Contrairement au cas différentiel affine, ou au cas algébrique projectif, il n'y a plus bijection entre les idéaux radiciels homogènes et les variétés projectives. Il suffit de considérer l'idéal $[x_0']$ dans $\mathcal{F}\{x_0, x_1\}$, manifestement premier, mais dont les classes des zéros constituent $\mathbf{P}_1$ tout entier.

Lemme 4. — *Soient G le groupe d'automorphismes de $\mathcal{U}\{n+1\}$ $\{g_a\colon P(x) \mapsto P(a\, x) | x \in \mathcal{U}^*\}$, $\mathcal{J}$ un idéal différentiel premier homogène de $\mathcal{F}\{n+1\}$, alors la variété projective V définie par $\mathcal{J}$ est égale à la variété projective définie par l'idéal $\mathcal{J}_G = \{P \in \mathcal{J} | \forall g \in G\, gP \in [\mathcal{J}]_{\mathcal{U}\{n+1\}}\}$. Cet idéal est premier et égal à $\mathcal{I}(V)$.*

PREUVE. On s'assure aisément que G est un groupe et $\mathcal{J}_G$ un idéal. Il est immédiat que les représentants des classes de $\mathcal{J}$ sont des zéros de $\mathcal{J}_G$. Donc $\mathcal{J}_G \subset \mathcal{I}(V)$. Soient $P \notin \mathcal{J}_G$ un polynôme de $\mathcal{J}$, $(\eta_0, \ldots, \eta_n)$ un zéro générique de $\mathcal{J}$, pour tout élément non nul a de $\mathcal{F}$,

$a\eta$ est un représentant d'un zéro de la variété. On peut choisir a tel que $g_a\,P \notin [\mathcal{J}]_{\mathcal{U}\{n+1\}}$, mais dans ce cas P ne s'annule pas sur $a\eta$. Donc $\mathcal{I}(V) \cap \mathcal{J} \subset \mathcal{J}_G$. D'après le lemme 3, V est bien la variété définie par $\mathcal{J}_G$.

Montrons que$\mathcal{J}_G$ est premier. Soit $PQ \in \mathcal{J}_G$, pour a générique sur $\mathcal{F}$, g_aP ou g_aQ appartiennent à l'ideal

$$[\mathcal{J}]_{\mathcal{F}\langle a\rangle\{n+1\}} = \mathcal{F}\langle a\rangle\,\mathcal{J} = [\mathcal{J}]_{\mathcal{U}\{n+1\}} \cap \mathcal{F}\langle a\rangle\{n+1\},$$

car cet idéal est premier par généricité de a. On en déduit que P ou Q appartiennent à $\mathcal{J}_G$. L'égalité de $\mathcal{J}_G$ et $\mathcal{I}(V)$ est alors immédiate. ■

DÉFINITION 7. — *Un variété projective V sera dite irréductible si $\mathcal{I}(V)$ est premier. Un point générique d'une variété irréductible est un point admettant un représentant qui est un zéro générique de $\mathcal{I}(V)$.*

PROPOSITION 4. — *Soit V une variété différentielle, il existe un unique ensemble fini $\{\mathcal{I}_1, \ldots, \mathcal{I}_r\}$ d'idéaux radiciels premiers stables par G et disjoints entre eux, tels que $\mathcal{I} = \bigcap_{i=1}^{r} \mathcal{I}_i$.*

PREUVE. Soit $\mathcal{J}$ un idéal définissant V. Utilisant le th. 1.2 p. 8, on peut decomposer $\{\mathcal{J}\}$ en $\bigcap_{i=1}^{s} \mathcal{J}_i$ où les $\mathcal{J}_i$ sont premiers. Utilisant le lemme 4, $\mathcal{I}(V) = \bigcap_{i=1}^{s} \mathcal{I}_{jG}$ et il suffit d'éliminer ceux des idéaux qui sont strictement inclus dans un autre. ■

COROLLAIRE 1. — *Il y a bijection entre les variétés différentielles projectives irréductibles et les idéaux premiers homogènes stables par G. Plus généralement, il y a bijection entre les variétés différentielles projectives et les idéaux radiciels stables par G.*

Pour toute variété projective V définie par un idéal $\mathcal{J}$, $\mathcal{I}(V) = \{\mathcal{J}_G\} = \{\mathcal{J}\}_G$.

PREUVE. La première partie est une conséquence immédiate du lemme 4.

Utilisant la proposition, on décompose $\mathcal{I}(V) = \bigcap_{i=1}^{s} \mathcal{I}_i$. Puis, on procède comme pour la démonstration du lemme 4. Soit η_i un zéro générique de $\mathcal{I}_i$. Il est aisé de voir que si $P \notin \mathcal{J}_G$, il existe $a \in \mathcal{U}^*$ et η_i tel que $g_a\,P(\eta_i) \neq 0$. Donc $\mathcal{I}(V)\cap\mathcal{J} \subset \mathcal{J}_G$. D'autre part, pour tout $P \in \mathcal{J}_G$, tout η_i et tout $a \in \mathcal{U}^*$, $g_a\,P(\eta_i) = 0$, donc $\mathcal{J}_G \subset \mathcal{I}(V)$. Utilisant le lemme 3, $\mathcal{J}_G$ définit donc la variété V. En fait, on a même mieux, car d'après la démonstration de ce lemme $\mathcal{J}_G$ défini la variété affine W correspondant à l'ensemble des représentants des points de V. On en déduit donc que $\mathcal{I}(V) = \{\mathcal{J}_G\}$.

Pour prouver que $\mathcal{I}(V) = \{\mathcal{J}\}_G$, il suffit de montrer que cet idéal, qui définit lui aussi W, est radiciel. Supposons que $(g_a\,P)^r \in \mathcal{J}' = [\{\mathcal{J}\}]_{\mathcal{U}\{n+1\}}$. Comme $\{\mathcal{J}\}$ est radiciel et qu'on est en caractéristique 0, $\mathcal{J}'$ est également radiciel (voir [ZS vol. II th. 37 p. 226]). Donc $g_a\,P \in \mathcal{J}'$.

Ceci montre bien la correspondance biunivoque entre idéaux radiciels stables par G et les variétés algébriques différentielles projectives. ■

On peut achever par deux lemmes faciles, laissés au lecteur, nécessaires pour compléter notre "outillage".

Lemme 5. — *Si V est une variété projective dans $\mathbf{P}_p$ admettant des points à distance finie, alors un point de V est un point générique ssi c'est un point générique de $V \cap \mathbf{A}^p$.* ■

Lemme 6. — *Soit V une variété projective de $\mathbf{P}_p$, on obtient un idéal définissant $V \cap \mathbf{A}^p$ en évaluant x_0 à 1 et toutes les dérivées propres de x_0 à 0 dans $\mathcal{I}(V)$.* ∎

Par la suite, on entendra par variété différentielle algébrique une variété affine ou projective.

4. Topologie de Zariski différentielle

PROPOSITION 5. — *Soit V une variété différentielle, affine ou projective, on définit un topologie sur V, en prenant comme fermés les sous-variétés de V.*

PREUVE. Voir [Ko2 chap IV § 1], où le cas affine est traité. Le cas projectif s'en déduit immédiatement, en remarquant que $V \cap W$ est la variété définie par $\mathcal{I}(V) + \mathcal{I}(W)$ (2). ∎

On appellera cette topologie la *topologie de Zariski différentielle.*

Lemme 7. — *Soient V une variété différentielle, η un point de V, alors η est dense dans V ssi V est irréductible et η est générique.* ∎

PROPOSITION 6. — *Soit V une variété projective de $\mathbf{P}_n$ définie par un idéal $\mathcal{I}$ de $\mathcal{F}\{x_0, \ldots, x_n\}$, la projection de V sur $\mathbf{P}_p$ est une variété projective définie par l'idéal $\mathcal{I} \cap \mathcal{F}\{x_0, \ldots, x_p\}$.*

Si V est une variété affine de $\mathbf{A}^n$, l'adhérence de Zariski de la projection de V sur $\mathbf{A}^p$ est définie par $\mathcal{I} \cap \mathcal{F}\{x_1, \ldots, x_p\}$. ∎

DÉFINITION 8. — *Soit P un polynôme de $\mathcal{F}\{x_1, \ldots, x_n\}$, on appelle homogénéisé de P et l'on note $\widetilde{P}$ le numérateur de la fraction réduite $P(x_1/x_0, \ldots, x_n/x_0)$ dans $\mathcal{F}\langle x_0, \ldots, x_n\rangle$.*

Si $P \in \mathcal{F}\{x_0, \ldots, x_n\}$ est un polynôme homogène, on appellera déshomogénéisé de P le polynôme obtenu en évaluant x_0 à 1 dans P. On le note $\widehat{P}$.

Lemme 8. — *Soit $\mathcal{I}$ un idéal de $\mathcal{F}\{n\}$ et V la variété affine qu'il définit, l'adhérence dans $\mathbf{P}_n$ de V est définie par $\widetilde{\mathcal{I}}$. Si Σ est un ensemble de polynômes définissant V, la variété projective définie par $\widetilde{\Sigma}$ contient l'adhérence projective de V.*

Si V est une variété projective de $\mathbf{P}_n$, $V \cap \mathbf{A}^n$ est définie par l'idéal $\widehat{\mathcal{I}}(V)$. ∎

DÉFINITION 9. — *On appellera couple de polynômes pertinent sur une variété différentielle V, un couple (P, Q) de polynômes homogènes et de même degré tels que $\forall a \in \mathcal{F}^*$ $P(a\,x)Q(x) - Q(a\,x)P(x) \in \mathcal{I}(V)$.*

DÉFINITION 10. — *Soit V une variété différentielle affine, une fonction f de V dans $\mathcal{F}$ est dite régulière en un point η de V si elle est définie en η, s'il existe un couple (P, Q) de polynômes et un voisinage ouvert $\mathcal{O}$ de η tel que $\mathcal{O} \subset V \setminus V(Q)$ et $f_{|\mathcal{O}} = P/Q$.*

Si V est une variété projective, f de V dans $\mathcal{F}$ est régulière en un point η s'il existe un voisinage ouvert $\mathcal{O}$ de η et un couple (P, Q) pertinent tels que tout point de $\mathcal{O}$ admette un représentant $\epsilon \in \mathcal{U}^{n+1}$ avec $Q(\epsilon) \neq 0$ et tels que $f_{|\mathcal{O}} = P/Q$.

(2) En revanche il est en général faux que $\mathcal{J}_1 + \mathcal{J}_2$ définissent $V \cap W$ si $\mathcal{J}_1$ et $\mathcal{J}_2$ sont deux idéaux homogènes définissant les variétés projectives V et W.

Remarques. — 1) Pour que P et Q satisfassent $P(a\,x)/Q(a\,x) = P(x)/Q(x)$, il est nécessaire mais non suffisant qu'ils soient homogènes et de même degré, à moins qu'on ne soit sur un corps de constantes, ou que P et Q soient d'ordre 0.

2) Pour tous polynômes P et Q, notant d_1 et d_2 leurs degrés respectifs, d le maximum de ces degrés, P' et Q' les polynômes $\widetilde{P}\,x_0^{d-d_1}$ et $\widetilde{Q}\,x_0^{d-d_2}$, on a :

$$P'(a\,x)Q'(x) - Q'(a\,x)P'(x) = 0\ \forall a \in \mathcal{F}.$$

Lemme 9. — *Si (P,Q) et (R,S) sont pertinents par rapport à $\mathcal{I}$, $(\delta\,P\,Q + P\,\delta\,Q, Q^2)$, $(PS+RQ, QS)$ et (PR, QS) sont pertinents.*

PREUVE. Comme

$$\begin{aligned}&P(ax)R(ax)S(x)Q(x) - P(x)R(x)S(ax)Q(ax) = \\ &\quad (P(ax)Q(x) - P(x)Q(ax))R(ax)S(x) + (R(ax)S(x) - R(x)S(ax))P(x)Q(ax) \in \mathcal{I},\end{aligned}$$

(PR, QS) est pertinent. On s'assure aisément que pour tout polynôme P (P,P) est pertinent, donc il suffit de vérifier que si (P,Q) et (R,Q) sont pertinents, $(P+R,Q)$ est pertinent, ce qui résulte alors d'un calcul aisé. D'autre part,

$$\begin{aligned}&(\delta\,P(ax)\,Q(ax) - P(ax)\,\delta\,Q(ax))Q^2(x) - (\delta\,P(x)\,Q(x) - P(x)\,\delta\,Q(x))Q^2(ax) = \\ &\delta(P(ax)\,Q(x) - P(x)\,Q(ax))Q(x)Q(ax) + (P(x)\,Q(ax) - P(ax)\,Q(x))(\delta\,Q(ax)Q(x) + \delta\,Q(x)Q(ax)) \in \mathcal{I},\end{aligned}$$

d'où l'on conclut que le couple exprimant la dérivée par δ est pertinent. ∎

DÉFINITION 11. — *On appelle corps de fonctions d'une variété algébrique différentielle irréductible V non vide, les classes d'équivalences de doublets $(f, \mathcal{O})$, où f est une fonction à valeurs dans $\mathcal{F}$ régulière sur l'ouvert $\mathcal{O}$ de V, obtenues en identifiant $(f,\mathcal{O})$ et $(g,\mathcal{O}')$ si f et g coïncident sur $\mathcal{O} \cap \mathcal{O}'$. On le note $\mathbf{K}(V)$.*

Si V est une variété différentielle affine irréductible, définie par un idéal premier $\mathcal{I}$ on appellera anneau de coordonnnées de V l'anneau $\mathcal{F}\{n\}/\mathcal{I}$ qui sera noté $A(V)$.

Le fait que $\mathbf{K}(V)$ soit un corps est immédiat si V est affine. Dans le cas projectif, c'est une conséquence directe du lemme précédent. Ce corps est manifestement une extension différentielle finie de $\mathcal{F}$, isomorphe dans le cas affine au corps des fractions de $A(V)$.

N'ayant pas trouvé de références pour un espace projectif différentiel, il m'a fallu développer cette notion dans la mesure où elle présente quelques difficultés techniques qui n'apparaissent pas dans le cadre algébrique. On dispose maintenant d'un matériel suffisant. Presque tous les résultats classiques sur les morphismes de variétés algébrique (cf. [Ha chap. I § 3]) s'étendent aux variétés différentielles. Il faut cependant souligner une différence notable, bien qu'elle soit sans grande conséquence dans la suite de notre étude.

Remarque 3. — Dans le cas algébrique, l'ensemble des fonctions $f\colon V \mapsto \mathcal{F}$, régulières en tout point d'une variété affine coïncide avec l'anneau de coordonnées de V. Ce n'est plus vrai pour une variété algébrique différentielle. Il suffit de considérer $V = V(x' - x)$ et $f = 1/(x-1)$.

Définition 12. — *On notera $\mathcal{O}(V)$ l'anneau des fonctions régulières en tout point d'une variété algébrique différentielle V.*

Soient X et Y deux variétés algébriques différentielles, V un ouvert de X on appellera morphisme de V dans Y une application $\phi: V \mapsto Y$, continue pour la topologie de Zariski, et telle que pour tout ouvert $\mathcal{O}$ de Y et toute fonction f régulière sur $\mathcal{O}$, $f \circ \phi: \phi^{-1}(\mathcal{O}) \mapsto \mathcal{F}$ est régulière.

On pourra se reporter à l'article [Car2] de Giuseppa Carra'-Ferro pour plus de détails et des références plus complètes.

§ 4. APPROCHE COMBINATOIRE

1. Ensembles caractéristiques

Les définitions qui vont suivre sont à la base de la méthode effective de Ritt–Wu. Nous les retrouverons au chapitre IV d'un point de vue plus effectif, mais il est utile de les donner ici afin d'énoncer certains résultats théoriques. On considère une algèbre de polynômes différentiels sur un corps différentiel $\mathcal{F}_\Delta$ de caractéristique 0, avec un ensemble fini de variables $X = \{x_1, \ldots, x_n\}$. On désignera par m le cardinal de Δ. On reprend ici la présentation et les notations de [Ko2], avec des renvois aux démonstrations. Dans la mesure où l'anneau de base est un corps de caractéristique 0, on peut simplifier en modifiant certaines définitions. On donnera alors des démonstrations explicites si les objets ne coïncident pas exactement.

On rappelle qu'on note Θ le monoïde des opérateurs engendré par Δ, et $\Upsilon = \Theta X$ l'ensemble des dérivées.

Définition 1. — *On dira qu'un ordre $<$ sur Υ est admissible si $v < v' \implies \theta v < \theta v'$ et si $v \leq \theta v$.*

Proposition 1. — *Tout ordre admissible sur Υ est un bon ordre, c'est à dire que toute chaîne décroissante d'élément de Υ est stationnaire à partir d'un certain rang.*

preuve. Voir [Ko2 chap. 0 § 17 lemme 15 p. 49].

Définition 2. — *Soit $v = x_{i,(\theta)}$ une dérivée, on appelle classe de v l'indice i de la variable correspondante.*

On va définir un ordre admissible sur Υ, d'autres seront donnés au chapitres IV.

Définition 3. — *Θ est isomorphe au monoïde $\mathbf{N}^m$, on l'ordonne en choisissant un ordre admissible pour la structure de monoïde, qui respecte le degré, c'est-à-dire ici l'ordre de dérivation, par exemple l'ordre lexicographique inverse. On définit alors un ordre sur Υ, en posant*

$$x_{i,(\theta)} < x_{i',(\theta')} \iff \theta < \theta' \quad \text{ou } \theta = \theta' \textit{ et } i < i'.$$

Cet ordre sera appelé ordre différentiel, provenant de l'ordre choisi sur Θ

On s'assure aisément que cet ordre est admissible. Par la suite, on suppose qu'un ordre admissible $<$ a été choisi, et l'on va l'étendre en un préordre sur les polynômes différentiels.

Définition 4. — *On dit qu'un ordre admissible respecte l'ordre de dérivation si* $\operatorname{ord} v > \operatorname{ord} \nu \implies v > \nu$.

On s'assure aisément que si l'ordre sur Θ respecte l'ordre de dérivation, alors l'ordre différentiel sur Υ aussi.

Définition 5. — *Soit $P \notin \mathcal{F}$ un polynôme différentiel, on appelle dérivée dominante de P et l'on note v_P la plus grande dérivée intervenant dans P. L'ordre et la classe de P seront ceux de v_P. Dans ce contexte, le degré de P sera son degré en v_P. On obtient un préordre sur $\mathcal{F}\{X\}_\star$ prolongeant $<$ en posant $P \leq Q$ si*

A) $P \in \mathcal{F}$,

B) $P, Q \notin \mathcal{F}$ et $v_P < v_Q$,

C) $P, Q \notin \mathcal{F}$, $v_P = v_Q$ et $\deg P \leq \deg Q$.

On conviendra de noter $P < Q$ si $P \leq Q$ et $Q \not\leq P$ et $P \cong Q$ si $P \leq Q$ et $Q \leq P$.

Si $P \in \mathcal{F}^*$, on posera $\deg P = 0$ et $\deg P = -1$ si $P = 0$.

Considérant P comme un polynôme dans $\mathcal{F}[\nu < v_P][v_P]$. On appelle initial de P le coefficient dominant de P et séparant de P $\frac{\partial P}{\partial v_P}$. On les notera I_P et S_P.

Remarque 1. — Pour tout opérateur de dérivation $\theta \neq 1$ $S_P = I_{\theta P}$.

Définition 6 (Réduction). — *Soient P et $Q \notin \mathcal{F}$ deux polynômes de $\mathcal{F}\{X\}$, P est dit partiellement réduit par rapport à Q si P ne contient aucune dérivée stricte de v_Q, et réduit par rapport à Q s'il est partiellement réduit et si $\deg_{v_Q} P < \deg Q$. Si $Q \in \mathcal{F}^*$, P est réduit par rapport à Q si $P = 0$. Dans le cas contraire, on dira que P est irréductible.*

On dira que P est réduit par rapport à un sous-ensemble Σ de $\mathcal{F}\{X\}$ si P est réduit par rapport à chacun de ses éléments.

Définition 7 (Ensemble autoréduit). — *On appelle ensemble autoréduit de $\mathcal{F}\{n\}$, un ensemble de polynômes non nuls Σ, éventuellement vide, tel que pour tout $P \in \Sigma$, P est réduit par rapport à $\Sigma \setminus \{P\}$.*

Proposition 2. — *Tout ensemble autoréduit de polynômes de $\mathcal{F}\{X\}$ est fini.*

preuve. Voir [Ko2 chap. I § 9 p. 77] ■

On va étendre $\leq$ en un préordre sur les ensembles autoréduits — un singleton est manifestement un ensemble autoréduit — de la manière suivante.

Définition 8. — *Soientt $\mathcal{A} = \{A_1, \ldots, A_r\}$ et $\mathcal{B} = \{B_1, \ldots, B_s\}$ deux ensembles autoréduits non vides, où les polynômes sont supposés donnés par ordre croissant. On posera $\mathcal{A} < \mathcal{B}$ si*

i) il existe $k \leq \min(r, s)$ tel que $A_i \cong B_i$ pour $i < k$ et $A_k < B_k$, ou si

ii) $r > s$ et $A_i \cong B_i$ pour $i \leq s$.

Par convention, $\emptyset > \mathcal{A}$, pour tout $\mathcal{A}$ autoréduit non vide. Si $r = s$ et $A_i \cong B_i$ $i \leq r$, on notera $\mathcal{A} \cong \mathcal{B}$. On posera $\mathcal{A} \leq \mathcal{B}$, si $\mathcal{A} < \mathcal{B}$ ou si $\mathcal{A} \cong \mathcal{B}$.

On s'assure aisément que ceci définit bien un préordre.

Proposition 3. — *Dans tout ensemble E d'ensembles autoréduits, il existe un élément minimal pour ce préordre.*

preuve. Voir [Ko2 chap. I § 10 p. 81] ■

DÉFINITION 9 (Ensemble caractéristique). — *Soit $\mathcal{I}$ un idéal différentiel de $\mathcal{F}\{n\}$, on appelle ensemble caractéristique de $\mathcal{I}$ un ensemble autoréduit minimal parmi les ensembles autoréduits constitués d'éléments de $\mathcal{I}$.*

Lemme 1. — *Si $\mathcal{A}$ est un ensemble caractéristique d'un idéal $\mathcal{I}$, pour tout polynôme A de $\mathcal{A}$, I_A et S_A n'appartiennent pas à $\mathcal{I}$.*

PREUVE. Il est aisé de voir que I_A et S_A sont non nuls et réduits par rapport à $\mathcal{A}$. Si l'un d'eux appartenait à $\mathcal{I}$, on pourrait former un ensemble autoréduit d'éléments de $\mathcal{I}$ plus petit que $\mathcal{A}$ en lui adjoignant les éléments de $\mathcal{A}$ qu'il ne réduit pas. ∎

PROPOSITION 4. — *Soient $\mathcal{A} = \{A_1, \ldots, A_r\}$ un ensemble autoréduit, et P un polynôme différentiel de $\mathcal{F}\{X\}$, alors il existe un polynôme différentiel P_0, réduit par rapport à $\mathcal{A}$ et des entiers $\alpha_1, \ldots, \alpha_r$ et $\beta_1, \ldots, \beta_r$ tels que*

$$\left(\prod_{i=1}^{r}(I_{A_i})^{\alpha_i}\,(S_{A_i})^{\beta_i}\right) P - P_0 = \sum_{j=1}^{s} M_j\,\theta_j\,A_{i_j},$$

où $\theta_1\,A_{i_1} \leq P$ et $\theta_j\,A_{i_j} > \theta_{j'}\,A_{i_{j'}}$ si $j > j'$. On notera alors $P \xrightarrow{\mathcal{A}} P_0$.

PREUVE. Ceci résultera d'un algorithme de réduction qui sera détaillé au chapitre IV. On peut aussi se reporter à [Ko2 chap I § 9 p. 79]. ∎

PROPOSITION 5. — *Si $\mathcal{A}$ est un ensemble caractéristique d'un idéal $\mathcal{I}$ de $\mathcal{F}\{n\}$, alors pour tout polynôme P de $\mathcal{I}$, $P \xrightarrow{\mathcal{A}} 0$.*

Si $\mathcal{I}$ est premier, alors pour tout polynôme P de $\mathcal{F}\{X\}$, $P \in \mathcal{I}$ ssi $P \xrightarrow{\mathcal{A}} 0$.

PREUVE. D'après la prop. 1, toute chaîne de réductions est finie, donc $P \xrightarrow{\mathcal{A}} P_0$, où P_0 est réduit par rapport à $\mathcal{A}$. Comme $P_0 \in \mathcal{I}$, si P_0 était non-nul, on pourrait comme dans la démonstration du lemme 1, obtenir un ensemble caractéristique plus petit que $\mathcal{A}$, ce qui est impossible.

Si $P \xrightarrow{\mathcal{A}} 0$, on a donc $(\prod_{i=1}^{r} I_{A_i}^{\alpha_i}\, S_{A_i}^{\beta_i})\, P \in [\mathcal{A}]$, ce polynôme appartient donc également à $\mathcal{I}$. Si $\mathcal{I}$ est premier, en utilisant le lemme 1, on conclut que $P \in \mathcal{I}$. ∎

DÉFINITION 10. — *Soit C un sous-ensemble de $\mathcal{R}$, on appelle pseudo-syzygies entre éléments de C les couples $(\theta\,P, \theta'\,Q)$ où P et Q appartiennent à C, (θ, θ') sont deux éléments de $\Theta \setminus \{1\}$, $v_{\theta P} = v_{\theta' Q}$ et θ, θ' sont sans facteur commun. Le S-polynôme associé à une pseudo-syzygie est le polynôme $(S_Q/\mathrm{pgcd}(S_P, S_Q))\theta P - (S_P/\mathrm{pgcd}(S_P, S_Q))\theta' Q$.*

Si tous les S-polynômes associés aux syzygies entre éléments de C sont réduits à 0 par C, C est dit cohérent.

PROPOSITION 6. — *Soit C un sous-ensemble autoréduit et cohérent de $\mathcal{R}$, c'est un ensemble caractéristique d'un idéal premier $\mathcal{I}$ de $\mathcal{R}$ ssi notant v_C l'ensemble des dérivées qui apparaissent dans les éléments de C et H_C le produit des initiaux et des séparants des polynômes de C, l'idéal $(C) : H_C^\infty$ de $\mathcal{F}[v_C]$ est premier et aucun élément non nul de cet idéal n'est réduit par rapport à C.*

Dans ce cas, $\mathcal{I} = [C] : H_C^\infty$.

PREUVE. Voir [Ko2 chap IV § 9 lemme 2 p. 167]. ∎

COROLLAIRE 1. — *Soit P un polynôme premier de $\mathcal{F}\{n\}$, il forme un ensemble caractéristique d'un idéal premier égal à $[P] : (I_P S_P)^\infty$, qu'on appellera la composante générale de P.* ∎

2. Fonction et polynôme de transcendance

Un idéal algébrique premier se voit attacher deux invariants privilégiés, la dimension et le degré. La situation est analogue dans le cas différentiel où l'on considérera la dimension et l'ordre.

DÉFINITION 11. — *Soit $\mathcal{F}$ un corps différentiel, $\mathcal{G}$ une extension de $\mathcal{F}$ et η un élément de $\mathcal{G}$. On dit que η est différentiel sur $\mathcal{F}$, s'il existe un polynôme non nul P de $\mathcal{F}\{1\}$, tel que $P(\eta) = 0$. $\mathcal{G}$ est une extension différentielle de $\mathcal{F}$ si tous les éléments de $\mathcal{G}$ sont différentiels sur $\mathcal{F}$.*

DÉFINITION 12. — *Une famille $A = (\eta_i\ i \in [1, n])$, finie ou infinie, de polynômes de $\mathcal{G}$ est dite différentiellement liée sur $\mathcal{F}$, s'il existe un polynôme P de $\mathcal{F}\{n\}$ et une sous famille finie $\eta_1, \ldots, \eta_n$ de A tels que $P(\eta) = 0$, et différentiellement libre dans le cas contraire.*

THÉORÈME 1. — *Soit $\mathcal{G}$ une extension de $\mathcal{F}$ et $R \subset S$ deux sous-ensembles de $\mathcal{G}$ tels que R forme une famille différentiellement libre et que $\mathcal{G}$ soit différentiel sur $\mathcal{F}\langle S\rangle$, alors il existe un ensemble T tel que $R \subset T \subset S$, différentiellement libre et telle que $\mathcal{G}$ soit différentiel sur $\mathcal{F}\langle T\rangle$.*

De plus, si T est fini, toute famille libre T' telle que $\mathcal{G}$ est différentiel sur $\mathcal{F}\langle T'\rangle$ est finie et a même nombre d'éléments que T, et si T est infini, toute famille de ce type est infinie.

PREUVE. Voir [Ko2 chap II § 9 th. 4 p 105]. ∎

DÉFINITION 13. — *Soit $\mathcal{G}$ une extension finie de $\mathcal{F}$, on appelle degré de transcendance différentiel de $\mathcal{G}$ sur $\mathcal{F}$ le cardinal d'une famille différentiellement libre T telle que $\mathcal{G}$ soit différentiel sur $\mathcal{F}\langle T\rangle$.*

Si $\mathcal{I}$ est un idéal premier de $\mathcal{F}\{n\}$, on appelle dimension de $\mathcal{I}$ le degré de transcendance différentiel du corps de fractions $\mathcal{F}\{n\}/\mathcal{I}$ sur $\mathcal{F}$. Si V est une variété sur $\mathcal{F}$, sa dimension est le degré de transcendance différentiel de son corps de fonctions $\mathbf{K}(V)$ sur $\mathcal{F}$.

Remarques. — 1) Contrairement au cas algébrique, la dimension d'une variété différentielle ne coïncide pas en général avec sa dimension topologique. Par exemple, la dimension de la variété définie par $[x_{(11)}, x_{(22)}]_{\mathbf{Q}\{x\}_{\delta_1,\delta_2}}$ est 0, tandis que sa dimension topologique, qui coïncide ici avec le degré de transcendance algébrique de son corps de fonctions, est 4.

2) Si V est une sous-variété projective de $\mathbf{P}_n$ d'intersection non vide avec $\mathbf{A}^n$, la dimension de V est égale à celle de $V \cap \mathbf{A}^n$.

3) Pour tout zéro générique η de $\mathcal{I}$, la dimension de $\mathcal{I}$ est aussi le degré de transcendance de $\mathcal{F}\langle\eta\rangle$ sur $\mathcal{F}$. En effet, il est aisé de voir que pour tout zéro générique η de $\mathcal{I}$, $\mathcal{F}\langle\eta\rangle$ est isomorphe à $\mathrm{Fr}\mathcal{F}\{n\}/\mathcal{I}$.

DÉFINITION 14. — *Soit $\mathcal{F}\langle\eta\rangle$ une extension de $\mathcal{F}$, on appelle fonction de transcendance de η sur $\mathcal{F}$, la fonction notée $H_{\eta/\mathcal{F}}$ telle que $H_{\eta/\mathcal{F}}(r)$ soit égal au degré de transcendance algébrique de $\mathcal{F}(\Theta_r\,\eta)$ sur $\mathcal{F}$.*

PROPOSITION 7. — *Pour r assez grand, la fonction de transcendance $H_{\eta/\mathcal{F}}$ est égale à un polynôme*

$$\omega_{\eta/\mathcal{F}}(r) = \sum_{i=1}^{m} a_i \binom{i+r}{i}.$$

L'entier a_m est égal au degré de transcendance différentiel de $\mathcal{F}\langle\eta\rangle$ sur $\mathcal{F}$.

PREUVE. Voir [Ko2 chap. II § 12 th. 6 p. 115] ∎

On appellera ce polynôme le *polynôme de transcendance* de η sur $\mathcal{F}$.

PROPOSITION 8. — *Si $\mathcal{F}\langle\eta\rangle$ est isomorphe à $\mathcal{F}\langle\epsilon\rangle$, il existe un entier h tel que $\omega_{\eta/\mathcal{F}}(r-h) \leq \omega_{\epsilon/\mathcal{F}}(r) \leq \omega_{\eta/\mathcal{F}}(r+h)$.*

Si $\mathcal{F}(\eta)$ est isomorphe à $\mathcal{F}(\epsilon)$, η et ϵ ont même polynôme de transcendance.

Si $\mathcal{F}\langle\eta\rangle \subset \mathcal{F}\langle\epsilon\rangle$, $\omega_{\eta/\mathcal{F}} \leq \omega_{\epsilon/\mathcal{F}}$.

PREUVE. Voir [Ko2 chap. II § 12 prop. 15 p. 117] ∎

DÉFINITION 15. — *Avec les notations de la propriété précédente, on appellera type de l'extension $\mathcal{F}\langle\eta\rangle$ sur $\mathcal{F}$, et l'on notera $\tau_{\eta/\mathcal{F}}$, le plus grand indice i tel que a_i soit non nul. L'entier $a_{\tau_{\eta/\mathcal{F}}}$ sera la dimension différentielle typique [Ko2] de l'extension.*

Enfin, suivant Ritt ([Ri2 chap. II et IV]), on appellera ordre de l'extension l'entier a_j avec $j = \max\{i < m | a_i \neq 0\}$ si cet ensemble est non vide, ou sinon 0.

Si $\mathcal{I}$ est un idéal premier et V la variété affine irréductible définie par $\mathcal{I}$, on étend naturellement ces définitions à $\mathcal{I}$ ou à V en considérant un zéro générique η de V.

Remarque 4. — L'ordre et la dimension différentielle typique coïncident si le type est inférieur à m, c'est-à-dire si l'on est en dimension 0.

3. Ensembles caractéristiques et fonctions de transcendance

On sait déterminer la fonction de Hilbert d'un idéal algébrique, dès lors qu'on en connaît une base standard. Les ensembles caractéristiques jouent un rôle analogue en algèbre différentielle, puisqu'ils permettent de déterminer la fonction de transcendance.

PROPOSITION 9. — *Soient $\mathcal{I} \neq [1]$ un idéal différentiel premier de $\mathcal{F}\{n\}$ de fonction de transcendance H, $\mathcal{A}$ un ensemble caractéristique de $\mathcal{I}$ pour un ordre qui respecte l'ordre de dérivation. On identifie l'ensemble Υ des dérivées avec $[1,n] \times \mathbf{N}^m$, et l'on note E l'ensemble des dérivées — propres ou non — des dérivées dominantes des polynômes de $\mathcal{A}$, I le complémentaire de cet ensemble. Le nombre de points de $I \cap [1,n] \times [0,r]^m$ est égal à $H(r)$.*

PREUVE. On trouvera la preuve complète dans [Ko2 chap. II § 12 th. 6 p. 115]. On peut remarquer que $\Theta E = E$, de sorte que E est la réunion de n escaliers dans $\mathbf{N}^m$, autant qu'il y a de variables. On obtient la fonction de transcendance $H(r)$ en comptant le nombre de points sous les escaliers d'ordre inférieur ou égal à r. La dimension de $\mathcal{I}$ correspond au nombre des variables pour lesquelles l'escalier est vide. ∎

COROLLAIRE 1. — *Si P est un polynôme premier, l'ordre de la composante principale de P est égal à l'ordre de P* ∎

PROPOSITION 10. — *Soient P un polynôme premier de $\mathcal{F}\{n\}$ d'ordre r, V la variété correspondant à la composante générale de P et $H_1, \ldots, H_{n-1}$ des hyperplans génériques de $\mathbf{A}^n_{\mathcal{F}}$, i.e. des hyperplans définis par $H_i = V([\epsilon_{i,0} + \sum_{j=1}^n \epsilon_{i,j} x_j])$, où les $\epsilon_{i,j}$ sont génériques sur $\mathcal{F}$. Alors, la variété $V \cap \bigcap_{i=1}^{n-1} H_i$ est irréductible, son type est $m-1$ et son ordre est r.*

PREUVE. Pour un ordre respectant l'ordre de dérivation et tel que $x_n > \cdots > x_1$, il existe un ensemble caractéristique $\mathcal{A}$ de l'idéal définissant l'intersection des hyperplans de la forme $\{x_2 - a_2 x_1 - b_2, \ldots, x_n - a_n x_1 - b_n\}$, où les a_i et b_i sont génériques sur $\mathcal{F}$. Réduire P par cet ensemble caractéristique, dont les initiaux et séparants valent 1, revient à y substituer $a_i x_1 + b_i$ à x_i pour $n \geq i > 1$. On obtient alors un polynôme $P'(x_1)$, premier, de même ordre que P. On note $\mathcal{B}$ l'ensemble $\mathcal{A} \cup \{P\}$, qui est manifestement autoréduit.

Montrons que $(\mathcal{B})$ est premier. Prenant pour variables les érivées qui apparaissent dans les polynômes de $\mathcal{B}$, on commence par remarquer que $\mathcal{B}$ forme une base standard algébrique pour tout ordre tel que $x_{1,(\theta)} < x_j$, car les monômes de tête sont étrangers. Soient R_1 et R_2 deux polynômes tels que $R_1 R_2 \in (\mathcal{B})$. On peut commencer à réduire (au sens des bases standard !) $R_1 R_2$ par $\mathcal{A}$, ce qui donne un reste $R_1'(x_1) R_2'(x_1)$. Comme $R_1 R_2$ se réduit à 0, $R_1' R_2' = M(x_1) P'$. Comme P' est irréductible, R_1' ou R_2' sont des multiples de P' donc réduits à 0 par $\mathcal{B}$ ce qui montre que R_1 ou R_2 sont dans $(\mathcal{B})$.

Plus généralement, le même raisonnement montre que tout polynôme R de $(\mathcal{B})$ s'exprime sous la forme

$$R = M_1(x_1) P' + \sum_{i=2}^{n} M_i(x_1, \ldots, x_i)(x_i - a_i x_1 - b_i),$$

donc est réductible par B au sens de la réduction de Ritt (déf. 1.6 p. 16). En dernier lieu, $\mathcal{B}$ est cohérent, car l'ensemble des pseudo-syzygies qui lui est associé est manifestement vide. On peut donc appliquer la prop. 1.6 p. 17 et conclure que $\mathcal{B}$ est un ensemble caractéristique de l'idéal premier $\mathcal{J} = [\mathcal{B}] : (\mathcal{I}_{\mathcal{P}'} \mathcal{S}_{\mathcal{P}'})^\infty$.

Il reste à prouver l'égalité entre $V(\mathcal{J})$ et $V \cap \bigcap H_i$. Soit η un zéro générique de $\mathcal{J}$. C'est un zéro de $\mathcal{A}$ et de P. Mais, comme $I_P \xrightarrow{\mathcal{B}} I_{P'} \notin \mathcal{J}$, ce n'est pas un zéro de I_P. Raisonnant de même pour le séparant, on en déduit que η est un zéro de $[\mathcal{A}] + [P] : (I_P S_P)^\infty$. Par généricité de η, $V(\mathcal{J}) \subset V \cap \bigcap H_i$

Réciproquement, soit ϵ un zéro d'une composante de $V \cap \bigcap H_i$. C'est donc un zéro de $\mathcal{A}$ et de P. Comme les $a_2, \ldots, a_n, b_2, \ldots, b_n$ forment une famille générique sur $\mathcal{F}$, ϵ est un zéro générique de P donc n'annule ni I_P, ni S_P. D'autre part, $I_P(\epsilon) = I_{P'}(\epsilon_1)$ et $S_P(\epsilon) = S_{P'}(\epsilon_1)$, d'où l'on déduit que ϵ n'annule ni $I_{P'}$ ni $S_{P'}$, et donc que c'est un zéro de $V(\mathcal{J})$, ce qui assure l'inclusion inverse.

On a donc montré que $\mathcal{B}$ est un ensemble caractéristique de l'idéal premier définissant la variété irréductible $V \cap \bigcap H_i$.

Il suffit maintenant d'appliquer la proposition 9 ci-dessus pour trouver que le polynôme de transcendance de $\mathcal{J}$ est égal à

$$\binom{m+r}{m} - \binom{m+r-\operatorname{ord} P}{m} = \operatorname{ord} P \binom{m-1+r}{m-1} + O\left(r^{(m-2)}\right). \quad \blacksquare$$

On dispose d'un théorème important, dû à RITT dans le cas différentiel ordinaire, qui le considérait comme l'analogue différentiel du théorème de BÉZOUT ; il permet de borner l'ordre d'un idéal premier à partir de l'ordre des dérivées intervenant dans chacun de ses générateurs. Il a été partiellement étendu par KOLCHIN au cas des idéaux aux dérivées partielles.

THÉORÈME 2 (Ritt–Kolchin). — *Soient $\mathcal{I}$ une composante de type $m-1$ de l'idéal $\{\Sigma\}$ de $\mathcal{F}\{n\}$, $e_i = \max\{\mathrm{ord}_{x_i} | P \in \Sigma\}$, alors l'ordre de Σ pour tout ensemble de variables arbitraires est borné par $\sum_{i=1}^{n} e_i$.*

PREUVE. Voir [Ko2 chap. IV § 17 prop. 9 p. 199]. ■

Dans le cas où les polynômes sont d'ordre nul, on a un résultat plus précis.

PROPOSITION 11. — *Si $\mathcal{I}$ est un idéal de $\mathcal{F}\{n\}$ engendré par un ensemble Σ de polynômes d'ordre nuls, alors, le polynôme de transcendance différentiel de $\mathcal{I}$ est égal à $d\binom{m+r}{m}$, où d désigne la dimension de l'idéal algébrique $(\Sigma)_{\mathcal{F}[n]}$.*

PREUVE. Voir [Ko2 chap. IV § 17 prop. 10 p. 200]. ■

Ce résultat n'est finalement qu'une manière plus précise de formuler le théorème 1.2.1 p 5.