Hexagonal graphs in linear algebra

Jean MOULIN OLLAGNIER
GAGE, UMS CNRS 658 MEDICIS, École Polytechnique,
F 91128 Palaiseau Cedex, FRANCE
(e-mail : `Jean.Moulin-Ollagnier@polytechnique.fr`).

Luminy, the 26th of October, 1998

Research announcement

The Lotka-Volterra system of autonomous differential equations consists in three homogeneous polynomial equations of degree 2 in three variables.
This system, or the corresponding vector field LV(A,B,C), depends on three non-zero parameters and writes $LV(=, V_{,)}\, x\partial_x + V_y\partial_y + V_z\partial_z$ where

$$V_x = x(Cy + z),\ V_y = y(Az + x),\ V_z = z(Bx + y).$$

LV(A,B,C) is a normal form of a factorisable quadratic system and the study of its first integrals of degree 0 is of great mathematical interest.
A first integral is a non-constant function f which satisfies the identity

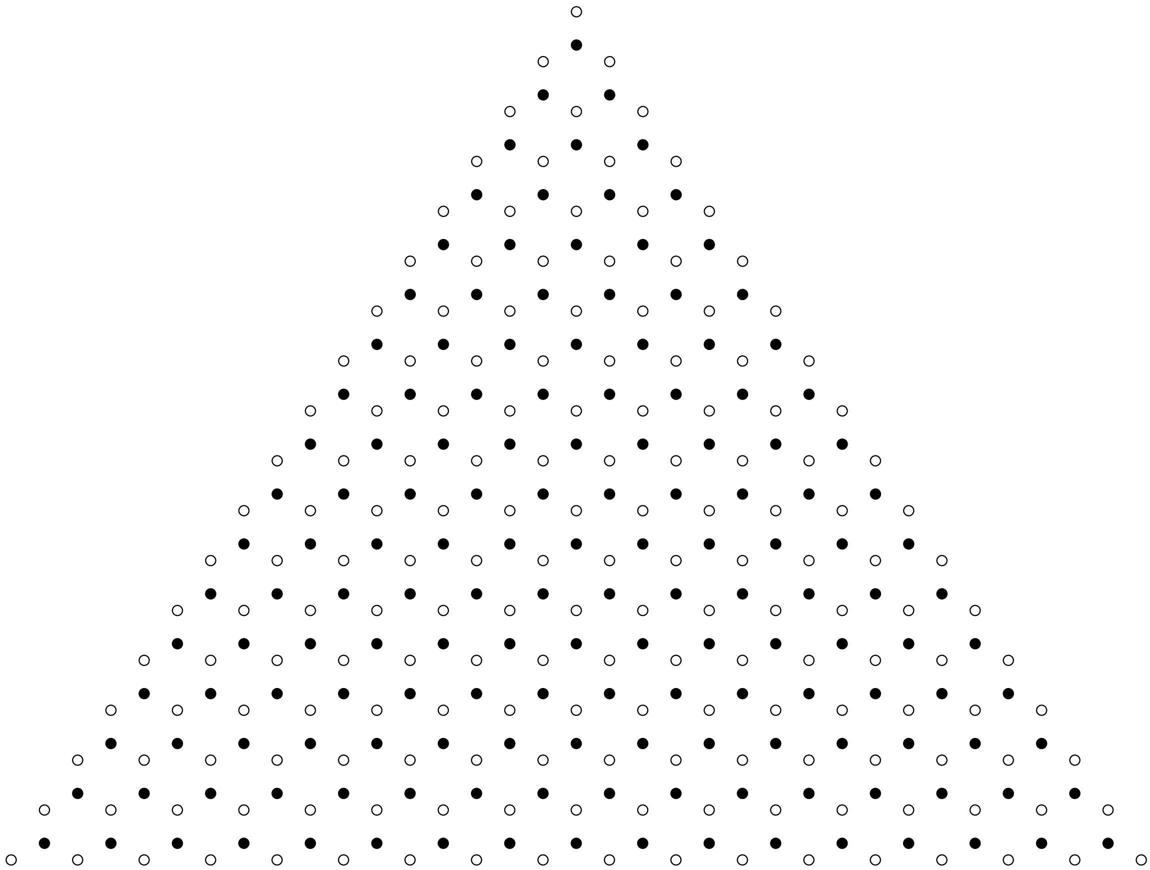
$$V_x\frac{\partial f}{\partial x} + V_y\frac{\partial f}{\partial y} + V_z\frac{\partial f}{\partial z} = 0.$$

It is well-known that such a first integral of LV(A,B,C) can be built from some *Darboux polynomials* of the vector field and a preliminary analysis shows that it could be the case for some triples (A, B, C) of integers, $A \geq 2$, $B \geq 2$, $C \geq 2$.
We prove here that the only possibility in this sub-case is $A = B = C = 2$. As a consequence, we obtain an elementary proof of the fact that the so-called Jouanolou derivation has no Darboux polynomial in three variables for any integer $s > 1$, which was missing from our joint paper with A. Maciejewski, A. Nowicki and J.-M. Strelcyn, "Around Jouanolou non-integrability theorem", (March 1999, to appear in *Indagationes Mathematicae*).
Despite the fact that this is far from being a complete classification, the interest of our proof lies in its elementary character. We use some arguments from Graph Theory to study families of systems of linear equations. In particular, we meet planar bipartite graphs having only alternating paths (with respect to some perfect matching) whose length is twice an odd number.
Our tools could be of interest in some other problems.

This talk has been given at the "Journées Nationales de Calcul Formel" at Luminy in October 1998. The slides (in French) follow.
According to future researches, this work will be included in a paper dealing with the complete solution of the liouvillian integration problem for the Lotka-Volterra system or published alone if the graph theoretic techniques turn out to be specific to the present restricted problem.

Jean Moulin Ollagnier Luminy, le 26 octobre 1998

GRAPHES HEXAGONAUX EN ALGÈBRE LINÉAIRE



Contexte

$\mathbf{K}$-dérivation d de $\mathbf{A}$:
– d est un endomorphisme $\mathbf{K}$-linéaire de $\mathbf{A}$,
  $\mathbf{K}$-algèbre commutative,
– règle de Leibniz : $d(ab) = d(a)b + ad(b)$
Exemples :
– dérivations partielles ∂_i d'une extension de $\mathbf{K}[x_1, \cdots, x_n]$,
– combinaisons linéaires à coefficients dans $\mathbf{K}[x_1, \cdots, x_n]$
  de celles-ci (champs de vecteurs polynomiaux),
– en particulier $E = \sum x_i \partial_i$ (E comme Euler).
Intégrale première :
– constante non-nulle de la dérivation.

Dérivations ou champs polynomiaux

f polynôme de Darboux pour d, dérivation polynomiale :
– $f \neq 0$, $d(f) = \Lambda f$,
  où Λ est un polynôme (valeur propre).

Remarques :
- le produit de deux polynômes de Darboux en est un,
- en caractéristique 0, les facteurs irréductibles d'un polynôme de Darboux en sont aussi,
- les polynômes homogènes sont de Darboux pour E (relation d'Euler),
- si les composantes de d sont des polynômes homogènes de même degré,
  les composantes homogènes d'un polynôme de Darboux sont des polynômes de Darboux.
  Il suffit de considérer dans ce cas des polynômes de Darboux homogènes, et ceci pour une valeur propre homogène (de degré celui de d moins 1).

Méthode de Darboux

Avec suffisement de polynômes de Darboux,
on construit une intégrale première :

- La valeur propre d'un produit de polynômes de Darboux est la somme des valeurs propres,
- les valeurs propres vivent dans un **K**-espace de dimension finie.

Dérivations factorisables à 3 variables

$$\left\{\begin{array}{l} x\phi_x\partial_x + y\phi_y\partial_y + z\phi_z\partial_z, \\ \phi_x = \phi_{x,x}x + \phi_{x,y}y + \phi_{x,z}z \\ \phi_y = \phi_{y,x}x + \phi_{y,y}y + \phi_{y,z}z \\ \phi_z = \phi_{z,x}x + \phi_{z,y}y + \phi_{z,z}z \end{array}\right.$$

Champ de Lotka–Volterra

$$LV((,A,,)B,C) \;=\; x(Cy+z)\partial_x + y(Az+x)\partial_y + z(Bx+y)\partial_z.$$

En faisant agir le groupe linéaire, cela peut être considéré
comme une *forme normale* de champ factorisable,
à l'addition près d'un multiple de E,
(ce qui ne change pas les intégrales premières de degré 0).

Résultats antérieurs

Intégrales premières polynomiales.
Classification complète des cas où le champ $LV((,A,,)B,C)$ admet une intégrale première polynomiale.

Intégrales premières rationnelles.
Classification complète des cas où le champ $LV((,A,,)B,C)$ admet une intégrale première rationnelle de degré 0.

Objectif : la classification liouvillienne

Le champ de Lotka-Volterra
admet une intégrale première liouvillienne de degré 0
(i. e. commune avec E) "presque si et seulement si"
il a un polynôme de Darboux strict.
En effet, x, y et z sont 3 polynômes de Darboux par construction.
Un quatrième (divisible ni par x, ni par y, ni par z)
permet d'appliquer la méthode de Darboux.
L'espace des valeurs propres est ici de dimension 3 sur $\mathbf{K}$.

Un problème d'algèbre linéaire

Dire que F est un polynôme de Darboux strict du champ $LV((,A,,)B,C)$ pour la valeur propre $\Lambda = \lambda x + \mu y + \nu z$ se traduit par un système linéaire.

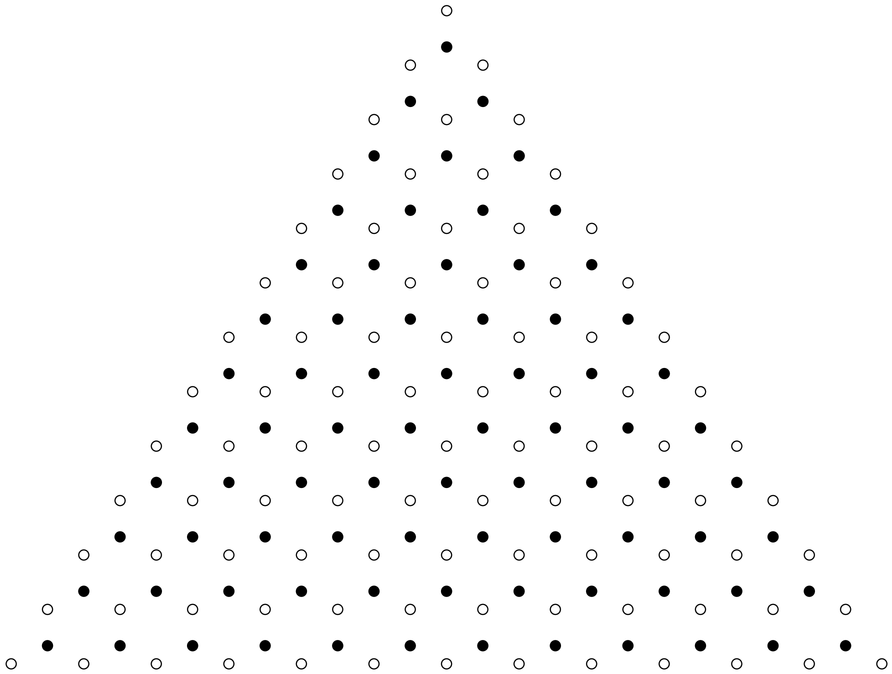
$$F = \sum_{i+j+k=m} F_{i,j,k} x^i y^j z^k \tag{1}$$

$$\forall (i',j',k') \in \mathbf{N}^3, i'+j'+k' = m+1, \tag{2}$$

$$\sum_{i+j+k=m} M_{(i',j',k'),(i,j,k)} F_{i,j,k} = 0 \tag{3}$$

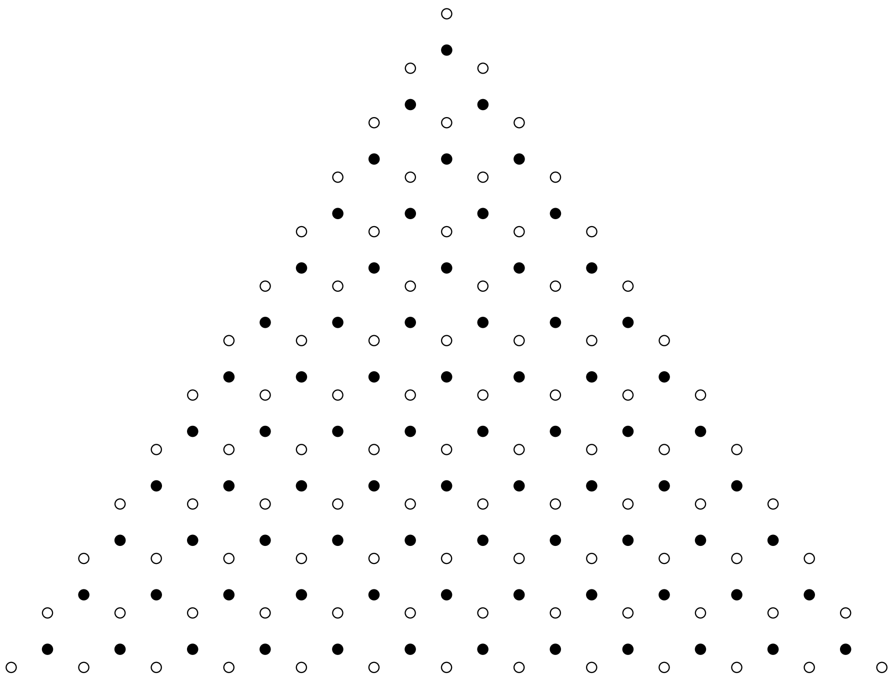
La plupart des coefficients de cette matrice sont nuls sauf peut-être :

$$\left\{ \begin{array}{rcl} M_{(i+1,j,k),(i,j,k)} & = & j + Bk - \lambda \\ M_{(i,j+1,k),(i,j,k)} & = & Ci + k - \mu \\ M_{(i,j,k+1),(i,j,k)} & = & i + Aj - \nu \end{array} \right. \tag{4}$$



– Graphe biparti, deux sortes de sommets, les équations et les inconnues
– les arêtes du réseau hexagonal sont étiquetées par les coefficients non-nuls du système linéaire.

Sur les bords



$$LV(A,B,C))(F) = (\lambda x + \mu y + \nu z)F,\ \deg(F) = m,\ F \text{ strict}$$
$$\Rightarrow \exists(\lambda,\mu,\nu,\gamma_2,\alpha_3,\beta_1) \in \mathbf{N}^6 :$$

$$\begin{cases} \lambda = \beta_3 = \gamma_2 B, & \mu = \gamma_1 = \alpha_3 C, \qquad \nu = \alpha_2 = \beta_1 A, \\ \beta_1 + \gamma_1 \leq m, & \alpha_2 + \gamma_2 \leq m, \qquad \alpha_3 + \beta_3 \leq m. \end{cases} \tag{5}$$

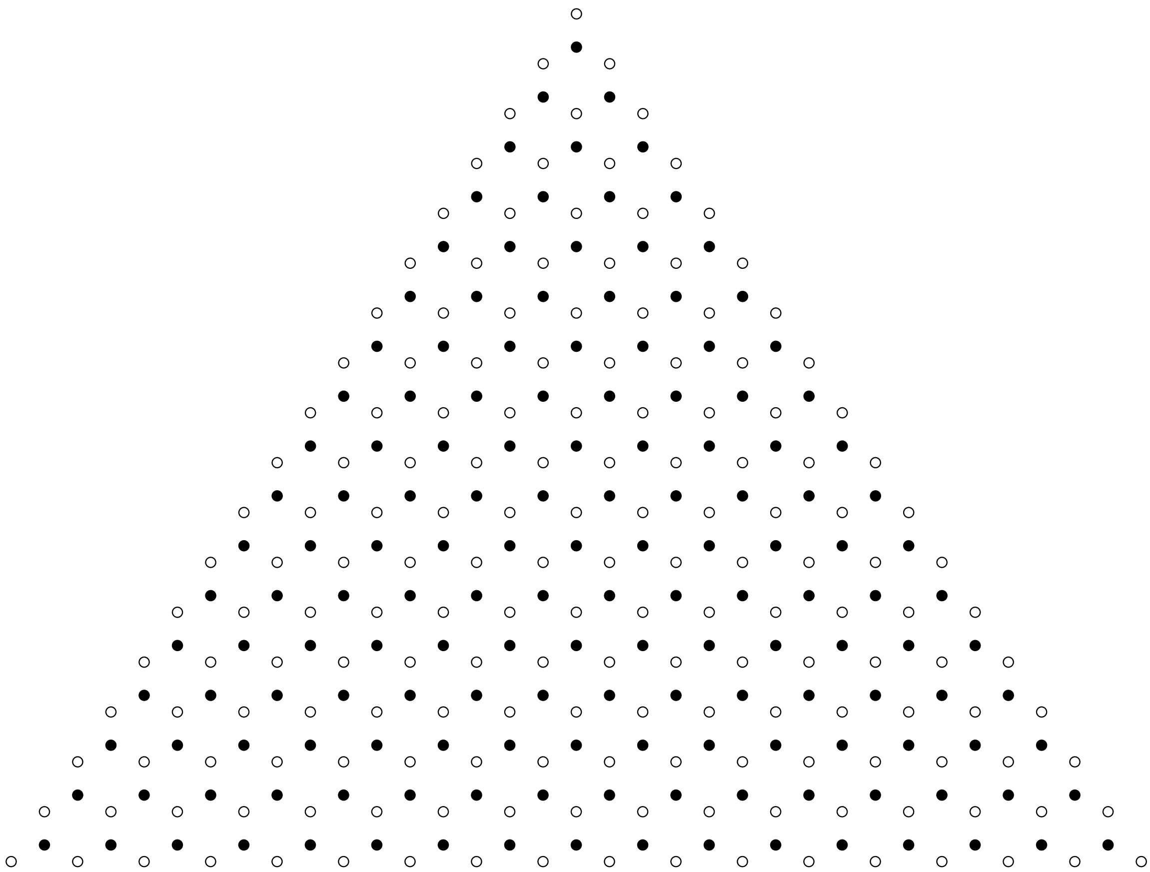
Exploration d'un filon

Une possibilité d'avoir une quatrième courbe de Darboux pour $LV((,A,,)B,C)$ est que les trois paramètres soient des entiers supérieurs ou égaux à 2.

Théorème :
- Si $(A,B,C) \in (\mathbf{N}^{\star\star})^3$, $LV((,A,,)B,C)$ n'a de quatrième courbe de Darboux que si $A = B = C = 2$.

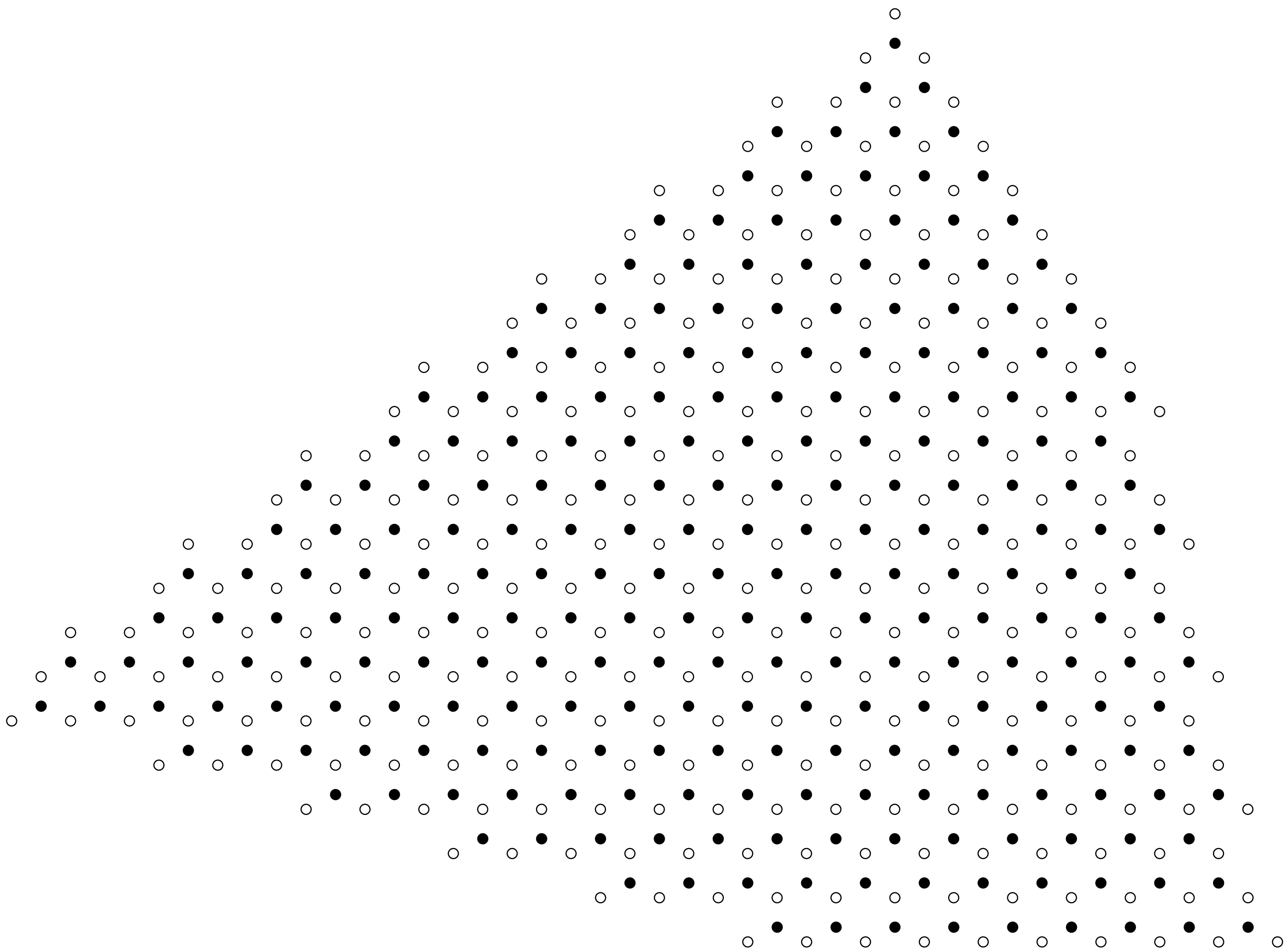
Preuve :
- On coupe les coins.
- Reste un sous-système dont les coefficients non-nuls sont tous positifs.
- Un déterminant d'ordre maximum de ce sous-système (on en garde toutes les inconnues) est en fait un permanent (tous les termes ont même signature).
- Et le système linéaire est de rang maxiumum, donc sans noyau.

<u>On coupe les coins</u>



Exemple : $m = 16, A = B = C = 3, \lambda = \mu = \nu = 12, \gamma_2 = \alpha_3 = \beta_1 = 4$

Couplage du sous-système



$$m = 27, A = B = C = 3, \lambda = 15, \mu = 12, \nu = 21, \gamma_2 = 5, \alpha_3 = 4, \beta_1 = 7$$

Explicitation du couplage

$$\left[\begin{array}{lcl} j+Bk-\lambda<0 & : & (i,j,k)\rightarrow(i+1,j,k) \\ k+Ci-\mu<0 & : & (i,j,k)\rightarrow(i,j+1,k) \\ i+Aj-\nu<0 & : & (i,j,k)\rightarrow(i,j,k+1) \\ i\leq\alpha_3, j\geq m-\alpha_3-\gamma_2 & : & (i,j,k)\rightarrow(i,j,k+1) \\ i\geq\alpha_3+1, k\leq\gamma_2 & : & (i,j,k)\rightarrow(i,j+1,k) \\ k\geq\gamma_2+1j\leq m-\alpha_3-\gamma_2-1 & : & (i,j,k)\rightarrow(i+1,j,k) \end{array}\right. \tag{6}$$

Les équations qui restent en dehors de ce couplage sont "sur le bord". Voilà pourquoi tous les termes du déterminant ont même signature.

Ceci est faux pour $A=B=C=2$, valeurs pour lesquelles on trouve "mécaniquement" un polynôme de Darboux de degré 3.

Permanence de la signature

Proposition

– Soit (X, Y) une partie "convexe" équilibrée finie du réseau hexagonal admettant au moins un couplage parfait.
Alors, deux couplages parfaits de ce graphe biparti déterminent une permutation paire de X.

Il suffit de constater

– que la différence symétrique de deux couplages est une réunion de cycles pairs,

– et que la demi-longueur d'un cycle alterné d'un couplage parfait est impaire.

Une permutation circulaire d'ordre impair est paire !

Une relation arithmétique

Le dernier point spécifique de la preuve de cette proposition est un cas particulier d'une relation arithmétique :

- Soit C un cycle élémentaire de longueur $2l$ dans le réseau hexagonal.
- C enferme h faces hexagonales, i sommets et j arêtes.
- Relation d'Euler dans le sous-graphe planaire limité par C : $h + 1 + i + 2l = 2l + j + 2$
- Dénombrement des arêtes : $6h = 2l + 2j$.

On en déduit

$$l + i = 2h + 1.$$

La demi-longueur l du cycle C et le nombre i de sommets intérieurs à C sont donc de parité opposée.

Dans le cas d'un cycle alterné d'un couplage, l'intérieur est couplé, donc i pair et la demi-longueur l impaire comme annoncé.