About a relation of Darboux in enumerative geometry

Jean MOULIN OLLAGNIER
GAGE, UMS CNRS 658 MEDICIS, École Polytechnique,
F 91128 Palaiseau Cedex, FRANCE
(e-mail: Jean.Moulin-Ollagnier@polytechnique.fr).

Aussois, the 10th of May, 2000

Research announcement

In this talk, we intended to make popular a relation in enumerative geometry given by Darboux :
Let A, B, C, A', B', C' be six homogeneous polynomials in three variables with coefficients in an algebraically closed field $\mathbb{K}$ such that:

- "vectors" $V = [A, B, C]$ and $W = [A', B', C']$ are irreducible:
  A, B et C (resp.A', B' et C') are relatively prime,
- the *orthogonality* condition $AA' + BB' + CC' = 0$ holds,
  (with the equality between degrees: $a + a' = b + b' = c + c' = r$),
- the homogeneous ideal (A, B, C, A', B', C') has no zero in $\mathcal{P}_2(\mathbb{K})$.

Then,

$$\sharp\mathcal{Z}(V) + \sharp\mathcal{Z}(W) = \frac{abc + a'b'c'}{r},$$

where $\sharp\mathcal{Z}(.)$ is the total number of zeroes of an homogeneous ideal in the projective plane, provided that they are counted according to their multiplicity; of course, in such a definition, we assume that the ideal has only finitely many zeroes in the projective plane.

After having recalled the well-known fact that the original proof of Darboux is false (Jean-Pierre Jouanolou noticed it many years ago), we gave the headlines of a rather elementary proof of this result.

As an application, we proposed to give an upper bound to the degree of irreducible Darboux curves of the Lotka-Volterra vector field.

On the other hand, we have shown how to get rid of the controversial last condition and nevertheless to get an upper bound on the total number of zeroes in the projective plane. Our last example, the double computation of the total number of singular points of an homogeneous projective three-variable 1-form, was an illustration of this remark.

This talk has been given at the "Journées Nationales de Calcul Formel" at Aussois in May 2000. The slides (in French) follow.
A few days after after, during another meeting, we have learnt that other people are also interested in this relation of Darboux. It is highly probable that a joint paper will be written during the next few months.

JOURNÉES D'AUSSOIS mai 2000

UNE RELATION DE GÉOMÉTRIE ÉNUMÉRATIVE DE DARBOUX

$$0 \xrightarrow{0} R(V) \xrightarrow{i} \mathcal{A}^3 \xrightarrow{.V} \mathcal{A} \xrightarrow{s} \mathcal{A}/(V) \xrightarrow{0} 0.$$

$$0 \xrightarrow{0} \mathcal{A} \xrightarrow{W} R(v) \xrightarrow{\phi} \mathcal{J} \xrightarrow{0} 0.$$

Donc : $\sharp\mathcal{Z}(V) + \sharp\mathcal{Z}(W) = \dfrac{abc + a'b'c'}{r}.$

Jean Moulin Ollagnier

1 Le résultat

A, B, C, A', B', C' sont six polynômes homogènes à trois variables sur un corps algébriquement clos $\mathbb{K}$ tels que :

- les "vecteurs" $V = [A, B, C]$ et $W = [A', B', C']$ sont irréductibles : A, B et C (resp.A', B' et C') sont premiers entre eux,
- on a la condition . . . . $AA' + BB' + CC' = 0$, (avec l'égalité entre degrés : $a + a' = b + b' = c + c' = r$),
- l'idéal homogène (A, B, C, A', B', C') n'a aucun zéro dans $\mathcal{P}_2(\mathbb{K})$.

Alors,

$$\sharp\mathcal{Z}(V) + \sharp\mathcal{Z}(W) = \frac{abc + a'b'c'}{r},$$

où $\sharp\mathcal{Z}(.)$ est le nombre total de zéros d'un idéal homogène dans le plan projectif comptés avec leur multiplicité, ce qui suppose que cet idéal n'a un nombre fini de zéros projectifs.

2 Zéros projectifs des idéaux homogènes

$\mathcal{A} = \mathbb{K}[x_0, \ldots, x_n]$, I idéal homogène de l'anneau $\mathcal{A}$,
I n'a qu'un nombre fini de zéros projectifs.

Le nombre total $\sharp\mathcal{Z}(I)$ de ces (ses) zéros,
. . . . peut être défini ainsi :

1. En tout degré n, la composante homogène $(\mathbb{K}[x_0, \ldots, x_k]/I)_n$ du quotient de l'anneau de polynômes par l'idéal est un espace vectoriel de dimension finie d_n sur $\mathbb{K}$.

2. La suite (d_n) stationne.

3. Il y a de bonnes raisons (passage du local au global dans les cartes affines, puis homogénéisation) de choisir la valeur ultime de cette suite pour définir $\sharp\mathcal{Z}(I)$.

3 Vecteurs irréductibles de polynômes à trois variables

L'hypothèse d'irréductibilté faite sur V et W montre que les idéaux homogènes $(V) = (A, B, C)$ et $(W) = (A', B', C')$ n'ont qu'un nombre fini de zéros dans le plan projectif $\mathcal{P}_2(\mathbb{K})$.

En effet, on peut écrire

$$A = \overline{A}\beta\gamma, \quad B = \overline{B}\alpha\gamma, \quad C = \overline{C}\alpha\beta,$$

où α est le pgcd de B et C, β celui de A et C, γ celui de A et B.

D'après la formule de Bézout, un idéal homogène engendré par deux générateurs premiers entre eux n'a qu'un nombre fini de zéros dans le projectif :

$$\sharp\mathcal{Z}(\beta\overline{A}, \alpha\overline{B}) \ < \infty, \quad \sharp\mathcal{Z}(\gamma, C) \ < \infty.$$

De plus,

$$\sharp\mathcal{Z}(A, B, C) \ \leq \ \sharp\mathcal{Z}(\beta\overline{A}, \alpha\overline{B}, C) + \sharp\mathcal{Z}(\gamma, C),$$

$$\sharp\mathcal{Z}(A, B, C) \ \leq \ \sharp\mathcal{Z}(\beta\overline{A}, \alpha\overline{B}) + \sharp\mathcal{Z}(\gamma, C) \ < \infty.$$

4 Une première suite exacte

Pour commencer le calcul du nombre de zéros projectifs de l'idéal (V), considérons la suite exacte :

$$0 \xrightarrow{0} R(V) \xrightarrow{i} \mathcal{A}^3 \xrightarrow{.V} \mathcal{A} \xrightarrow{s} \mathcal{A}/(V) \xrightarrow{0} 0.$$

Le premier module $R(V)$ est celui des relations entre les coordonnées (A, B, C) de V ; c'est le noyau de la flèche notée $.V$ (produit scalaire par le vecteur V).

Cette suite exacte est compatible avec les graduations.

Pour un n donné, on peut ramener (par la formule de somme alternée) la dimension cherchée de $(\mathcal{A}/(V))_n$, partie homogène de degré n de l'anneau-quotient à celle d'un espace vectoriel de relations :

$$\begin{aligned} \dim((\mathcal{A}/(V))_n) &= \dim((\mathcal{A})_n) - \dim((\mathcal{A}^3)_{n-a,n-b,n-c}) \\ &+ \dim((R(V))_{n-a,n-b,n-c}). \end{aligned}$$

Les dimensions de composantes homogènes de $\mathcal{A}$ et de ses puissances se calculent aisément :

$$\delta(k) = \dim((\mathcal{A})_k) = \frac{(k+1)(k+2)}{2}.$$

Mais le dernier terme de la formule reste inconnu.

La condition d'orthogonalité entre V et W permet une résolution du module $R(V)$ ... et la poursuite du calcul.

5 Une deuxième suite exacte

$W = [A', B', C']$ définit une flèche $\wedge W$ de $\mathcal{A}^3$ dans $\mathcal{A}^3$:

$$\wedge W([r_1, r_2, r_3]) = [B'r_3 - C'r_2, C'r_1 - A'r_3, A'r_2 - B'r_1].$$

Si $[r_1, r_2, r_3] \in R(V)$, $\wedge W([r_1, r_2, r_3])$ est colinéaire à V (calcul simple)
V est irréductible : c'est un multiple de V par un . . . . N.

L'application qui associe à la relation $[r_1, r_2, r_3] \in R(V)$ le polynôme N est alors une flèche homogène ϕ de $R(V)$ dans $\mathcal{A}$ dont l'image est un certain idéal homogène $\mathcal{J}$ de $\mathcal{A}$.

D'où une autre suite exacte compatible avec les graduations :

$$0 \xrightarrow{0} \mathcal{A} \xrightarrow{W} R(V) \xrightarrow{\phi} \mathcal{J} \xrightarrow{0} 0.$$

W désigne la flèche $P \to PW$.
Cette seconde suite exacte permet alors d'exprimer la dimension manquante à l'aide d'une dimension de partie homogène de l'idéal $\mathcal{J}$.

6 Que sait-on sur $\mathcal{J}$?

On s'assure (assez facilement !) que $\mathcal{J}$ vérifie la double inclusion

$$(W) \subset \mathcal{J} \subset (W) : (V).$$

La seconde inclusion résulte de la définition même de la flèche ϕ :

> si $N \in \mathcal{J}$, les coordonnées de NV appartiennent à l'idéal (W)
> et N transporte (V) dans (W).

Pour établir la première inclusion, il faut montrer : $A', B', C' \in \mathcal{J}$.
On remarque que $[0, C, -B]$ est une relation sur $[A, B, C]$ et que

$$\wedge W([0, C, -B]) = [-B'B - C'C, A'B, A'C] = A'[A, B, C],$$

d'après la relation d'orthogonalité. Et $A' \in \mathcal{J}$. B' et C' aussi !

Il n'y a pas besoin d'en savoir beaucoup plus sur $\mathcal{J}$.
L'hypothèse $\mathcal{Z}(A, B, C, A', B', C') = \emptyset$ montre que (W) et $(W) : (V)$ coïncident en haut degré ce qui donne un contrôle suffisant sur $\mathcal{J}$.

7 Des idéaux se rejoignent en haut degré

Une formule classique de théorie calculatoire des idéaux donne

$$I_1 : (I_2 + I_3) = (I_1 : I_2) \cap (I_1 : I_3),$$

ce qui, appliqué à $I_1 = (W), I_2 = (W), I_3 = (V)$, devient

$$(W) : ((W) + (V)) = ((W) : (W)) \cap ((W) : (V)),$$

c'est-à-dire

$$(W) : ((W) + (V)) = \mathcal{A} \cap ((W) : (V)) = (W) : (V).$$

Nous savons que l'idéal $(W) + (V) = (A, B, C, A', B', C')$ est plein en haut degré, puisque sans zéro projectif.

Il reste à établir le lemme suivant :
Dans un anneau de polynômes $\mathbb{A}$ sur $\mathbb{K}$, où l'idéal homogène I n'a qu'un nombre fini de zéros dans le projectif et l'idéal homogène J n'en a aucun, c'est-à-dire est plein en haut degré, les idéaux I et $I : J$ coïncident en haut degré.

Ce sera alors le cas pour (W) et $(W) + (V)$.
Les idéaux (W) et $(W) : (V)$, qui encadrent $\mathcal{J}$, coïncident alors en haut degré et on peut achever le calcul.

$\mathbb{A}$ $\mathbb{K}$ I
J
I $I : J$

Les hypothèses du lemme se traduisent ainsi :

- il existe un rang n_0 à partir duquel la multiplication par la plupart (au moins une !) des formes linéaires est une bijection entre les composantes de degrés n et $n+1$ de l'anneau-quotient $\mathbb{A}/I$,
- il existe un rang n_1 à partir duquel les composantes de degré n de J coïncident avec celles de l'anneau.

On a : $(I : J)_n = \bigcap_k (I_{n+k} : J_k) \subset \bigcap_{k \geq n_1} (I_{n+k} : \mathbb{A}_k) = (I_{n+n_1} : \mathbb{A}_{n_1})$.

Soit P un polynôme de degré n dont le produit par toutes les formes de degré n_1 est dans I. Il existe alors un plus petit degré tel que le produit de P par toutes les formes de degré d soit dans I.

On souhaite que ce plus petit degré soit 0 si n est assez grand.

Dans le cas contraire, il existerait un polynôme homogène Q tel que $PQ \notin I$ tandis que $x_i PQ \in I$, pour tous les x_i.

Si $n \geq n_0$, le polynôme PQ a un degré suffisant pour que cet énoncé soit impossible (en choisissant une forme linéaire ad hoc) ce qui démontre le lemme.

8 Conclusion

Les deux suites exactes et l'équivalence en haut degré de $\mathcal{J}$ et de (W) conduisent aux égalités :

$$\begin{array}{lcl}
\dim((\mathcal{A}/(V))_n) & = & \dim((\mathcal{A})_n) - \dim((\mathcal{A}^3)_{n-a,n-b,n-c}) \\
 & + & \dim((R(V))_{n-a,n-b,n-c}) \\
\dim((R(V))_{n-a,n-b,n-c}) & = & \dim(\mathcal{J}_{n+r-a-b-c}) + \dim(\mathcal{A}_{n-r}), \\
\dim(\mathcal{J}_{n+r-a-b-c}) & = & \dim((W)_{n+r-a-b-c}) \\
 & = & \dim(\mathcal{A}_{n+r-a-b-c}) - \dim(\mathcal{A}/(W)_{n+r-a-b-c}).
\end{array}$$

Ajoutant tout pour n grand, il vient :

$$\begin{array}{lcl}
\sharp\mathcal{Z}(V) + \sharp\mathcal{Z}(W) & = & \delta(n) - \delta(n-a) - \delta(n-b) - \delta(n-c) \\
 & + & \delta(n-r) + \delta(n+r-a-b-c),
\end{array}$$

ce qui se simplifie pour donner un résultat indépendant de n,
celui annoncé :

$$\sharp\mathcal{Z}(V) + \sharp\mathcal{Z}(W) = r^2 - r(a+b+c) + ab + bc + ca.$$

$$\boxed{\sharp\mathcal{Z}(V) + \sharp\mathcal{Z}(W) = \frac{abc + a'b'c'}{r}}$$

9 Une application : borner le degré des courbes de Darboux

La relation (définition d'un polynôme de Darboux) pour un polynôme homogène de degré m

$$V_x \partial_x f + V_y \partial_y f + V_z \partial_z f = \Lambda f$$

s'écrit comme une relation d'orthogonalité

$$W_x \partial_x f + W_y \partial_y f + W_z \partial_z f = 0.$$

On choisit pour cela $W = V - (\Lambda/m)E$ où $E = x\partial_x + y\partial_y + z\partial_z$.
La somme $\sharp\mathcal{Z}(f_x, f_y, f_z)$ des nombres de Tjurina d'un polynôme de Darboux irréductible est contrôlable puisque $\sharp\mathcal{Z}(W_x, W_y, W_z)$ l'est.

Il faut pour cela d'étendre l'égalité de Darboux en une inégalité, la dernière condition de disjonction des zéros de (W) et des points singuliers de f n'étant pas forcément satisfaite.

Il faut aussi d'autres ingrédients, mais on peut y arriver !

10 On peut remplacer la troisième condition

A, B, C, A', B', C' sont six polynômes homogènes à trois variables sur un corps algébriquement clos $\mathbb{K}$ tels que :

- les "vecteurs" $V = [A, B, C]$ et $W = [A', B', C']$ sont irréductibles : A, B et C (resp.A', B' et C') sont premiers entre eux,
- on a la condition . . . . $AA' + BB' + CC' = 0$, (avec l'égalité entre degrés : $a + a' = b + b' = c + c' = r$),
- ~~l'idéal homogène (A, B, C, A', B', C') n'a aucun zéro dans $\mathcal{P}_2(\mathbb{K})$.~~
- on a l'inclusion des idéaux homogènes $(A, B, C) \subseteq (A', B', C')$.

Alors,

$$\sharp\mathcal{Z}(V) = \frac{abc + a'b'c'}{r}.$$

En effet, on a $\mathcal{J} = \mathcal{A}$ ce qui raccourcit les calculs :

$$\dim(\mathcal{J}_{n+r-a-b-c}) = \dim(\mathcal{A}_{n+r-a-b-c}).$$

11 Nombre de points de Darboux d'un champ polynomial homogène à trois variables

V est un champ de vecteurs polynomial homogène à trois variables :

$$V = V_v \partial_x + V_Y \partial_y + V_z \partial_z, \quad V_x, V_y, V_y \in \mathbb{K}_m[x, y, z].$$

Les points de Darboux du champ V sont les zéros de la 1-forme

$$\omega = (zV_y - yV_z)dx + (xV_z - zV_x)dy + (yV_x - xV_y)dz.$$

On suppose V et ω irréductibles.

Deux possiblités d'orthogonalité avec ω :

- Le champ E est orthogonal à ω et $\mathcal{Z}(E) = \emptyset$.
- V est orthogonal à ω et $(\omega) \subseteq (V)$,

Deux façons de calculer $\sharp\mathcal{Z}(\omega)$:

- $\sharp\mathcal{Z}(\omega) + 0 = ((m+1)^3 + 1^3)/(m+2) = m^2 + m + 1$
- $\sharp\mathcal{Z}(\omega) = ((m+1)^3 + m^3)/(2m+1) = m^2 + m + 1,$

qui donnent le même résultat !