

## Quelques résultats nouveaux sur les billards de Robnik

Avram Hayli†, Thierry Dumont‡, Jean Moulin-Ollagnier§  
et Jean-Marie Strelcyn§

† Université Claude Bernard - Lyon I, Observatoire, F-69230 Saint-Genis-Laval, France

‡ Université Claude Bernard - Lyon I, Laboratoire d'Analyse Numérique, 43,  
bd du 11 novembre 1918, F-69622 Villeurbanne Cedex, France

§ Université Paris-Nord, Centre Scientifique et Polytechnique, Département de  
Mathématiques, Avenue J B Clément, F-93430 Villetaneuse, France

Reçu le 15 juillet 1986, présentation définitive le 29 janvier 1987

**Résumé.** Les billards  $R_\lambda$  de Robnik sont les images dans le plan complexe  $w$  du disque unité du plan  $z$  par la transformation quadratique conforme  $w = z + \lambda z^2$  où  $\lambda$  est un paramètre qui prend ses valeurs entre 0 et  $\frac{1}{2}$ . Pour  $\lambda = \frac{1}{4}$ , le billard est strictement convexe, de bord analytique, et sa courbure s'annule en un point. On démontre rigoureusement que le billard  $R_{1/4}$  a des courbes invariantes dans la surface de section: il n'est donc pas ergodique. La démonstration est basée sur la théorie KAM et fait usage du calcul formel sur ordinateur. On met en évidence une cascade de bifurcations dont les propriétés sont à rapprocher de résultats numériques de Benettin *et al* pour des systèmes dynamiques conservatifs et de résultats obtenus par d'Humières *et al* dans l'exploration expérimentale du pendule entreteu.

**Abstract.** A Robnik billiard  $R_\lambda$  is the image in the complex  $w$  plane of the unit disc in the  $z$  plane under the quadratic conformal map  $w = z + \lambda z^2$ . The parameter range is  $0 < \lambda < \frac{1}{2}$ . For  $\lambda = \frac{1}{4}$  the billiard is strictly convex, its boundary is analytic and it has a zero curvature at one point of the boundary. A rigorous demonstration is given that the billiard  $R_{1/4}$  has invariant curves in the surface of section. Thus it is not ergodic. The proof is based on KAM theory and makes substantial use of computer algebra. We give the first elements of a cascade of bifurcations whose properties show several similarities with numerical results given by Benettin *et al* for conservative dynamical systems and by d'Humières *et al* in the experimental study of the forced pendulum.

### 1. Introduction

Dans un article récent (Hayli et Dumont 1986) les deux premiers auteurs ont présenté les résultats de quelques expériences numériques sur des familles de billards asymétriques dont le bord  $C^1$  est constitué de quatre arcs de cercles de rayons inégaux deux à deux. L'examen des surfaces de section a montré que certains de ces billards, bien que strictement convexes, paraissent ergodiques. Ce fait est intéressant car on ne connaît pas, à l'heure actuelle, de billard strictement convexe pour lequel l'ergodicité soit démontrée. On sait au contraire, grâce à la théorie KAM, que si le bord d'un tel billard est de classe  $C^k$  avec  $k > 6$  et que la courbure du bord est partout non nulle, il y a des caustiques et par conséquent le billard n'est pas ergodique (Douady 1982). D'autre part Mather (1982) et Douady (1982) ont démontré que si le bord d'un billard

convexe est de classe  $C^2$  et si la courbure de ce bord s'annule quelque part, alors le billard en question n'admet pas de caustique strictement convexe différente du bord. L'ergodicité d'un tel billard n'est donc pas exclue *a priori*.

Pour une introduction générale à la théorie ergodique des billards (non nécessairement convexes) nous renvoyons le lecteur à l'excellent travail de Wojtkowski (1986).

Notre attention a été attirée par une famille de billards de bord analytique étudiée par Robnik (1983). Un membre strictement convexe de cette famille ayant une courbure nulle en un point du bord était en effet suspecté d'ergodicité. Le but principal de cet article est de démontrer rigoureusement que tel n'est pas le cas. La démonstration est basée sur la théorie KAM et fait un usage important du calcul formel (système MACSYMA) sur ordinateur. Elle montre, si on en doutait, que la vérification rigoureuse des hypothèses de la théorie KAM peut être très pénible.

Les sections 2 à 5 où on expose les résultats des expériences numériques sont essentiellement descriptives. La démonstration de la non ergodicité se trouve dans les sections 6 à 8. La section 9 décrit une tentative d'approche numérique directe visant à contourner les calculs formels.

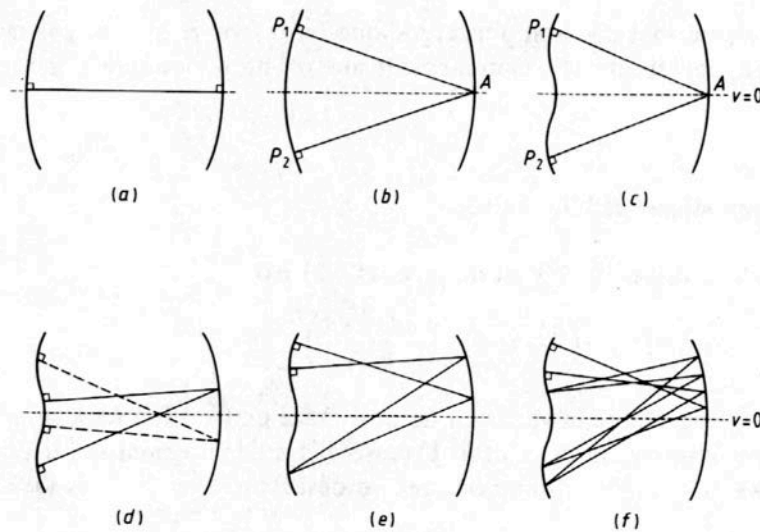
## 2. Définition du billard de Robnik et propriétés de l'orbite périodique horizontale

Le billard de Robnik, noté  $R_\lambda$ , est l'image, dans le plan complexe  $w$ , du disque unité, dans le plan  $z$ , par la transformation quadratique conforme  $w = z + \lambda z^2$ . L'équation du bord est donnée par

$$u = \cos t + \lambda \cos 2t \quad v = \sin t + \lambda \sin 2t$$

où  $w = u + iv$ ;  $t$  est l'angle polaire sur le cercle unité dans le plan  $z$ . Pour  $\lambda = 0$  le billard est un cercle; pour  $0 < \lambda < \frac{1}{4}$ , le billard  $R_\lambda$  est strictement convexe et la courbure du bord de  $R_\lambda$  est partout non nulle. Pour  $\lambda = \frac{1}{4}$ ,  $R_\lambda$  est encore strictement convexe, mais la courbure du bord de  $R_{1/4}$  s'annule en un point:  $t = \pi$ . Pour  $\frac{1}{4} < \lambda < \frac{1}{2}$  les billards  $R_\lambda$  ne sont pas convexes. Enfin pour  $\lambda = \frac{1}{2}$  le point  $t = \pi$  est un point de rebroussement du bord de  $R_{1/2}$ . D'un point de vue géométrique ces billards sont des conchoïdes de cercle et pour  $\lambda = \frac{1}{2}$  on a la cardioïde bien connue. Pour  $0 < \lambda < \frac{1}{2}$  les bords des billards  $R_\lambda$  sont des courbes analytiques réelles. Voir, pour la forme des billards, la figure 1 de l'article de Robnik.

Dans son étude des billards  $R_\lambda$ ,  $0 < \lambda < \frac{1}{2}$ , Robnik a examiné les principales orbites et leur stabilité, soit analytiquement, soit numériquement. La plus importante est l'orbite à deux rebonds le long du diamètre de symétrie, représentée schématiquement sur la figure 1(a), que nous appelons l'orbite  $1^2$  (nos notations sont différentes de celles de Robnik qui appelle cette orbite l'orbite horizontale ou encore orbite 1). Robnik trouve que lorsque  $\lambda$  croît depuis 0, l'orbite  $1^2$  cesse d'être linéairement stable pour  $\lambda_1 = \frac{1}{2}(\sqrt{2} - 1) = 0.207\ 106\ 781\ 186 \dots$  et donne naissance par bifurcation à une orbite périodique à quatre rebonds que nous désignons par  $1^4$  (Robnik la désigne par  $1^2$ ) et qui est représentée schématiquement sur la figure 1(b). L'orbite  $1^4$ , à son tour, cesserait d'être linéairement stable pour la valeur  $\lambda = 0.237\ 518\ 8847 \dots$  que Robnik, sans donner de détails, dit avoir calculé analytiquement. Il annonce pour cette valeur de  $\lambda$  une nouvelle bifurcation donnant naissance à une orbite périodique à huit rebonds, apparemment symétrique (qu'il désigne par  $1^4$  dans sa notation et qui est représentée



**Figure 1.** Représentation schématique, dans l'espace de configuration, des orbites périodiques de type  $1^2$  à  $1^{16}$ . Deux orbites de type différent sont séparées par une bifurcation. (a) Orbite  $1^2$ ,  $0 < \lambda < \lambda_1$ ; (b) orbite  $1^4$ , pour  $\lambda_1 < \lambda \leq \frac{1}{4}$ , (c) orbite  $1^4$ , pour  $\frac{1}{4} < \lambda < \lambda_2$ ; (d) orbites  $1^4$ ,  $\lambda_2 < \lambda < \lambda_3$ ; (e) orbite  $1^8$ ,  $\lambda_3 < \lambda < \lambda_4$ ; (f) orbite  $1^{16}$ ,  $\lambda_4 < \lambda < \lambda_5$ .

schématiquement dans la figure 5 de son article). Robnik signale enfin une cascade de bifurcations avec doublement de période dont il estime que  $\lambda_{\text{lim}} \approx 0.241$ .

Comme la valeur  $\lambda_{\text{lim}}$  de Robnik est inférieure à  $\frac{1}{4}$  et que, d'autre part, ses calculs suggèrent que le système est mélangeant lorsque  $\frac{1}{4} < \lambda < \frac{1}{2}$ , c'est-à-dire lorsque le bord du billard n'est pas convexe, on peut se demander si le billard  $R_{1/4}$  dont le bord est analytique, strictement convexe, mais dont la courbure s'annule en un point n'est pas ergodique. L'éventualité d'un tel résultat valait la peine qu'on y regarde de plus près.

### 3. Le billard pour $\lambda = \frac{1}{4}$ n'est pas ergodique

En fait le billard  $R_{1/4}$  n'est pas ergodique. Le calcul numérique des itérés de l'application  $\phi_\lambda$ , induite par le flot du billard dans  $R_\lambda$  sur la surface de section, montre qu'on observe encore des îles de stabilité autour des quatre points périodiques correspondant à notre orbite  $1^4$  pour  $\lambda = \frac{1}{4}$  et même au delà. Dans la suite on ne fera pas de distinction entre ces quatre points et l'orbite  $1^4$ .

On vérifie que pour  $\lambda = \frac{1}{4}$  la matrice  $M_\lambda(1^4) = d\phi_\lambda^4(1^4)$ , où on note par  $d\phi_\lambda^4$  l'application de quatrième retour  $\phi_\lambda \circ \phi_\lambda \circ \phi_\lambda \circ \phi_\lambda$  linéarisée le long de l'orbite  $1^4$ , a pour trace  $-\frac{46}{121}$  dont le module est inférieur à 2 et que par conséquent l'orbite est linéairement stable. Il faut pour cela faire le produit de quatre matrices du type écrit par Hénon et Wisdom (1983) dans la formule (6) de leur article qu'on a repris dans la formule (10) du présent travail. Le calcul est direct pour  $\lambda = \frac{1}{4}$  parce que les coordonnées des points d'impact et les rayons de courbure en ces points s'écrivent très simplement.

Moyennant la théorie KAM (cf le théorème (2.13) dans Moser (1973) et le théorème (1.4.2) dans Bost (1986)) on démontre rigoureusement dans les sections 6 à 8 que, sur la surface de section, les quatre points qui représentent l'orbite  $1^4$  sont entourés de courbes invariantes. Le billard  $R_{1/4}$  n'est donc pas ergodique. Par continuité en  $\lambda$ , les hypothèses du théorème qu'on utilise pour  $\lambda = \frac{1}{4}$  sont encore satisfaites pour l'orbite  $1^4$  pour les valeurs  $\lambda > \frac{1}{4}$ ,  $\lambda$  suffisamment proche de  $\frac{1}{4}$ . Il s'ensuit que pour de tels  $\lambda$

les billards  $R_\lambda$  ne sont pas non plus ergodiques et *a fortiori* ne sont pas mélangeants. La figure 1(c) représente schématiquement une orbite périodique  $1^4$  pour un billard avec  $\lambda > \frac{1}{4}$ .

#### 4. Orbites périodiques et bifurcations

La trace de la matrice  $M_\lambda(1^4)$  est donnée (cf § 7) par

$$\text{Tr } M_\lambda(1^4) = \left( \frac{8\lambda^4 + 20\lambda^3 + 14\lambda^2 - 1}{\lambda^2(4\lambda^2 + 6\lambda + 1)} \right)^2 - 2.$$

La figure 2(a) représente la variation de cette trace en fonction de  $\lambda$  pour les valeurs de  $\lambda$  qui nous intéressent ici. L'orbit  $1^4$  cesse d'être linéairement stable pour  $\lambda = \lambda_2 = 0.266\ 044\ 443\ 10\dots$ . Nous sommes donc en désaccord avec Robnik (1983) sur cette

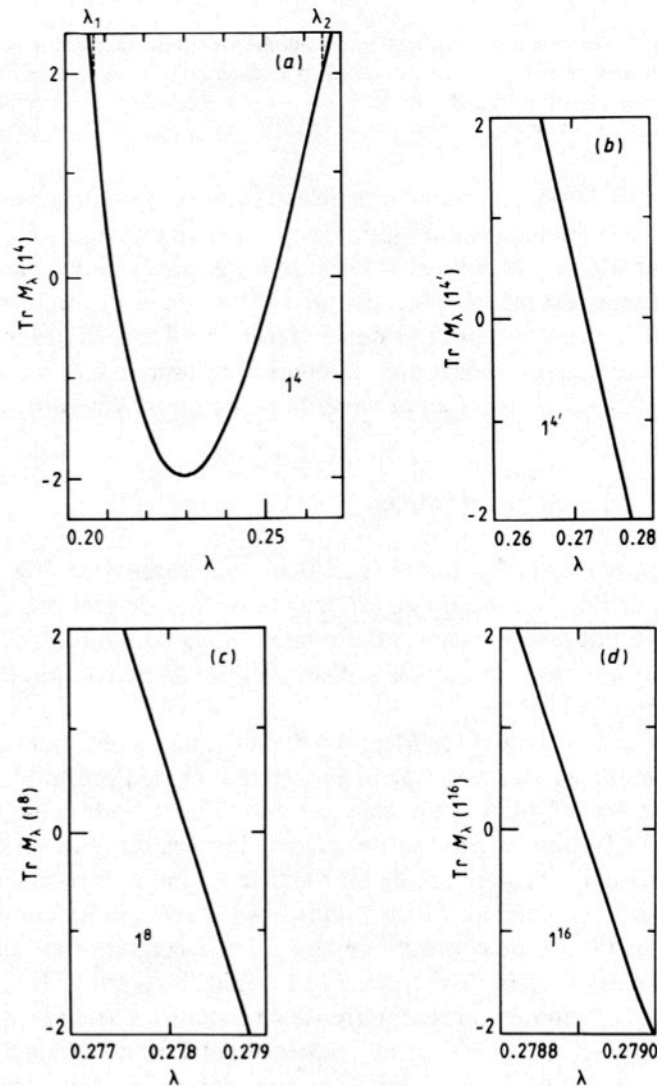


Figure 2. Variation, en fonction de  $\lambda$ , de la trace  $\text{Tr}$  de la matrice  $M_\lambda$  pour différentes orbites périodiques: (a) orbites  $1^4$ , (b) orbites  $1^{4'}$ , (c) orbites  $1^8$ , (d) orbites  $1^{16}$ .

valeur. La trace de  $M_\lambda(1^4)$  passe dans l'intervalle  $(\lambda_1, \lambda_2)$  par un minimum qui vaut  $-2$ . Ce minimum est atteint pour  $\lambda = 0.229\ 366\ 265\ 83 \dots$ . On ne peut pas *a priori* se prononcer sur la stabilité de l'orbite  $1^4$  pour cette valeur particulière de  $\lambda$ . Il serait intéressant aussi de comprendre à quelle situation géométrique correspond la valeur de  $\lambda$  qui donne ce minimum. Notons que la forme de la courbe de la figure 2(a) est due à la symétrie par rapport à droite  $v=0$  des billards  $R_\lambda$  et des orbites  $1^4$ . A ce sujet voir aussi MacKay (1984).

Pour  $\lambda = \lambda_2$  la trace vaut  $+2$  et on observe une bifurcation. On voit apparaître deux orbites asymétriques distinctes à quatre rebonds chacune; ces deux orbites sont symétriques l'une par rapport à l'autre, avec comme axe de symétrie la droite  $v=0$  qui est l'axe de symétrie du billard. Ces deux orbites sont des déformations continues de l'orbite  $1^4$ . Nous les désignons par  $1^{4'}$ ; elles sont représentées schématiquement sur la figure 1(d).

Le calcul numérique de la trace  $M_\lambda(1^{4'})$  montre que chacune des orbites  $1^{4'}$  devient à son tour linéairement instable pour  $\lambda_3 = 0.277\ 550\ 074\ 031 \dots$  et donne par bifurcation une orbite périodique à huit rebonds asymétrique que nous appelons  $1^8$  (représentée schématiquement sur la figure 1(e)); cette orbite n'est pas l'orbite notée  $1^4$  par Robnik. A la bifurcation pour  $\lambda = \lambda_3$  la trace de la matrice  $M_{\lambda_3}(1^{4'})$  est égale à  $-2$ . On observe la bifurcation suivante, avec apparition d'une orbite périodique asymétrique à seize rebonds, pour  $\lambda_4 = 0.278\ 820\ 058\ 643 \dots$ . Cette orbite, notée  $1^{16}$ , est représentée schématiquement sur la figure 1(f). Elle devient linéairement instable pour  $\lambda_5 = 0.278\ 997\ 058\ 773 \dots$ .

Les figures 2(b) à 2(d) montrent comment varie avec  $\lambda$  la trace des matrices  $M_\lambda(1^{4'})$ ,  $M_\lambda(1^8)$  et  $M_\lambda(1^{16})$ , les notations étant évidentes. Les figures 3(a) à 3(c) montrent les conditions initiales  $t = t(\lambda)$  des orbites périodiques  $1^2$  à  $1^{16}$  en fonction de  $\lambda$ ; pour ces

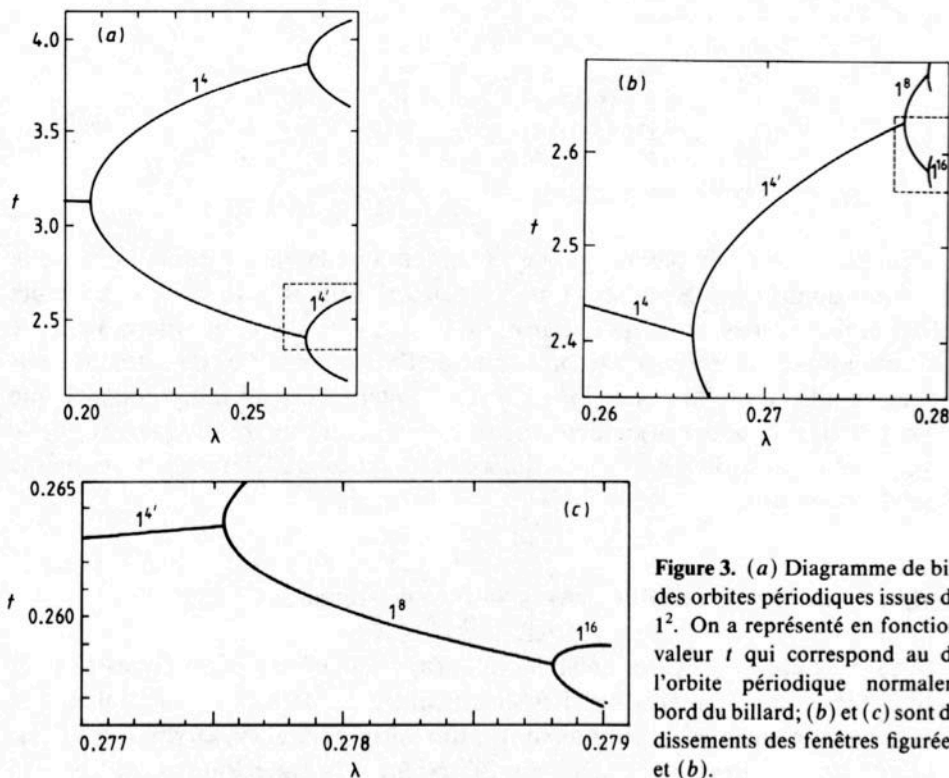


Figure 3. (a) Diagramme de bifurcation des orbites périodiques issues de l'orbite  $1^2$ . On a représenté en fonction de  $\lambda$  la valeur  $t$  qui correspond au départ de l'orbite périodique normalement au bord du billard; (b) et (c) sont des agrandissements des fenêtres figurées sur (a) et (b).

valeurs de  $t$  les orbites périodiques partent normalement au bord du billard. Notons que toutes ces orbites périodiques sont en quelque sorte dégénérées puisqu'aucune d'elles n'est polygonale.

La recherche des orbites périodiques au-delà de  $1^{16}$  devient très difficile techniquement mais il est vraisemblable que la cascade de dédoublements se poursuit indéfiniment pour des valeurs de plus en plus rapprochées de  $\lambda$  dont nous donnons plus loin une estimation de la limite.

La cascade de dédoublements qui conduit vraisemblablement au chaos est issue d'une orbite asymétrique  $1^4$ . Cette situation est à rapprocher d'un phénomène remarquable signalé par d'Humières *et al* (1982) dans l'exploration expérimentale du mouvement du pendule entretenu dont les paramètres de contrôle sont la fréquence et l'amplitude d'excitation. Ils ont observé que le mouvement finit par devenir chaotique mais qu'auparavant sa symétrie est brisée et que l'amplitude des oscillations du pendule n'est pas la même des deux côtés.

Benettin *et al* (1980) ont observé que les systèmes dynamiques conservatifs qu'ils ont étudiés exhibent une propriété analogue au comportement universel découvert numériquement par Feigenbaum (1978) et par Tresser et Couillet (1978). L'équivalent pour les billards ci-dessus serait que les différences  $\lambda_k - \lambda_{k-1}$  décroissent asymptotiquement selon une loi géométrique telle que si  $\delta_k = (\lambda_k - \lambda_{k-1}) / (\lambda_{k+1} - \lambda_k)$  on ait  $\lim_{k \rightarrow \infty} \delta_k = \delta > 1$ . Le tableau 1 donne pour les différentes orbites périodiques le numéro  $k$  de bifurcation, le nombre  $p_k$  de rebonds après la  $k$ -ième bifurcation et les valeurs de  $\lambda_k$  et de  $\delta_k$ .

Tableau 1. Bifurcation des orbites périodiques  $1^2$  à  $1^{16}$ .

$k$	$p_k$	$\lambda_k$	$\delta_k$
1	4	0.207 106 781 186	
2	4	0.266 044 443 100	5.12
3	8	0.277 550 074 031	9.06
4	16	0.278 820 058 643	7.18
5	32	0.278 997 058 773	

Les valeurs de  $\delta_k$  sont du même ordre de grandeur que la valeur limite universelle de 8.72 environ donnée par Benettin *et al*. La valeur limite estimée de  $\lambda$  serait alors  $\lambda_{\text{lim}} \approx 0.2791$  et il n'est pas exclu qu'il existe un  $\lambda_e$ ,  $\lambda_{\text{lim}} \leq \lambda_e < \frac{1}{2}$  tel que pour  $\lambda > \lambda_e$  le billard soit ergodique. Notons que le problème de l'existence d'îles de stabilité pour  $\lambda > \lambda_{\text{lim}}$  a été étudié dans MacKay (1982). Il est intéressant de remarquer ici que Wojtkowski (1986) donne des arguments théoriques très sérieux, qui suggèrent que le billard dans  $R_{1/2}$  (c'est-à-dire dans la cardioïde) est ergodique, mélangeant, et même un système de Bernoulli.

##### 5. La dimension des îles de stabilité dans la surface de section

Dans la surface de section les îles de stabilité autour des orbites périodiques  $1^4$  à  $1^{16}$  deviennent rapidement si petites qu'elles échappent à la détection graphique. Les coordonnées dans la surface de section sont  $t$ , qui varie de 0 à  $2\pi$ , et  $\sin \alpha$ , où  $\alpha$  est l'angle compté de la normale orientée vers l'intérieur à la trajectoire incidente, qui

Tableau 2. Dimensions des îles de stabilité.

$\lambda$	Type de l'orbite	$\Delta t$	$\Delta(\sin \alpha)$
0.2500	$1^4$	$1 \times 10^{-1}$	$2 \times 10^{-2}$
0.2665	$1^4$	$5 \times 10^{-2}$	$2 \times 10^{-3}$
0.2780	$1^8$	$8 \times 10^{-3}$	$4 \times 10^{-4}$
0.2789	$1^{16}$	$1.5 \times 10^{-3}$	$5 \times 10^{-5}$

varie de  $-1$  à  $+1$ . Le tableau 2 donne pour différentes orbites périodiques la valeur de  $\lambda$ , le type de l'orbite et les dimensions approximatives  $\Delta t$  et  $\Delta(\sin \alpha)$  de l'île de stabilité observée autour de l'orbite périodique.

On voit que l'aire de ces îles décroît d'environ deux ordres de grandeur toutes les fois que  $\lambda$  traverse une valeur de bifurcation. Ce résultat est à rapprocher du travail déjà cité de MacKay (1982).

Les îles de stabilité autour d'une orbite  $1^{32}$  auraient donc chacune une aire de l'ordre de  $5 \times 10^{-8}$  pour une aire totale de la surface de section d'environ 12. Il est facile de se convaincre dans ces conditions que même en calculant  $10^7$  rebonds il n'est pas possible de décider par le seul examen de la surface de section à partir de quelle valeur de  $\lambda$  il n'y a plus d'îles de stabilité. Nous avons effectivement calculé  $10^7$  rebonds pour  $\lambda = 0.28$  et constaté que la surface de section semble être remplie uniformément.

Les calculs numériques des sections 2 à 5 ont été effectués sur l'ordinateur HP-1000 de l'Observatoire de Lyon.

### 6. La forme normale de Birkhoff et le théorème des courbes invariantes de Moser

On réunit dans cette section les résultats dont on aura besoin par la suite sur la théorie KAM, en particulier le théorème des courbes invariantes de Moser. On a largement utilisé § 1.4 de Bost (1986) où on peut trouver les références détaillées. Voir aussi § 2.1 de Chenciner (1983).

Soient  $U$  et  $V$  deux voisinages ouverts de 0 dans  $\mathbb{R}^2$  et  $F: U \rightarrow V$  un difféomorphisme  $C^\infty$  qui préserve l'orientation et tel que  $F(0) = 0$ . Supposons que  $F$  vérifie les conditions suivantes:

- (i)  $F$  préserve la mesure de Lebesgue
- (ii) 0 est un point fixe elliptique de  $F$ , i.e. les deux valeurs propres  $\mu_1$  et  $\mu_2$  de  $dF(0)$  sont de module 1 et non réelles.

D'après (i),  $\det dF(0) = 1$ , et alors  $\mu_1 = \overline{\mu_2} \stackrel{\text{def}}{=} \mu$ . Si  $\mu$  n'est pas une racine de l'unité d'un ordre plus petit ou égal à 3, on démontre qu'au voisinage de 0,  $F$  admet une forme normale de Birkhoff. Cela veut dire qu'il existe un difféomorphisme  $H$  de classe  $C^\infty$  défini au voisinage de 0 dans  $\mathbb{R}^2$ , à valeur dans  $\mathbb{R}^2$ ,  $H(0) = 0$ , tel qu'en identifiant  $\mathbb{R}^2$  avec  $\mathbb{C}$  ( $\psi + is = w$ , où  $(\psi, s) \in \mathbb{R}^2$ ) on a:

$$B_F(w) \stackrel{\text{def}}{=} H^{-1} \circ F \circ H(w) = \mu w e^{ib|w|^2} + O(|w|^4)$$

ou, ce qui revient au même,

$$B_F(w) = \mu(1 + ib|w|^2)w + O(|w|^4) \tag{1}$$

pour un certain  $b$  qui est nécessairement réel.

Le difféomorphisme  $H$  en question n'est pas unique, mais la non-nullité du premier invariant de Birkhoff  $b$  ne dépend pas de  $H$ . Par exemple, si dans (1) on a  $b > 0$ , alors quel que soit  $c > 0$ , en définissant  $H_c(\tilde{w}) = H((c/b)^{1/2}\tilde{w})$  on aura

$$H_c^{-1} \circ F \circ H_c(\tilde{w}) = \mu(1 + c|\tilde{w}|^2)\tilde{w} + O(|\tilde{w}|^4).$$

La valeur de  $b$  n'a donc aucune signification particulière.

On peut toujours choisir  $H$  parmi les transformations qui préservent la mesure de Lebesgue. Dans ce cas, le premier invariant de Birkhoff ne dépend pas du choix de  $H$  (cf § 23 de Siegel et Moser 1971).

Le théorème des courbes invariantes de Moser (cf le théorème (2.13) dans Moser (1973) et le théorème (1.4.2) dans Bost (1986)) nous dit que si, en plus de (i) et de (ii),  $\mu$  n'est pas une racine de l'unité d'ordre plus petit ou égal à trois et si  $b \neq 0$ , alors dans chaque voisinage de  $0 \in \mathbb{R}^2$ , il existe une courbe  $C^\infty$  invariante pour  $F$ , qui entoure 0. Plus généralement, si  $\mu$  n'est pas une racine de l'unité d'ordre plus petit ou égal à  $2k+1 \geq 3$ , on peut, à la place de (1), obtenir une forme normale de Birkhoff d'ordre  $k$

$$H^{-1} \circ F \circ H(w) = \mu \left( 1 + \sum_{s=1}^k b_{2s} |w|^{2s} \right) w + O(|w|^{2k+2})$$

où nécessairement  $b_2, \dots, b_{2k} \in \mathbb{R}$ . La forme normale (1) correspond à  $k=1$ . Le théorème des courbes invariantes de Moser nous apprend que si au moins un des invariants de Birkhoff  $b_2, \dots, b_{2k}$  est non nul, les courbes invariantes existent encore.

On donne à présent une formule explicite pour  $b$ , pour un choix de  $H$  très particulier. On fait d'abord un changement linéaire de variables

$$\begin{pmatrix} \psi \\ s \end{pmatrix} = A \begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix} \quad (2)$$

où  $A$  est une matrice  $2 \times 2$  de déterminant non nul, tel que dans les coordonnées  $(x, y)$  l'application linéaire  $dG(0)$ , où  $G = A^{-1} \circ F \circ A$ , soit une rotation, c'est-à-dire

$$dG(0)z = A^{-1} \circ dF(0) \circ Az = \mu z \quad (3)$$

où  $z = x + iy$ .

Il est facile de voir que, sans restreindre la généralité, on peut toujours supposer que, quel que soit  $z$ , on a  $dH(0)z = z$ , ce qu'on admettra toujours dans la suite.

On emploie les notations usuelles suivantes:

$$\bar{z} = x - iy \quad \frac{\partial}{\partial z} = \frac{1}{2} \left( \frac{\partial}{\partial x} - i \frac{\partial}{\partial y} \right) \quad \frac{\partial}{\partial \bar{z}} = \frac{1}{2} \left( \frac{\partial}{\partial x} + i \frac{\partial}{\partial y} \right).$$

La formule de Taylor pour les fonctions  $f$  de deux variables réelles  $x$  et  $y$  de classe  $C^\infty$  prend dans ces conditions la forme suivante:

$$f(z) = \sum_{r=0}^k \sum_{\substack{m+n=r \\ m \geq 0, n \geq 0}} \frac{1}{m!n!} \frac{\partial^r f}{\partial z^m \partial \bar{z}^n} (0) z^m \bar{z}^n + O(|z|^{k+1}). \quad (4)$$

Notons

$$G(z) = \mu z + (g^{20} z^2 + g^{11} z\bar{z} + g^{02} \bar{z}^2) + (g^{30} z^3 + g^{21} z^2 \bar{z} + g^{12} z\bar{z}^2 + g^{03} \bar{z}^3) + O(|z|^4) \quad (5)$$

$$H(z) = z + (h^{20} z^2 + h^{11} z\bar{z} + h^{02} \bar{z}^2) + (h^{30} z^3 + h^{21} z^2 \bar{z} + h^{12} z\bar{z}^2 + h^{03} \bar{z}^3) + O(|z|^4) \quad (6)$$

où les coefficients  $g^{20}, \dots, g^{03}$  et  $h^{20}, \dots, h^{03}$  sont définis par la formule de Taylor (4).



L'expression (1) est équivalente à

$$G \circ H(z) = H(\mu z + i\mu b z^2 \bar{z} + O(|z|^4)). \tag{7}$$

On substitue (5) et (6) dans (7) et on compare les coefficients des termes  $z^m \bar{z}^n$ , pour  $m + n = 2$ , dans les deux membres de (7). On obtient:

$$h^{20} = \frac{g^{20}}{\mu^2 - \mu} \quad h^{11} = \frac{g^{11}}{1 - \mu} \quad h^{02} = \frac{g^{02}}{\mu^{-2} - \mu}. \tag{8}$$

Compte tenu de ce que  $\mu$  n'est pas une racine de l'unité d'ordre plus petit ou égal à 3, les dénominateurs des expressions (8) sont non nuls.

En comparant les coefficients de  $z^2 \bar{z}$  on obtient:

$$b = -i\bar{\mu}[g^{21} + 2g^{20}h^{11} + g^{11}(h^{20} + \overline{h^{11}}) + 2g^{02}\overline{h^{02}}]. \tag{9}$$

### 7. Retour aux billards de Robnik

On définit les coordonnées  $\psi, s$  sur la surface de section comme dans Hénon et Wisdom (1983):  $\psi$  est l'abscisse curviligne du point d'impact comptée le long du bord du billard mais en prenant pour origine le point  $P_1$  (figures 1(b), (c)) et  $s = \sin \alpha$  où  $\alpha$  est l'angle orienté compté de la normale orientée vers l'intérieur à la trajectoire incidente. Il est clair que  $0 \leq \psi \leq L$ , où  $L$  est la longueur du billard et que  $|s| < 1$ . La surface de section s'identifie alors avec le rectangle

$$\Pi = \{(\psi, s) \in \mathbb{R}^2; 0 \leq \psi \leq L, -1 < s < 1\}.$$

Le mouvement de la particule dans le billard  $R_\lambda$  correspond à une transformation  $\phi_\lambda : \Pi \rightarrow \Pi$ . Cette transformation préserve la mesure de Lebesgue  $d\psi ds$ . L'application  $\phi_\lambda$  est infiniment dérivable et on a la formule suivante (voir la formule (6) de Hénon et Wisdom (1983)):

$$d\phi_\lambda(\psi, s) = \frac{\partial(\psi_1, s_1)}{\partial(\psi, s)} = \begin{pmatrix} \frac{Kd - \cos \alpha}{\cos \alpha_1} & -\frac{d}{\cos \alpha \cos \alpha_1} \\ K \cos \alpha_1 + K_1 \cos \alpha - KK_1 d & \frac{K_1 d - \cos \alpha_1}{\cos \alpha} \end{pmatrix} \tag{10}$$

où  $(\psi_1, s_1) = \phi_\lambda(\psi, s)$  et où  $K$  et  $K_1$  sont les courbures du bord aux points d'abscisses  $\psi$  et  $\psi_1$ ,  $d = d(\psi, s)$  est la distance des points d'abscisses curvilignes  $\psi$  et  $\psi_1$ , et  $\alpha_1 = \sin^{-1} s_1$ .

Notons par  $p$  la transformation induite sur la surface de section  $\Pi$  par la réflexion par rapport à l'axe de symétrie  $v = 0$  du billard  $R_\lambda$ . On voit facilement que  $dp(\psi, s) = -Id$ .

On voit immédiatement que  $p \circ \phi_\lambda = \phi_\lambda \circ p$ , que  $(0, 0)$  est un point fixe de l'application  $F_\lambda = p \circ \phi_\lambda^2$  et que  $\phi_\lambda^4 = F_\lambda^2$ . La symétrie de l'orbite  $1^4$  permet d'écrire

$$M_\lambda(1^4) = d\phi_\lambda^4(1^4) = [dF_\lambda(0, 0)]^2$$

d'où l'on déduit l'expression de  $\text{Tr } M_\lambda(1^4)$  donnée dans § 4.

Dans toute la suite on considère uniquement le cas  $\lambda = \frac{1}{4}$  et on note simplement  $\phi$  pour  $\phi_{1/4}$ , etc.

Pour montrer que le point  $(0, 0)$  de la surface de section  $\Pi$  qui correspond à l'orbite  $1^4$  issue du point  $P_1$  est entouré de courbes invariantes pour  $\phi^4$  il suffit de montrer que ce point est entouré de courbes invariantes pour  $F$ . A cette fin on va vérifier que les hypothèses du théorème des courbes invariantes de Moser sont remplies.

L'application de la formule (10) donne par un calcul direct

$$dF(0, 0) = \begin{pmatrix} -\frac{7}{11} & \frac{81}{11\sqrt{5}} \\ -\frac{8\sqrt{5}}{99} & -\frac{7}{11} \end{pmatrix}.$$

On voit donc que  $dF(0, 0)$  n'est pas une matrice de rotation dans les coordonnées  $(\psi, s)$ . Les valeurs propres de cette matrice sont égales à  $\mu$  et  $\bar{\mu}$  où

$$\mu = \frac{-7 - i6\sqrt{2}}{11}. \quad (11)$$

On voit que  $\mu$  n'est pas une racine de l'unité d'un ordre plus petit ou égal à 3. Comme  $\phi^4 = F^2$  on note que (11) entraîne tout de suite que  $\text{Tr } M_\lambda(1^4) = -\frac{46}{i21}$  comme on l'a écrit dans § 3.

Soit

$$A = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & (2\sqrt{10})/27 \end{pmatrix}.$$

On vérifie immédiatement que

$$A^{-1} \circ dF(0, 0) \circ A = \begin{pmatrix} -\frac{7}{11} & \frac{6\sqrt{2}}{11} \\ -\frac{6\sqrt{2}}{11} & -\frac{7}{11} \end{pmatrix}$$

c'est-à-dire que dans les coordonnées  $x = \psi$ ,  $y = (27/2\sqrt{10})s$  l'application  $G(x, y) \stackrel{\text{def}}{=} F(\psi, s)$  est telle que

$$dG(0, 0)z = \mu z$$

(voir (2) et (3)).

Pour terminer la démonstration de l'existence des courbes invariantes de  $F$  il reste seulement à vérifier que le premier invariant de Birkhoff de  $G$  est non nul.

## 8. Calcul effectif du premier invariant de Birkhoff

Comme le montrent les résultats des §§ 6 et 7 le calcul du premier invariant de Birkhoff est entièrement algébrique. Il est cependant très long et très pénible. Nous l'avons programmé avec le système de calcul formel MACSYMA sur l'ordinateur VAX du Laboratoire d'Informatique théorique et programmation de l'Université Paris VI. Son exécution a demandé plus de vingt minutes de temps CPU.

Décrivons le schéma général du calcul. Dans un premier temps on obtient, moyennant la formule (10), les dérivées secondes et troisièmes du difféomorphisme  $\phi$  en un point  $(\psi, s)$  quelconque. Ces dérivées sont sous la forme d'expressions rationnelles des sinus et cosinus des angles  $\alpha$  et  $\alpha_1$ , de la courbure du bord et de ses deux premières dérivées aux points  $\psi$  et  $\psi_1$ , et de la distance  $d$  entre ces deux points. La complexité

de ces expressions est telle que l'écriture de chacune des dérivées troisièmes remplit à elle seule un écran de dimension standard. Dans un second temps on écrit les expressions précédentes pour le cas particulier du billard  $R_{1/4}$ ; on a choisi de paramétrer le bord du billard par  $\tan \frac{1}{2}t$  afin d'obtenir des expressions rationnelles. Dans un troisième temps on substitue dans ces expressions les valeurs des paramètres correspondant aux rebonds de l'orbite  $1^4$  aux points  $P_1$  et  $A$  respectivement. Dans un dernier temps on utilise les nombres obtenus pour calculer  $d^2\phi$  et  $d^3\phi$  aux points  $P_1$  et  $A$  (figure 1(b)).

On obtient alors par des formules usuelles les trois premières dérivées de  $F = p \circ \phi \circ \phi$  au point fixe  $(0, 0)$  de  $F$ . On passe ensuite aux coordonnées  $(x, y)$  et on calcule les trois premières dérivées de l'application  $G(x, y) = F(\psi, s)$  en  $(0, 0)$ .

Il reste à déterminer la forme normale de Birkhoff  $B_G$ . Soit, comme dans (1),  $G \circ H = H \circ B_G$  et soit  $dH(0, 0) = Id$ . On adopte les notations abrégées suivantes:  $d^2H(0, 0) = H''$ ,  $d^3H(0, 0) = H'''$ , etc.

L'identité  $(G \circ H)'' = (H \circ B_G)''$  permet le calcul des coefficients de  $H''$  parce que  $B_G''$  est nul et que le système linéaire obtenu pour les éléments de  $H''$  est un système de Cramer (cf (8)).

L'identité  $(G \circ H)''' = (H \circ B_G)'''$  fournit un système de huit équations linéaires pour les coefficients de  $H'''$ , système où les parties réelle et imaginaire  $\text{Re}(i\mu b)$  et  $\text{Im}(i\mu b)$ , où  $b$  est le premier invariant de Birkhoff de  $G$ , apparaissent comme paramètres et ceci linéairement. Deux combinaisons linéaires bien choisies de ces huit équations évitent la résolution complète du système et fournissent deux équations linéaires pour  $\text{Re}(i\mu b)$  et  $\text{Im}(i\mu b)$  dont les coefficients ne dépendent pas de  $H'''$ . Ce procédé n'est en fait rien d'autre que la répétition de la démonstration de la formule (9) adapté aux variables  $(x, y)$  que nous utilisons dans notre calcul formel.

Expliquons maintenant comment on obtient les combinaisons linéaires en question. Nous formulerons les résultats nécessaires pour  $n \geq 1$  quelconque, bien que nous ne les utilisons dans la suite que pour  $n = 3$ .

Considérons l'espace vectoriel réel  $E_n(\mathbb{R})$  des applications  $n$  linéaires symétriques de  $(\mathbb{R}^2)^n$  dans  $\mathbb{R}^2$ . Soit  $(e_1, e_2)$  la base canonique de  $\mathbb{R}^2$ . Pour  $h \in E_n(\mathbb{R})$  on note  $h_{i_1, i_2, \dots, i_n}^j$  la  $j$ -ième coordonnée du vecteur  $h(e_{i_1}, \dots, e_{i_n})$  dans la base  $(e_1, e_2)$ . Introduisons sur  $E_n(\mathbb{R})$  le produit scalaire suivant: si  $f, g \in E_n(\mathbb{R})$ , alors

$$\langle f, g \rangle = \sum_{j=1}^2 \sum_{i_1, \dots, i_n=1,2} f_{i_1, \dots, i_n}^j g_{i_1, \dots, i_n}^j.$$

Si nous identifions l'espace d'arrivée  $\mathbb{R}^2$  avec  $\mathbb{C}$  et si on note

$$\begin{aligned} f_{i_1, \dots, i_n} &= f_{i_1, \dots, i_n}^1 + i f_{i_1, \dots, i_n}^2 \\ g_{i_1, \dots, i_n} &= g_{i_1, \dots, i_n}^1 + i g_{i_1, \dots, i_n}^2 \end{aligned}$$

ce produit scalaire s'écrit:

$$\langle f, g \rangle = \text{Re} \left( \sum_{i_1, \dots, i_n=1,2} \overline{f_{i_1, \dots, i_n}} g_{i_1, \dots, i_n} \right). \tag{12}$$

Etant donné un  $n$ -uplet  $(\varepsilon_1, \dots, \varepsilon_n)$  où les  $\varepsilon_i$  valent 1 ou  $-1$ , on définit l'application  $n$  linéaire symétrique  $f^{\varepsilon_1, \dots, \varepsilon_n}$  de  $(\mathbb{R}^2)^n$  dans  $\mathbb{C}$  de la manière suivante:

$$(f^{\varepsilon_1, \dots, \varepsilon_n})_{i_1, \dots, i_n} = \frac{\partial^n}{\partial x_{i_1} \dots \partial x_{i_n}} \left( \prod_{j=1}^n (x + i\varepsilon_j y) \right) \tag{13}$$

où  $i_1, \dots, i_n$  prennent les valeurs 1 et 2 et où  $x_1 = x$  et  $x_2 = y$ .

L'application  $f^{\varepsilon_1, \dots, \varepsilon_n}$  ne dépend en fait que du nombre de 1 et de  $-1$  dans l'ensemble  $\{\varepsilon_1, \dots, \varepsilon_n\}$  et non de leur ordre. Il y en a donc exactement  $(n+1)$  différentes.

On démontre que ces  $(n+1)$  applications différentes forment une base orthogonale par rapport au produit scalaire (12) dans l'espace vectoriel complexe  $E_n(\mathbb{C})$  des applications  $n$  linéaires symétriques de  $(\mathbb{R}^2)^n$  dans  $\mathbb{R}^2$  identifié avec  $\mathbb{C}$ .

Si  $g \in E_n(\mathbb{C})$ , puisque la base construite ci-dessus est orthogonale, les coordonnées de  $g$  dans cette base s'expriment à l'aide du produit scalaire (12).

Revenons à notre calcul: on considère les deux formes trilinéaires symétriques  $f^{1,1,-1}$  et  $if^{1,1,-1}$  de  $E_n(\mathbb{C})$ . Moyennant (13) on détermine leurs coordonnées par un calcul direct. En faisant le produit scalaire (12) de la forme trilinéaire symétrique  $(G \circ H)^m - (H \circ B_G)^m$  par  $f^{1,1,-1}$  et  $if^{1,1,-1}$  respectivement, on obtient deux équations linéaires permettant de déterminer  $\operatorname{Re}(\mu ib)$  et  $\operatorname{Im}(\mu ib)$ .

Le calcul montre que

$$\mu ib = \frac{19\,300\,790}{1185\,921} - i\sqrt{2} \frac{67\,552\,765}{7115\,526}$$

donc  $b \neq 0$ .

Notons qu'on vérifie aisément que  $b = \sqrt{2}(9650\,395/646\,866)$ ;  $b$  est donc réel comme cela doit être. Cela constitue un test de la fiabilité de nos calculs.

On généraliserait aisément cette méthode au calcul du deuxième invariant si le premier était nul; il suffirait pour cela de calculer les dérivées jusqu'à l'ordre 5 du difféomorphisme  $G$  en  $(0, 0)$ .

### 9. Une tentative d'approche numérique pour vérifier la non nullité du premier invariant de Birkhoff

L'approche que nous allons décrire ne nécessite pas de calculs formels. Elle a l'avantage d'être simple et rapide.

Notons

$$d\phi^2(\psi, s) = \begin{pmatrix} M(\psi, s) & N(\psi, s) \\ P(\psi, s) & Q(\psi, s) \end{pmatrix}.$$

Au lieu de calculer exactement les dérivées de  $M$ ,  $N$ ,  $P$  et  $Q$  on les approche numériquement par des différences finies. Par exemple, on approche  $(\partial M/\partial \psi)(\psi_0, s_0)$  par

$$\frac{M(\psi_0 + \Delta\psi, s_0) - M(\psi_0 - \Delta\psi, s_0)}{2\Delta\psi} \quad \Delta\psi \neq 0. \quad (14)$$

Le calcul numérique des orbites du billard permet d'estimer (14) pour  $\Delta\psi$  petit et donc d'obtenir une valeur approchée de  $(\partial M/\partial \psi)(\psi_0, s_0)$ . On procède de la même manière pour estimer les autres dérivées de  $M$ ,  $N$ ,  $P$  et  $Q$  jusqu'à l'ordre 2 compris. Ayant obtenu, par cette méthode, une approximation des dérivées au point  $(0, 0)$  qui correspond à l'orbite  $1^4$  issue du point  $P_1$ , on passe aux coordonnées  $x = \psi$ ,  $y = (27/2\sqrt{10})s$  et on applique les formules (8) et (9) afin d'obtenir une estimation numérique de  $b$ .

L'approximation des dérivées premières de  $M$ ,  $N$ ,  $P$  et  $Q$  obtenues par ce procédé est assez bonne. Pour des accroissements de  $\Delta\psi$  et de  $\Delta s$  de l'ordre de  $10^{-4}$  à  $10^{-6}$  on a un accord avec les valeurs exactes des dérivées, obtenues par le calcul formel, meilleur que  $5 \times 10^{-3}$ . Il n'en va pas de même pour les dérivées d'ordre 2. Le cas le plus flagrant

est celui de  $\partial^2 M / \partial \psi^2$ : avec le procédé indiqué ci-dessus on trouve environ 33 tandis que la valeur exacte donnée par le calcul formel est  $143\,403\,440/4348\,377 \approx 27.7$ . On obtient finalement par ce calcul numérique que  $b \approx 20.78 - i0.13$ . Ce résultat ne dépend pratiquement pas des valeurs prises par  $\Delta\psi$  et  $\Delta s$  dans les intervalles considérés. Il est à comparer avec la valeur exacte de  $b$  donnée par le calcul formel, qui est voisine de 21.10.

Bien que l'accord de la valeur obtenue pour  $b$  par le calcul approché avec la valeur exacte trouvée par le calcul formel ne soit pas foncièrement mauvais, on voit qu'il y a quelque danger à utiliser ce procédé pour affirmer que  $b$  est non nul sans faire au préalable l'estimation de l'erreur, ce qui ne semble guère facile ici. Cela montre, s'il était nécessaire, que l'usage du calcul formel est très adapté à ce problème.

## 10. Conclusions

Notre principal résultat est que pour  $\lambda = \frac{1}{4}$  le billard de Robnik n'est pas ergodique. L'extrême petitesse des îles de stabilité, déjà pour  $\lambda = \frac{1}{4}$ , explique qu'elles échappent à une observation insuffisamment minutieuse. D'un point de vue physique l'existence d'aussi petites îles de stabilité pour  $\lambda = \frac{1}{4}$  n'affecte pas vraiment les conclusions de l'intéressant travail de Robnik.

## Remerciements

Les auteurs remercient M Chaperon, P Collet, R Douady et R Herman (Ecole Polytechnique, Palaiseau), J P Francoise (Université Paris-Sud, Orsay) et M Hénon (Observatoire de Nice) pour d'importantes discussions ainsi que M Z Hernaus qui s'est chargé de la préparation des figures. Ils remercient également le Laboratoire d'Informatique de l'Université Paris VI qui leur a permis d'utiliser l'ordinateur VAX.

## Références

- Benettin G, Cercignani C, Galgani L et Giorgilli A 1980 *Lett. Nuovo Cimento* **28** 1  
 Bost J B 1986 *Séminaire N Bourbaki 1984/85, Exposé No 639 Astérisque* 133-4 (Paris: Soc. Math. France) pp 113-57  
 Chenciner A 1983 *Comportement Chaotique des Systèmes Déterministes, Les Houches Session XXXVI* ed G Ioos, G Helleman et R Stora (Amsterdam: North-Holland) pp 273-348  
 D'Humières D, Beasley M R, Huberman B A et Libchaber A 1982 *Phys. Rev. A* **26** 3483  
 Douady R 1982 *Thèse de 3ème cycle* Université Paris VII  
 Feigenbaum M J 1978 *J. Stat. Phys.* **19** 25  
 Hayli A et Dumont T 1986 *Celest. Mech.* **38** 23  
 Hénon M et Wisdom J 1983 *Physica* **8D** 157  
 MacKay R S 1982 *Phys. Lett.* **87A** 321  
 ——— 1984 *Phys. Lett.* **106A** 99  
 Mather J N 1982 *Ergod. Theor. Dyn. Syst.* **2** 397  
 Moser J K 1973 *Stable and Random Motions in Dynamical Systems, Ann. Math. Studies No 77* (Princeton, NJ: Princeton University Press)  
 Robnik M 1983 *J. Phys. A: Math. Gen.* **16** 3971  
 Siegel C L et Moser J K 1971 *Lectures on Celestial Mechanics* (Berlin: Springer)  
 Tresser C et Couillet P 1978 *C. R. Acad. Sci., Paris A* **287** 577  
 Wojtkowski M 1986 *Commun. Math. Phys.* **105** 391